Geometrie pro počítačovou grafiku - PGR020

Eukleidovské shodnosti v rovině

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK

Motivace - shodnosti v rovině

Motivace:

- Jak v rovině vypadají v rovině rovnice posunutí, otočení, osové a středové souměrnosti?
- Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož jeden vrchol je pevně dán a zbylé dva leží na dvou daných přímkách.
- Analyzujte a vykreslete kuželosečku s rovnicí

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 - 280x + 290y + 325 = 0.$$

- Jak byste animovali přesun objektu v rovině z jedné polohy do druhé.

Eukleidovské shodnosti

- **Definice:** Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné, jestliže pro každé dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|.$$

- **Věta:** Každé shodné zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Takovou matici nazýváme ortonormální nebo též unitární.

Důsledky předchozí věty

- Shodná zobrazení jsou prostá.
- Všechny shodnosti prostoru $\mathbb{R}^n$ tvoří grupu $E(n)$. Její dimenze (počet stupňů volnosti) je $n(n+1)/2$.
- Lineární zobrazení **vektorového** prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe dané maticí A se nazývá asociované lineární zobrazení k f.
- Bodům, které se zobrazí na sebe říkáme samodružné body $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Vlastním směrům asociovaného zobrazení říkáme samodružné směry.
- Shodné zobrazení nazveme přímé, když $\det A = 1$ a nepřímé, když $\det A = -1$.
- Reálná vlastní čísla matice A mohou být jen ± 1.
- Přímé shodnosti tvoří podgrupu.
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{A} = E$ tvoří podgrupu posunutí, což je vlastně vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{p} = 0$ tvoří podgrupu isometrií vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, která se označuje $ON(n)$ a nazývá se ortonormální grupa. Jde o grupu ortonormálních matic.

Skládání shodných zobrazení

- Jak se shodná zobrazení vlastně skládají? Mějme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$ a $g(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}$, pak
$$g \circ f(\mathbf{x}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$
Tedy grupová operace mezi dvojicemi má tvar
$$(\mathbf{B}, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{p}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$
- Jedná se o klasický příklad semidirektního součinu
$$E(n) = ON(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$
- Namísto
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$$
můžeme psát
$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Skládání a inverze funguje tak jak má.
- Jedná se o vnoření $E(n)$ do grupy matic $GL(n+1)$.

Shodnosti v rovině

Každá shodnost v $\mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & p_x \\ b & a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

nebo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p_x \\ b & -a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $a^2 + b^2 = 1$.

Drobná vsuvka: Jak parametrizovat kružnici?

$$a^2 + b^2 = 1$$

Drobná vsuvka: Jak parametrizovat kružnici?

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \sin\alpha$$

Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

Drobná vsuvka: Jak parametrizovat kružnici?

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \sin\alpha$$

Ale lze i racionálně stereograficko projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad b = \frac{2t}{1 + t^2}$$

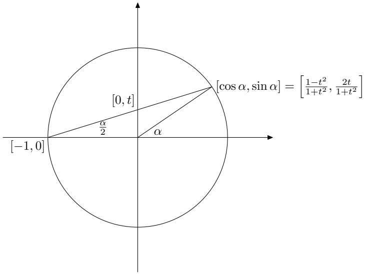
Drobná vsuvka: Jak parametrizovat kružnici?

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \sin\alpha$$

Ale lze i racionálně stereograficko projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad b = \frac{2t}{1 + t^2}$$



$$t = \tan(\alpha/2).$$

Shodnosti v rovině

Věta: Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^2$ je buď posunutí, nebo otočení. Každá nepřímá shodnost je buď osová souměrnost, nebo posunutá osová souměrnost (směr posunutí je rovnoběžný osou).

Podívejme se na standardní příklady

Viz stránky předmětu, příklady 4, 5, 6, 7, 11, 15.

Přímé shodnosti v rovině pomocí $\mathbb{C}$

Namísto

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & p_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

můžeme psát

$$z' = uz + p,$$

kde p je libovolné komplexní číslo a u je komplexní jednotka.