Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

SEMESTRÁLNÍ PROJEKT

Jiří Novotný

Vytvoření panoramatického snímku ze dvou fotografií

Geometrie pro počítačovou grafiku

ZS 2011/2012

Obsah

1 Úvod

1.1 Motivace

Panoramatické fotografie umožňují zachytit široký úhel pohledu na scénu. Svou podstatou jsou blízké vnímání optickou soustavou člověka, proto patří k divácky velmi atraktivním. Existuje několik rozdílných metod, jak panoramatickou fotografii zachytit. Někdy se používají speciální **panoramatické fotoaparáty**. Pro běžného fotografa (amatéra) je však běžnější a přístupnější vyfotografovat scenérii **po částech** a následně ji složit do jednoho celku. Právě tím se zjednodušeně zabývá tento projekt.

Obrázek 1: Panorama Českého středohoří

1.2 Cíl projektu

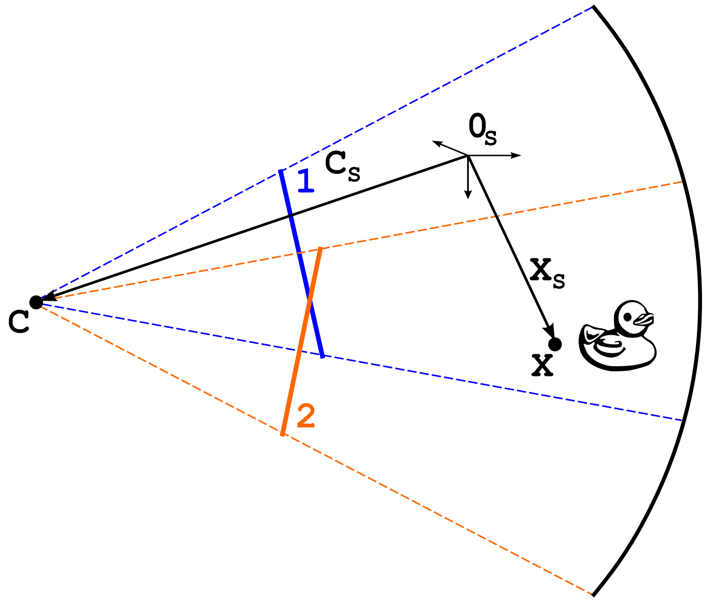
Cílem projektu je ze dvou zadaných snímků, které se částečně překrývají, sestrojit panoramatickou fotografii. Pro jednoduchost se předpokládá, že snímky vznikly fotografováním z jednoho místa a fotoaparát byl pouze pootočen kolem svislé osy procházející **uzlovým bodem**[1]. Toho lze docílit např. za pomoci stativu. Úkolem je tedy nalézt transformaci mapující body z prostoru jednoho snímku do prostoru druhého snímku (pokud taková existuje).

[1] optický střed objektivu

2 Návrh řešení

2.1 Obecný model

Výsledné panorama se získá promítnutím obou snímků do společné obrazové roviny (v praxi se skládá i více fotografií, v takovém případě se promítá např. do roviny prostředního snímku). Pořízení snímků je schematicky zachyceno na *obrázku 2* – fotoaparát byl pouze pootočen.



Obrázek 2: Nákres pořízení jednotlivých fotografií

Vyjdeme z obecné rovnice pro transformaci vektoru z jedné báze do druhé

$$\mathbf{x}_\beta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{\beta'} \tag{1}$$

$\mathbf{A}$ je matice přechodu z báze β' do báze β. Tuto rovnici dále přepíšeme do tvaru:

$$\alpha \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot (X_S - C_S) \tag{2}$$

Kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}$ je obraz bodu X_S vyjádřený v homogenních souřadnicích a C_S je optický střed objektivu fotoaparátu. Pro oba snímky získáváme:

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} = \mathbf{A_1} \cdot (X_S - C_S) \tag{3}$$

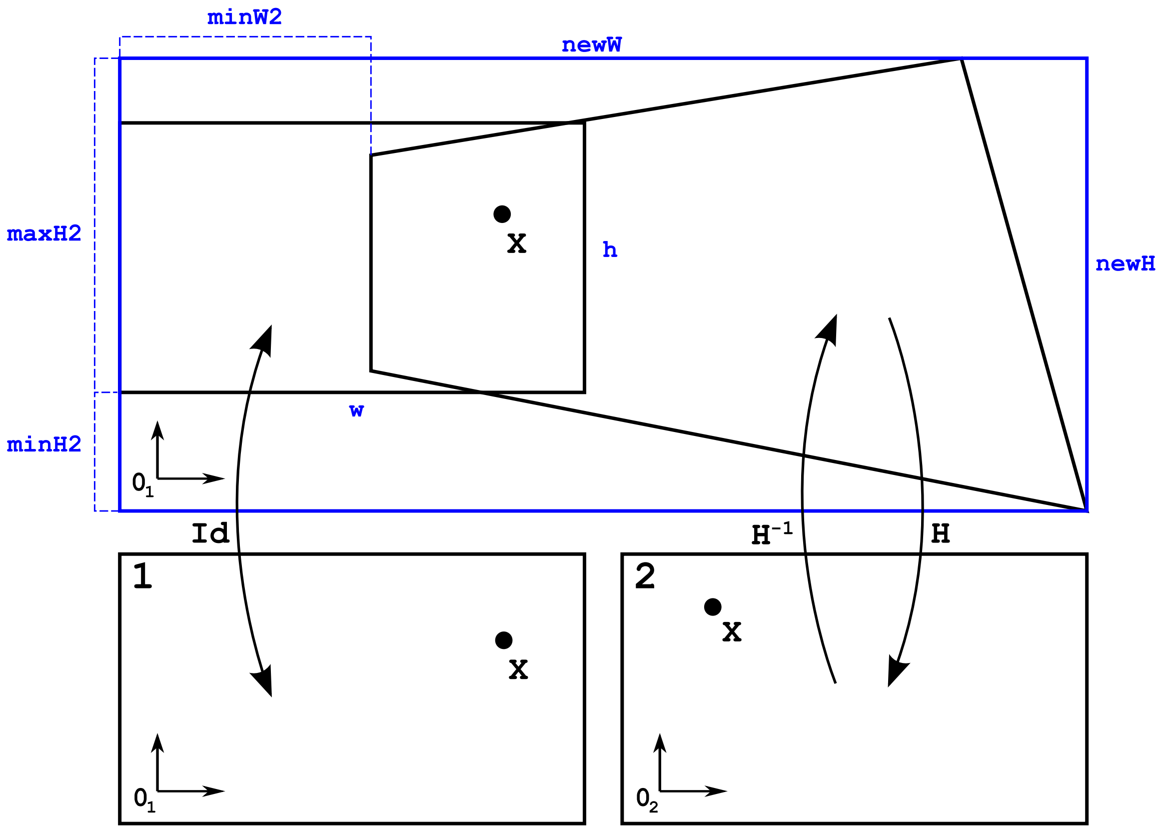
$$\alpha_2 \mathbf{u_2} = \mathbf{A_2} \cdot (X_S - C_S) \tag{4}$$

Kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ jsou konstanty a $\mathbf{u_1}$ (resp. $\mathbf{u_2}$) jsou **homogenní** souřadnice pozorovaného bodu X v obrazové rovině prvního (resp. druhého) snímku a $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ jsou regulární matice přechodu od báze S k bázím snímků 1 a 2. Body X_S a C_S jsou pro oba snímky stejné, porovnáním rovnic (3) a (4) dostáváme:

$$\alpha_1 \mathbf{A_1^{-1}} \cdot \mathbf{u_1} = \alpha_2 \mathbf{A_2^{-1}} \cdot \mathbf{u_2} \tag{5}$$

$$\alpha \mathbf{u_2} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u_1} \tag{6}$$

Poslední rovnost jsme získali dosazením $\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ a $\mathbf{H} = \mathbf{A_2} \cdot \mathbf{A_1^{-1}}$. Vzniklá regulární matice $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ se nazývá matice **homografie**. Je to transformační matice popisující korespondenci bodů mezi oběma obrazy. Souřadnice $\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{u_2}$ jsou homogenní. Jednomu bodu $(x, y)^T$ odpovídá nekonečně mnoho bodů $(\alpha x, \alpha y, \alpha)^T$ v homogenních souřadnicích. Koeficient α tak není pro další výpočet důležitý, stačí vypočítat matici homografie, kterou získáme na základě vstupních snímků.



Obrázek 3: Transformace mezi snímky

Obrazová rovina výsledného panoramatu je zvolena totožně s rovinou prvního snímku (identické zobrazení). Druhý snímek váže s výsledkem transformace homografie **H**. Situace je zachycena na *obrázku 3* (nahoře je výsledné panorama, dole vstupní snímky).

2.2 Bodové korespondence

Souřadnice odpovídajících si bodů z obou fotografií využijeme k výpočtu hledané homografie. Dvojice korespondencí označíme indexem $i = 1, \ldots, n$. Pro každou takovou dvojici lze díky rovnici (6) psát

$$\alpha_i \mathbf{u_i'} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u_i} \tag{7}$$

Zde $\mathbf{u_i} = (u_i, v_i, 1)^T$ a $\mathbf{u_i'} = (u_i', v_i', 1)^T$ jsou homogenní souřadnice i-té korespondence, **H** je matice homografie a $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je neznámá konstanta. Řádky matice homografie označíme vektory: $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h_1^T} \\ \mathbf{h_2^T} \\ \mathbf{h_3^T} \end{pmatrix}$, vztah (7) tak můžeme rozepsat do tří rovnic:

$$\alpha_i u'_i = \mathbf{h_1^T} \cdot \mathbf{u_i} \tag{8}$$

$$\alpha_i v'_i = \mathbf{h_2^T} \cdot \mathbf{v_i} \tag{9}$$

$$\alpha_i = \mathbf{h_3^T} \cdot \mathbf{u_i} \tag{10}$$

Dále dosazením rovnosti (10) do (8) a (9):

$$u'_i \mathbf{h_3^T} \cdot \mathbf{u_i} = \mathbf{h_1^T} \cdot \mathbf{u_i} \tag{11}$$

$$v'_i \mathbf{h_3^T} \cdot \mathbf{u_i} = \mathbf{h_2^T} \cdot \mathbf{v_i} \tag{12}$$

Ze všech korespondencí dostáváme soustavu $2n$ homogenních lineárních rovnic pro 9 neznámých. V maticovém tvaru pro $i = 1, \ldots, n$ můžeme psát:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{u_i^T} & 0\,0\,0 & u'_i \mathbf{u_i^T} \\ 0\,0\,0 & -\mathbf{u_i^T} & v'_i \mathbf{u_i^T} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{h_1} \\ \mathbf{h_2} \\ \mathbf{h_3} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{13}$$

Což zkráceně označíme jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}$. Homografie $\mathbf{H}$ z rovnosti (7) je určena až na skalární násobek jednoznačně díky homogenním souřadnicím. Hodnost matice $\mathbf{A}$ je díky tomu osm. K vyřešení soustavy je nutné, aby matice $\mathbf{A}$ měla osm lineárně nezávislých řádků. Každá korespondence určuje právě dvě rovnice, stačí tedy zvolit čtyři body ($n = 4$). Žádné tři však nesmějí ležet na přímce v ani jednom z obrazů (kvůli lineární nezávislosti). K minimalizaci chyby způsobené nepřesností volby korespondencí je vhodné volit počet bodů $n \gg 4$.

2.2.1 Normalizace dat

Program pro řešení soustavy používá numerickou metodu **singulárního rozkladu** matice. Ta je prakticky implementací metody nejmenších čtverců, která bere více ohled na velká čísla, kdežto na malých číslech může být relativní chyba nepřijatelná. Z matice soustavy obsahující řádově velká i malá čísla by se tak nemuselo podařit homografii vůbec spočítat. Proto je výhodné souřadnice bodů normalizovat tak, aby těžiště bodů leželo v počátku souřadnic a velikost největšího vektoru bodových souřadnic byla 1. Tímto postupem se omezí ztráta přesnosti. Ze souřadnic $\mathbf{X} = (x, y, 1)^T$ dostaneme normované souřadnice $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, 1)^T = \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & 0 & -\frac{\mu_x}{\sigma_x} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y} & -\frac{\mu_y}{\sigma_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

μ (resp. σ) jsou střední hodnoty (resp. rozptyly) v jednotlivých složkách. Z normovaných dat se pomocí SVD vypočte matice $\tilde{\mathbf{H}}$, výsledná homografie je pak rovna $\mathbf{H} = \mathbf{N_{x'}^{-1}} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N_x}$, kde $\mathbf{N_{x'}^{-1}}, \mathbf{N_x}$ jsou normalizační matice souřadnic korespondencí.

3 Program

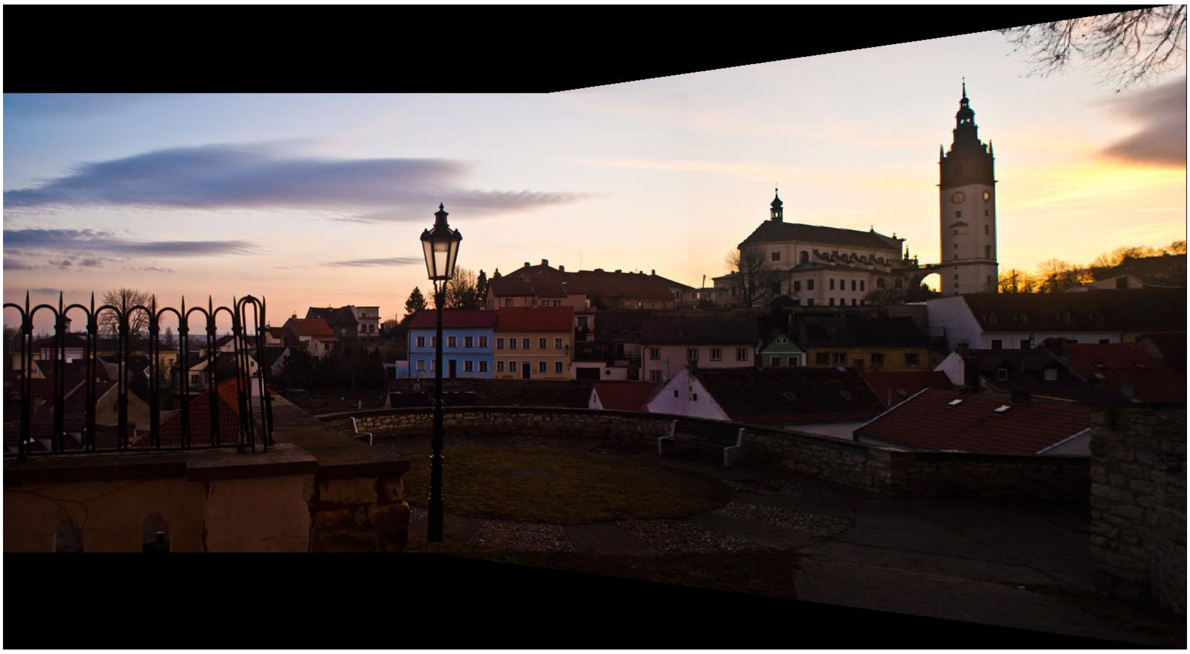
3.1 Wolfram Mathematica

Projekt je vypracován v programu Wolfram Mathematica, který obsahuje potřebné matematické jádro a navíc umožňuje základní manipulaci s obrázky. Je rozdělen do tří souborů - notebooků. Podrobnosti jsou komentovány v jednotlivých programech:

`findpoints.nb`	hledá korespondující body dvou obrázků
`drawpoints.nb`	vykresluje korespondence do obrázku
`panorama.nb`	ze dvou snímků a množiny bodů vypočte panoramatický snímek

3.2 Ukázka

Obrázek 4: Korespondence bodů vstupních snímků



Obrázek 5: Složené panorama

4 Závěr

Tento projekt je ukázkou aplikace projektivní geometrie. Panorama je výsledkem projekce druhé fotografie do společné roviny obou snímků (rovina prvního snímku) s využitím homografie spočtené pomocí korespondujících bodů. Složený obrázek se jeví jako opticky přijatelný. Vylepšením stávajícího projektu by mohlo být zavedení bilineární interpolace při mapování druhého snímku (při zvětšování se díky konečnému rozlišení ztrácí kvalita fotografie). Dále by bylo vhodné maskovat ostrý přechod snímků, vzniklý rozdílnými expozičními podmínkami v době pořízení fotografií.