

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 1. termín, 5. 1. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(\sqrt{n^2 + 2n} - n)$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{e^x - \cos x - x^2 - x}$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{pro } x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f , pokud existují.

(b) Určete obor hodnot funkce f .

(c) Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?

(13 bodů)

Výsledky

1. $-\frac{1}{2}$ 2. -1 3. $-\frac{1}{2}$ 4. (a) body maxima: $\frac{\pi}{3} + 4k\pi, \frac{11\pi}{3} + 4k\pi$ body minima:
 $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi, \frac{7\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (b) $H(f) = \left\langle -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ (c) Neexistuje.