Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 2. termín, 11. 1. 2024

---

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right).$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}\cos x - 1 - \sin\frac{x}{2}}{x^2}.$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \arcsin(\cos(x^2)).$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f na intervalu $[0,2]$, pokud existují.

(b) Rozhodněte, zda je f konkávní na intervalu $(0,2)$.

(c) Spočtěte asymptotu funkce v $-\infty$.

(13 bodů)

PŘÍKLAD ČÍSLO 1

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$$

Položíme $f(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Počítejme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x}$$

(*) l'Hôpital typu $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$$

Použijeme Heineovu větu pro posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

- $\lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq \infty$.

Platí tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \underline{\underline{1}}$

PŘÍKLAD ČÍSLO 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}\cos x - 1 - \sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos x - \cos x - x - x\sin\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos x - e^x\sin x + \sin x - 1 - \sin\frac{x}{2} - x\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{3x^2}$$

$$\overset{(**)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos x - e^x\sin x - e^x\sin x - e^x\cos x + \cos x - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x\sin\frac{x}{2}}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x\sin x + \cos x - \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x\sin\frac{x}{2}}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-2e^x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{6} + \frac{\cos x - 1}{6x^2}\cdot x + \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{6\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x}{4} + \frac{1}{24}\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\overset{(***)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot\overset{(\square)}{\frac{1}{2}}\cdot 0 + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

(*), (**) ... l'Hôpital typu „$\frac{0}{0}$"

$$(***)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x + 1} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(\square)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(y) = \frac{1-\cos y}{y} & \lim\limits_{y\to 0} f(y) = \frac{1}{2} \\ g(x) = \frac{x}{2} & \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \\ \forall x \in P(0,1): g(x) \neq 0 & \end{array}\right\} \overset{\text{VLSF(P)}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \frac{1}{2}$$

PŘÍKLAD ČÍSLO 3

$f(x) = \arcsin(\cos(x^2))$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$ (*)

$\cos(x^2) = \pm 1 \iff x^2 = k\pi, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$x = \pm\sqrt{k\pi}, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x^2)}} \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x \, , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{k\pi}; \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$\underline{x = \sqrt{k\pi}, \; k \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{x \to \sqrt{k\pi}_-} f'(x) = \lim_{x \to \sqrt{k\pi}_-} - \frac{\sin(x^2)}{|\sin(x^2)|} \cdot 2x = \lim_{x \to \sqrt{k\pi}_-} -\operatorname{sgn}(\sin(x^2)) \cdot 2x$$

$$= \begin{cases} +2\sqrt{k\pi} & k \text{ sudé} \\ -2\sqrt{k\pi} & k \text{ liché} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(\sqrt{k\pi}) = \begin{cases} 2\sqrt{k\pi} & k \text{ sudé} \\ -2\sqrt{k\pi} & k \text{ liché} \end{cases} \quad \text{(věta o limitě derivace + (*))}$$

$$\text{Analogicky } f'_+(\sqrt{k\pi}) = \begin{cases} -2\sqrt{k\pi} & k \text{ sudé} \\ 2\sqrt{k\pi} & k \text{ liché} \end{cases}$$

$f'_+(\sqrt{k\pi}) \neq f'_-(\sqrt{k\pi})$

$\Rightarrow f'(\sqrt{k\pi})$ neexistuje

$\underline{x = -\sqrt{k\pi}, \; k \in \mathbb{N}}$

$$\text{Analogicky: } f'_-(-\sqrt{k\pi}) = \begin{cases} 2\sqrt{k\pi} & k \text{ sudé} \\ -2\sqrt{k\pi} & k \text{ liché} \end{cases}$$

$$f'_+(-\sqrt{k\pi}) = \begin{cases} -2\sqrt{k\pi} & k \text{ sudé} \\ 2\sqrt{k\pi} & k \text{ liché} \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(-\sqrt{k\pi})$ neexistuje

$\underline{x = 0}$

$$\text{analogicky: } \left.\begin{aligned} f'_+(0) &= 0 \\ f'_-(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(0) = 0$$

PŘÍKLAD ČÍSLO 4

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

- $\mathcal{D}(\sqrt[3]{\ }) = \mathbb{R}$; $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,

- $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ spojitá na $\mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$ $(*)$

(a) výpočet první derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} \cdot (4x - 3x^2)$$ pokud $2x^2 - x^3 \neq 0$
neboli $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (0, \frac{4}{3}) : f'(x) > 0 \\ \forall x \in (\frac{4}{3}, 2) : f'(x) < 0 \end{array}\right\} \overset{+(*)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f \text{ je rostoucí na } [0, \frac{4}{3}] \\ f \text{ je klesající na } [\frac{4}{3}, 2] \end{array}$$

$$f(0) = f(2) = 0$$

Z předchozího plyne: body maxima f na $[0, 2]$: $\frac{4}{3}$
body minima f na $[0, 2]$: $0, 2$

(b) výpočet druhé derivace

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^5}} \cdot (4x - 3x^2) \cdot (4x - 3x^2)$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} \cdot (4 - 6x)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^5}} \cdot \left(-2 \cdot (4x - 3x^2)^2 + 3(2x^2 - x^3)(4 - 6x)\right)$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$f''(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}} \cdot \left(-32x^2 + 48x^3 - 18x^4 + 24x^2 - 36x^3 - 12x^3 + 18x^4\right)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}} \cdot (-8x^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (0,2) : f''(x) < 0 \\ f' \text{ je spojitá na } (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ je (ryze) konkávní na } (0,2)$$

(c) výpočet směrnice asymptoty:

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-1) \cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(2x^2 - x^3) - (-x)^3}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2 + \sqrt[3]{2x^2-x^3} \cdot (-x) + (-x)^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2 - \sqrt[3]{2x^2-x^3} \cdot x + x^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1} = \frac{2}{1 - (-1) + 1} = \frac{2}{3}$$

<u>asymptota v $-\infty$</u>: $x \mapsto -x + \frac{2}{3}$