Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 5. termín, 13. 2. 2024

---

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+e^{2n})}{n^{3/2}} \cdot \cos n$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} + \frac{2\log\cos x}{x^2}}{x^2}$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\arcsin x}{x^2}, & x \in (-1,1)\setminus\{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(13 bodů)

4. Na intervalu $\langle -1, \infty)$ uvažujte funkci

$$f(x) = x\sqrt[3]{1+x^3}.$$

(a) Určete intervaly monotonie.

(b) Nalezněte všechny extrémy funkce f na $\langle -1, \infty)$.

(c) Nalezněte inflexní body funkce f v $\langle -1, \infty)$.

(13 bodů)

PŘÍKLAD ČÍSLO 1

$$a_n = \frac{\log(1+e^{2n})}{n^{3/2}} \qquad b_n = \cos n$$

$$(1) \quad \lim a_n = \lim \left(\frac{2n}{n^{3/2}} + \frac{\log(e^{-2n}+1)}{n^{3/2}} \right)$$

$$= \lim \left(2 \cdot n^{-1/2} + \frac{\log(e^{-2n}+1)}{n^{3/2}} \right) \underset{VAL}{\overset{(*)}{=}} 2 \cdot 0 + \frac{0}{\infty} = 0$$

5

$$(*) \left. \begin{array}{l} \lim (e^{-2n}+1) = 1 \\ \log \text{ je spojitý v } 1 \end{array} \right\} \overset{\text{složené}}{\Longrightarrow} \lim \log(e^{-2n}+1) = 0$$

(2) $\{b_n\}$ je omezená

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \lim a_n \cdot b_n = \underline{\underline{0}}$$

PŘÍKLAD ČÍSLO 2

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+\frac{2\log(\cos x)}{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2e^{x^2}+2\log(\cos x)}{x^4}$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}2x+2\frac{-\sin x}{\cos x}}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{xe^{x^2}+x^3e^{x^2}-\operatorname{tg}x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{xe^{x^2}-\operatorname{tg}x}{2x^3}\right)\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{xe^{x^2}-\operatorname{tg}x}{x^3}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot2x-\frac{1}{\cos^2x}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}e^{x^2}+\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{e^{x^2}\cdot\cos^2x-1}{3x^2}\right)\overset{(2)}{=}\frac{2}{3}+1\cdot0=\frac{2}{3}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}\cos^2x-1}{x^2}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}\cdot2x\cdot\cos^2x+e^{x^2}\cdot2\cos x\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=1-1=0$$

(*) l'Hôpital $\frac{0}{0}$

PŘÍKLAD ČÍSLO 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \arcsin x}{x^2}, & x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

derivace v $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)x^2 - (x - \arcsin x)2x}{x^4}$$

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$$

derivace v $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2}$$

$$\underset{VLS}{\overset{(**)}{=}} 1 \cdot \frac{-1}{6} = -\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

(*) ... l'Hôpital $\frac{0}{0}$

$$(**): \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = \frac{-1}{6}$$

BODOVÁNÍ

- derivace v $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ ... 3
- derivace v $x = 0$ 10

ÚLOHA ČÍSLO 4

$f(x) = x\sqrt[3]{1+x^3}$, $x \in \langle -1, \infty)$

(a) $f'(x) = \sqrt[3]{1+x^3} + x\,\frac{1}{3}(1+x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2$

$f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1+x^3+x^3) = (1+x^3)^{-\frac{2}{3}}(1+2x^3)$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, -2^{-1/3})$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-2^{-1/3}, \infty)$

f je spojitá na $\langle -1, \infty)$

$\Rightarrow$ f je klesající na $\langle -1, -2^{-1/3}\rangle$

f je rostoucí na $\langle -2^{-1/3}, \infty)$

(b) Z (a) plyne, že $-2^{-1/3}$ je bod minima f na $\langle -1, \infty)$. Platí $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, a proto f nemá na $\langle -1, \infty)$ bod maxima.

(c) $f''(x) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (1+x^3)^{-\frac{5}{3}} \cdot 3x^2 \cdot (1+2x^3) + (1+x^3)^{-\frac{2}{3}}\, 6x^2$

$= (1+x^3)^{-\frac{5}{3}} \left(-2x^2(1+2x^3) + (1+x^3)\,6x^2\right)$

$= (1+x^3)^{-\frac{5}{3}} (4x^2 + 2x^5) = (1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\, 2x^2 (2+x^3)$, $x \in (-1, \infty)$

$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0 \iff x \in (-1,\infty)\setminus\{0\} \\ f''(x) = 0 \iff x = 0 \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow}$ 0 není inflexní bod f

(*) $\{ g(x) = f(x) - x$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g'' = f''$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} g' > 0 \text{ na } (-1,0) \\ g' < 0 \text{ na } (0,1) \end{array}\right\}$ 0 je min g $\Rightarrow$

$[x, f(x)]$ je nad tečnou na $P(0,1)$

BODOVÁNÍ

(a) 4

(b) 3

(c) f'' ... 3

řešení $f''(x) = 0$ ... 1

závěr 2