Matematika 1

ZS 2023-24

Miroslav Zelený

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- seminář,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- seminář,
- společný seminář,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- seminář,
- společný seminář,
- konzultace.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- seminář,
- společný seminář,
- konzultace.

Podmínky

- udělení zápočtu,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- seminář,
- společný seminář,
- konzultace.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

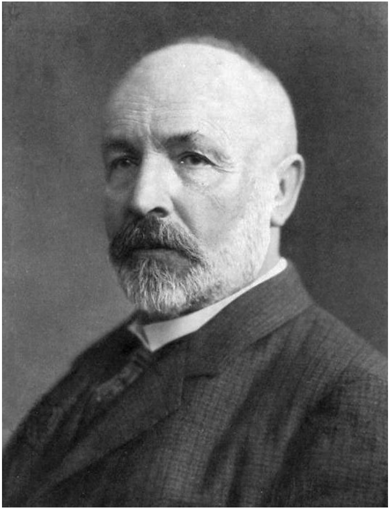
1. Množiny, výroky a číselné obory
2. Posloupnosti reálných čísel
3. Funkce jedné reálné proměnné

1. Množiny, výroky a číselné obory

Množiny a množinové operace

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku.

Georg Cantor (1845–1918)



Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.

Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$. Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**. Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic ;

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1

Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ i } B.$$

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ nebo } B.$$

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

Definice

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným** (**velkým**) **kvantifikátorem**.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním** (**malým**) **kvantifikátorem**.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
III. Axiom infima.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M. Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M. Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**. Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme **infimum** M.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M: \; x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. Značíme ho symbolem $\sup M$.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M: \; x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. Značíme ho symbolem $\sup M$.

Věta 1.2

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M (značíme $\max M$), jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M, který značíme $\min M$.

Věta 1.3

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje ***celá část čísla*** *r, tj. číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. (Celou část čísla r značíme $[r]$).*

Věta 1.3

*Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje **celá část čísla** r, tj. číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. (Celou část čísla r značíme $[r]$).*

Věta 1.4

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že platí $x < n$.

Věta 1.5

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbf{N}$ *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.5

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbf{N}$ *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.6

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $r \in \mathbf{Q}$ *takové, že* $a < r < b$.

Kurt Gödel (1906–1978)

2. Posloupnosti reálných čísel

2.1 Úvod

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných čísel.

2.1 Úvod

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných čísel. Číslo a_n nazveme **n-tým členem** této posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

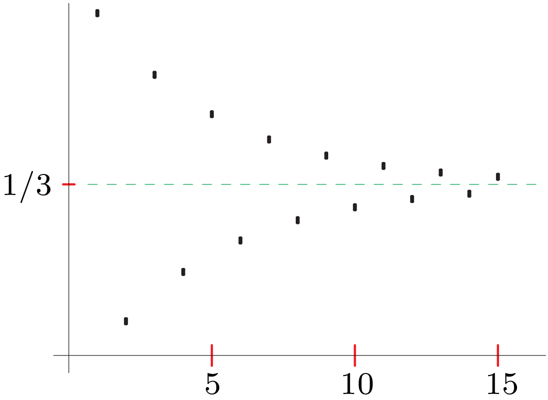
Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

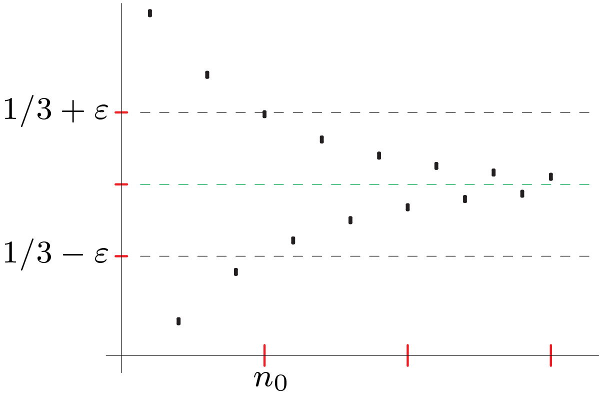
2.2 Konvergence posloupnosti

Definice

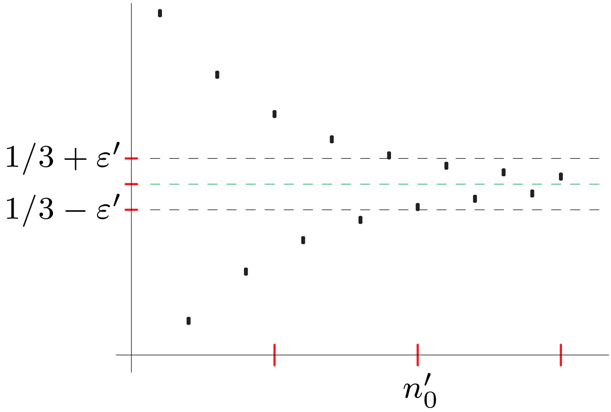
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$


1/3
5
10
15



$1/3 + \varepsilon$
$1/3 - \varepsilon$
n_0


$1/3+\varepsilon'$
$1/3-\varepsilon'$
n'_0

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnou reálnému číslu A. Pak značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Věta 2.2

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$. *Potom* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N},\, n \geq n_0 :\; a_n \geq L.$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \colon a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq K.$$

Věta 2.8 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.8 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A / B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.9

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n / b_n = +\infty$.

Věta 2.10

Každá monotónní posloupnost má limitu.

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.10

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.11 (Bolzano–Weierstrass)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

K důkazu Věty 2.11

(i) Interval $\langle c_k, d_k \rangle$ je roven intervalu $\langle c_{k-1}, c_{k-1} + \frac{1}{2}(d_{k-1} - c_{k-1}) \rangle$ nebo intervalu $\langle c_{k-1} + \frac{1}{2}(d_{k-1} - c_{k-1}), d_{k-1} \rangle$.

(ii) Množina $\{j \in \mathbf{N};\ a_j \in \langle c_k, d_k \rangle\}$ je nekonečná.

3. Funkce jedné reálné proměnné

3.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

3.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

3.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon \, f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,

Definice
Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P(c, \delta)\colon\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice
Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,

Definice
Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice
Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu c** jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu c** jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P(c, \delta)\colon\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^{-}(+\infty, \varepsilon) = B^{-}(+\infty, \varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Věta 3.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Označení

Pro limitu funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Pro limitu funkce f v bodě c zleva, resp. zprava, užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 3.2

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^{\star}$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = A+B$, *pokud je výraz* $A+B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.4

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = +\infty$.

Věta 3.5 (limita a uspořádání)

Mějme $c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť*

$$\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta): \; f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \to c} f(x) \le \lim_{x \to c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$*,* $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$*,* $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$*,*

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{y \to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c, \eta): \; g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$*,* $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\; \forall x \in P(c,\eta) : \; g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$*.*

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 3.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$*,* $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c, \eta):\ g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 3.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ *a pro funkci* f *platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$*. Jestliže posloupnost* $\{x_n\}$ *splňuje* $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$*, pak platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$*.*

Věta 3.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ a pro funkci f platí $\lim_{x \to c} f(x) = A$. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, pak platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Věta 3.8

Nechť f je monotónní funkce na (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^\star$. Potom existují $\lim_{x \to a+} f(x)$ a $\lim_{x \to b-} f(x)$.

Věta 3.9 (Bolzano)

Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Bernard Bolzano (1781-1848)

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R}\colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} \colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} \colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 3.11

Nechť J *je nedegenerovaný interval a* $f \colon J \to \mathbf{R}$ *je spojitá funkce na* J*. Potom je* $f(J)$ *interval.*

Věta 3.12

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom je f na $\langle a, b \rangle$ omezená shora i zdola.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M \colon f(y) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \forall y \in M \colon f(y) \geq f(x)\text{)}.$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon\ f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon\ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Věta 3.13

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 3.13

Nechť f *je spojitá funkce na intervalu* $\langle a, b \rangle$. *Potom funkce* f *nabývá na* $\langle a, b \rangle$ *své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \geq f(x)$,

Věta 3.14

Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Věta 3.15 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji $\log$ *a nazýváme ji* ***přirozeným logaritmem****), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* $\log$ *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon \ \log xy = \log x + \log y$*,*

(L3) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$*.*

3.4 Zavedení elementárních funkcí

Věta 3.15 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji $\log$ *a nazýváme ji* ***přirozeným logaritmem****), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* $\log$ *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y$*,*

(L3) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$*.*

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Věta 3.16 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce **sinus** *(budeme ji značit* $\sin$*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D(\sin) = \mathbf{R}$,

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $\langle -\pi/2,\ \pi/2\rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbf{R}:\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice

Funkci **kosinus** značíme $\cos$ a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

A konečně symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

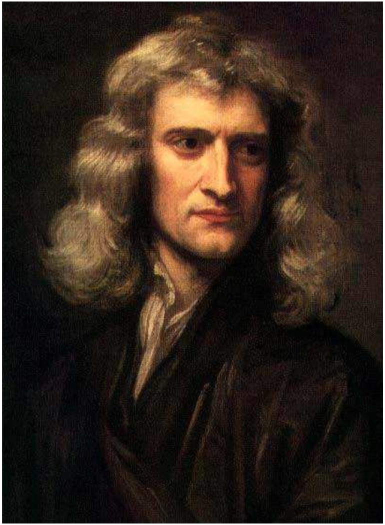
A konečně symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Věta 3.17

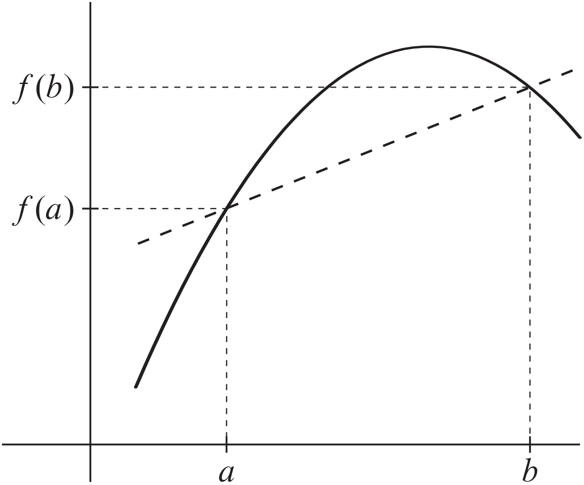
Funkce $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg, cotg, $\arcsin$, $\arccos$, arctg *a* $\operatorname{arccotg}$ *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Isaac Newton (1643-1727)

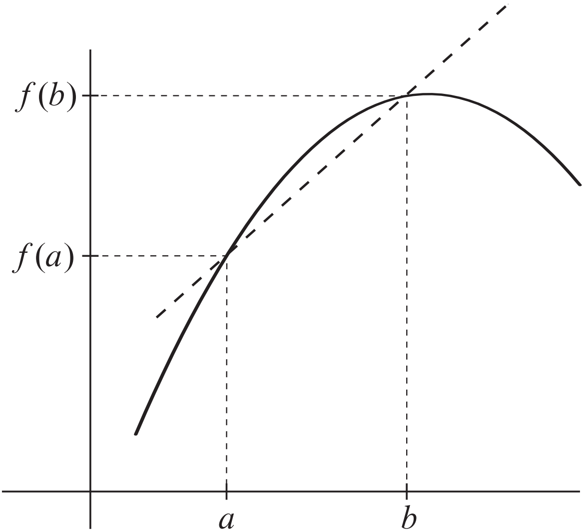


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

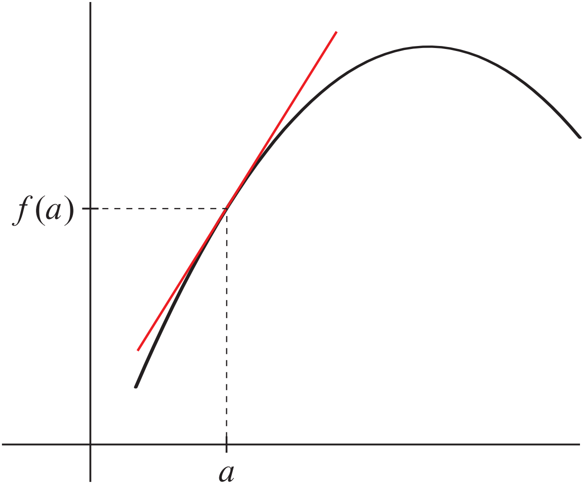
Geometrický význam derivace



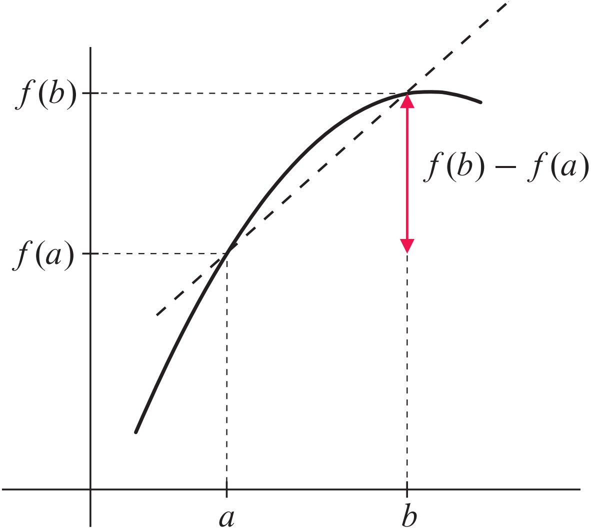
Geometrický význam derivace



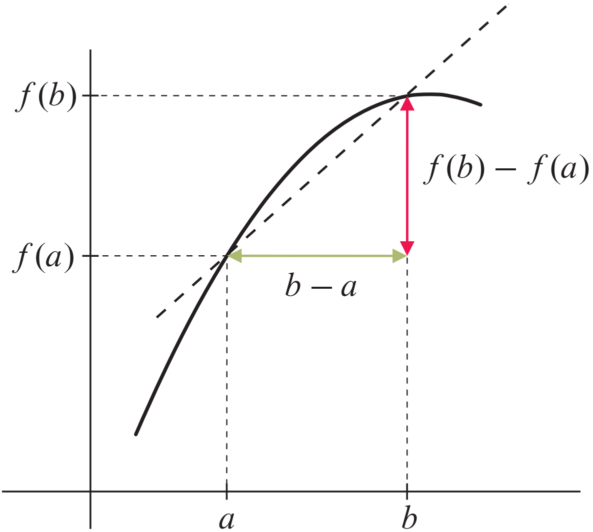
Geometrický význam derivace



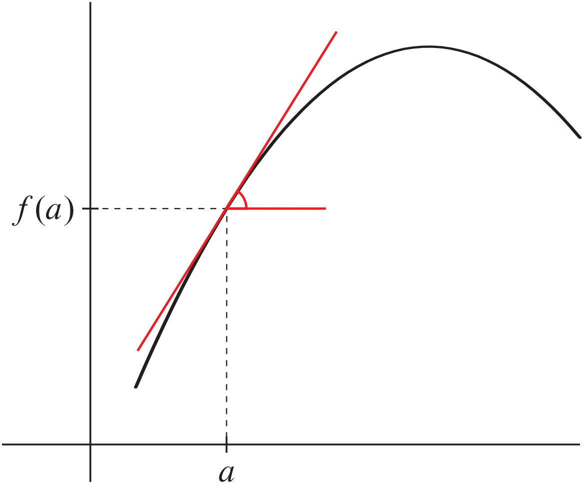
Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



3.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

3.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

3.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zleva** budeme rozumět

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.20 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 3.20 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 3.21 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Jestliže existuje* $f'(x_0)$, *potom je* $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f*. Jestliže existuje* $f'(x_0)$*, potom je* $f'(x_0) = 0$*.*

Věta 3.23 (Rolle)

Nechť funkce f *má následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b \rangle$*,*

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.23 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.23 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Jestliže existuje* $f'(x_0)$, *potom je* $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.23 (Rolle)

Nechť funkce f *má následující vlastnosti:*

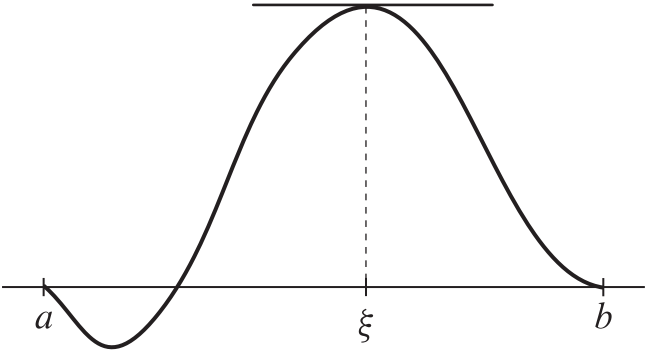
(i) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$,

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b),

(iii) *platí, že* $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí* $f'(\xi) = 0$.

Geometrický význam Rolleovy věty

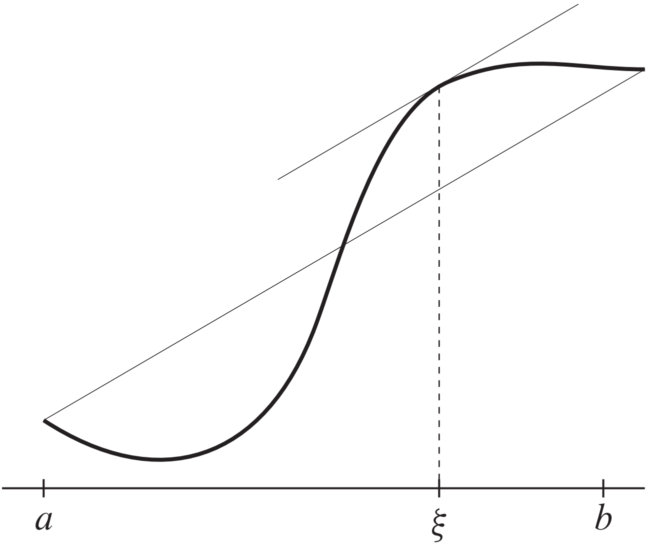


Věta 3.24 (Lagrange)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty



Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je klesající na* J*.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 3.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 3.26 (l'Hôpitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 3.26 (l'Hôpitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 3.27

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 3.27

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

3.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 3.28 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 3.28 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 3.29 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:

- $\forall x \in (a, z)\colon f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)\colon f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle\colon\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle\colon\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2\, \forall \lambda \in (0, 1)\colon\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-$$

Lemma 3.30

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 3.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

Věta 3.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

Věta 3.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

Věta 3.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

3.7 Průběh funkce

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \qquad \text{(resp.} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

3.7 Průběh funkce

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b) = 0, \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0).$$

Věta 3.32

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v "krajních bodech" definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce.