

# 1 Množiny, výroky a číselné obory

## 1.1 Množiny a množinové operace

**Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku.

**Definice.** Dvě množiny jsou si **rovné** ( $A = B$ ), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina  $A$  je **částí množiny**  $B$  (nebo  $A$  je **podmnožinou**  $B$ ), jestliže každý prvek množiny  $A$  je rovněž prvkem množiny  $B$ . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme  $A \subset B$ . **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem  $\emptyset$ .

**Definice.** **Sjednocením** množin  $A$  a  $B$  nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin  $A$  či  $B$ . Sjednocení množin  $A$  a  $B$  značíme symbolem  $A \cup B$ . Je-li  $\mathcal{A}$  systém množin, pak jeho **sjednocení**  $\bigcup \mathcal{A}$  definujeme jako množinu všech prvků  $a$ , pro které existuje  $A \in \mathcal{A}$  takové, že  $a \in A$ .

**Definice.** **Průnikem** dvou množin  $A$  a  $B$  nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do  $A$  i do  $B$ . Průnik množin  $A$  a  $B$  značíme symbolem  $A \cap B$ . Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**. Je-li  $\mathcal{A}$  neprázdný systém množin, pak jeho **průnik**  $\bigcap \mathcal{A}$  definujeme jako množinu všech prvků  $a$ , které pro každé  $A \in \mathcal{A}$  splňují  $a \in A$ .

**Definice.** **Rozdílem množin**  $A$  a  $B$  (značíme  $A \setminus B$ ) nazveme množinu prvků, které patří do množiny  $A$  a nepatří do množiny  $B$ . **Kartézským součinem** množin  $A_1, \dots, A_n$  nazveme množinu všech uspořádaných  $n$ -tic ;

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

**Věta 1.1.** *Necht'  $X$  je množina a  $\mathcal{A}$  je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

## 1.2 Výrokový a predikátový počet

**Výrokem** nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

**Definice.** **Negací**  $\neg A$  výroku  $A$  rozumíme výrok:

*Není pravda, že platí  $A$ .*

$A$	$\neg A$
0	1
1	0

**Definice.** **Konjunkcí**  $A \wedge B$  výroků  $A$  a  $B$  nazveme výrok:

*Platí  $A$  i  $B$ .*

**Definice.** **Disjunkcí**  $A \vee B$  výroků  $A$  a  $B$  nazveme výrok:

*Platí  $A$  nebo  $B$ .*

**Definice.** **Implikací**  $A \Rightarrow B$  nazýváme výrok:

*Jestliže platí výrok  $A$ , potom platí výrok  $B$ .*

Výroku  $A$  v implikaci se říká **premise**, výrok  $B$  se nazývá **závěr**. Výrok  $A$  je **postačující podmínkou** pro platnost  $B$  a  $B$  je **nutnou podmínkou** pro platnost  $A$ .

**Definice.** Ekvivalencí  $A \Leftrightarrow B$  nazýváme výrok:

*Výrok  $A$  platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok  $B$ .*

(Platnost výroku)  $A$  je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku)  $B$ .

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

**Definice.** Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků  $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$  z daných množin  $M_1, \dots, M_m$ .

————— Konec 1. přednášky, 2. 10. 2023 —————

**Definice.** Necht'  $A(x), x \in M$ , je výroková forma. Výrok

*Pro všechna  $x \in M$  platí  $A(x)$ .*

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M: A(x).$$

Symbol  $\forall$  nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

**Definice.** Necht'  $A(x), x \in M$ , je výroková forma. Výrok

*Existuje  $x \in M$ , pro které platí  $A(x)$ .*

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M: A(x).$$

Symbol  $\exists$  nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

### 1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel  $\mathbf{R}$  budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ( $\leq$ ), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
- III. Axiom infima.

**Definice.** Řekneme, že množina  $M \subset \mathbf{R}$  je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo  $a \in \mathbf{R}$  takové, že pro každé  $x \in M$  platí  $x \geq a$ . Takové číslo  $a$  se nazývá **dolní závorou** množiny  $M$ . Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**. Řekneme, že množina  $M \subset \mathbf{R}$  je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

**Axiom infima:** Budiž  $M$  neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo  $g \in \mathbf{R}$ , které má následující vlastnosti:

- (i)  $\forall x \in M: x \geq g$ ,
- (ii)  $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g \exists x \in M: x < g'$ .

Číslo  $g$  značíme symbolem  $\inf M$  a čteme **infimum**  $M$ .

**Definice.** Budiž  $M \subset \mathbf{R}$ . Číslo  $G \in \mathbf{R}$  splňující

- (i)  $\forall x \in M: x \leq G$ ,
- (ii)  $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \exists x \in M: x > G'$ ,

nazýváme **supremem** množiny  $M$ . Značíme ho symbolem  $\sup M$ .

**Věta 1.2.** *Necht'  $M \subset \mathbf{R}$  je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny  $M$ .*

————— Konec 2. přednášky, 9. 10. 2023 —————

**Definice.** Budiž  $M \subset \mathbf{R}$ . Řekneme, že  $a$  je **největší prvek (maximum)** množiny  $M$  (značíme  $\max M$ ), jestliže  $a \in M$  a  $a$  je horní závorou množiny  $M$ . Analogicky definujeme **nejmenší prvek (minimum)**  $M$ , který značíme  $\min M$ .

**Věta 1.3.** *Pro každé  $r \in \mathbf{R}$  existuje celá část čísla  $r$ , tj. číslo  $k \in \mathbf{Z}$  takové, že  $k \leq r < k + 1$ . (Celou část čísla  $r$  značíme  $[r]$ ).*

**Věta 1.4.** *Ke každému  $x \in \mathbf{R}$  existuje  $n \in \mathbf{N}$  takové, že platí  $x < n$ .*

**Věta 1.5.** *Ke každému  $x \in \langle 0, +\infty \rangle$  a ke každému  $n \in \mathbf{N}$  existuje právě jedno  $y \in \mathbf{R}, y \geq 0$ , splňující  $y^n = x$ .*

**Věta 1.6.** *Necht'  $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ . Pak existuje  $r \in \mathbf{Q}$  takové, že  $a < r < b$ .*

————— Konec 3. přednášky, 13. 10. 2023 —————

## 2 Posloupnosti reálných čísel

### 2.1 Úvod

**Definice.** Jestliže každému přirozenému číslu  $n$  je přiřazeno reálné číslo  $a_n$ , potom říkáme, že  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je **posloupnost** reálných čísel. Číslo  $a_n$  nazveme  **$n$ -tým členem** této posloupnosti. Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je rovna posloupnosti  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jestliže platí  $a_n = b_n$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ .

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- **neklesající**, je-li  $a_n \leq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **rostoucí**, je-li  $a_n < a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **nerostoucí**, je-li  $a_n \geq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **klesající**, je-li  $a_n > a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ .

Posloupnost  $\{a_n\}$  je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost  $\{a_n\}$  je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

## 2.2 Konvergence posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má **limitu** rovnou reálnému číslu  $A$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

**Věta 2.1** (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu rovnou reálnému číslu  $A$ . Pak značíme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  nebo jenom  $\lim a_n = A$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je **konvergentní**, pokud existuje  $A \in \mathbf{R}$  takové, že  $\lim a_n = A$ .

————— Konec 4. přednášky, 16. 10. 2023 —————

**Věta 2.2.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel. Jestliže  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  se nazývá **vybranou posloupností z**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Věta 2.3.** *Necht'  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je vybraná posloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ . Potom  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ .*

**Věta 2.4** (aritmetika limit). *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$ . Potom platí:*

- (i)  $\lim (a_n + b_n) = A + B$ ,
- (ii)  $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ ,
- (iii) *je-li  $B \neq 0$  a  $b_n \neq 0$  pro všechna  $n \in \mathbf{N}$ , je  $\lim(a_n/b_n) = A/B$ .*

————— Konec 5. přednášky, 20. 10. 2023 —————

**Věta 2.5.** *Necht'  $\lim a_n = 0$  a necht' posloupnost  $\{b_n\}$  je omezená. Potom  $\lim a_n b_n = 0$ .*

**Věta 2.6** (limita a uspořádání). *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$ .*

- (i) *Necht' existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n \geq b_n$ . Potom  $A \geq B$ .*
- (ii) *Necht'  $A < B$ . Potom existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n < b_n$ .*

**Věta 2.7** (o dvou strážnících). *Bud'te  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  dvě konvergentní posloupnosti a  $\{c_n\}$  taková posloupnost, že platí:*

- (i)  $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n \leq c_n \leq b_n$ ,
- (ii)  $\lim a_n = \lim b_n$ .

*Potom existuje  $\lim c_n$  a platí  $\lim c_n = \lim a_n$ .*

————— Konec 6. přednášky, 23. 10. 2023 —————

### 2.3 Nevlastní limita posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $+\infty$ , jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $-\infty$ , jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n \leq K.$$

**Věta 2.8** (aritmetika limit podruhé). *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$ . Potom platí:*

- (i)  $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$ , *pokud je pravá strana definována,*
- (ii)  $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ , *pokud je pravá strana definována,*
- (iii)  $\lim a_n/b_n = A/B$ , *pokud je pravá strana definována.*

**Věta 2.9.** *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ ,  $A > 0$ ,  $\lim b_n = 0$  a existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$ , že pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0$ , platí  $b_n > 0$ . Pak  $\lim a_n/b_n = +\infty$ .*

————— Konec 7. přednášky, 30. 10. 2023 —————

### 2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

**Věta 2.10.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

**Věta 2.11** (Bolzano–Weierstrass). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

————— Konec 8. přednášky, 3. 11. 2023 —————

### 3 Funkce jedné reálné proměnné

#### 3.1 Základní pojmy

**Definice.** Funkce  $f$  jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $M$  je podmnožinou množiny reálných čísel.

**Definice.** Funkce  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je **rostoucí** na intervalu  $J$ , jestliže pro každou dvojici  $x_1, x_2 \in J$ ,  $x_1 < x_2$ , platí nerovnost  $f(x_1) < f(x_2)$ . Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu  $J$ .

**Definice.** **Monotónní funkci** (resp. **ryze monotónní funkci**) na intervalu  $J$  rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na  $J$ .

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce a  $M \subset D_f$ . Řekneme, že funkce  $f$  je

- **lichá**, jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(-x) = -f(x)$ ,
- **sudá**, jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(-x) = f(x)$ ,
- **periodická s periodou**  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ , jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $x + a \in D_f$ ,  $x - a \in D_f$  a  $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$ ,
- **shora omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \leq K$ ,
- **zdola omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \geq K$ ,
- **omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $|f(x)| \leq K$ ,
- **konstantní** na  $M$ , jestliže pro všechna  $x, y \in M$  platí  $f(x) = f(y)$ .

#### 3.2 Limita funkce

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$  a  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- **okolí bodu**  $c$  jako  $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ,
- **prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$ ,

Okolí a prstencové okolí bodu  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

**Definice.** Řekneme, že číslo  $A \in \mathbf{R}^*$  je **limitou funkce**  $f$  v **bodě**  $c \in \mathbf{R}^*$ , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ .

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- **pravé okolí bodu**  $c$  jako  $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon \rangle$ ,
- **levé okolí bodu**  $c$  jako  $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$ ,
- **pravé prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$ ,
- **levé prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$ .

**Definice.** Dále definujeme

- **levé okolí bodu**  $+\infty$  jako  $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$ ,
- **pravé okolí bodu**  $-\infty$  jako  $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$ ,
- **levé prstencové okolí bodu**  $+\infty$  jako  $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$ ,
- **pravé prstencové okolí bodu**  $-\infty$  jako  $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$ .

**Definice.** Necht'  $A \in \mathbf{R}^*$ ,  $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $c$  **limitu zprava** rovnou  $A$ , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě  $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ .

**Věta 3.1.** Funkce  $f$  má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

**Označení.** Pro limitu funkce  $f$  v bodě  $c$  užíváme symbol  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ . Pro limitu funkce  $f$  v bodě  $c$  zleva, resp. zprava, užíváme symbol  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ .

————— Konec 9. přednášky, 6. 11. 2023 —————

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě**  $c$ , jestliže  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je v bodě  $c$  **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$ ).

**Definice.** Necht'  $J \subset \mathbf{R}$  je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je **spojitá na intervalu**  $J$ , jestliže platí:

- $f$  je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ ,
- $f$  je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ ,
- $f$  je spojitá v každém vnitřním bodě  $J$ .

**Věta 3.2.** Necht' funkce  $f$  má vlastní limitu v bodě  $c \in \mathbf{R}^*$ . Pak existuje  $\delta > 0$ , že  $f$  je na  $P(c, \delta)$  omezená.

**Věta 3.3** (aritmetika limit). Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$ . Potom platí:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$ , pokud je výraz  $A + B$  definován,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$ , pokud je výraz  $AB$  definován,
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$ , pokud je výraz  $A/B$  definován.

**Věta 3.4.** Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$  a  $A > 0$ . Jestliže existuje  $\eta > 0$  takové, že funkce  $g$  je kladná na  $P(c, \eta)$ , pak  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = +\infty$ .

————— Konec 10. přednášky, 10. 11. 2023 —————

**Věta 3.5** (limita a uspořádání). Mějme  $c \in \mathbf{R}^*$ .

(i) Necht'

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí  $P(c, \delta)$  takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(ii) Necht' existuje prstencové okolí  $P(c, \delta)$  takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x).$$

Necht' existují  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ . Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Necht' na nějakém prstencovém okolí  $P(c, \delta)$  platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ . Potom existuje rovněž  $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$  a všechny tři limity jsou si rovny.

**Věta 3.6.** Necht'  $c, D, A \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ ,  $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$  a je splněna alespoň jedna z podmínek

(P)  $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq D$ ,

(S)  $f$  je spojitá v  $D$ .

Potom  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$ .

————— Konec 11. přednášky, 13. 11. 2023 —————

**Věta 3.7 (Heine).** Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ ,  $A \in \mathbf{R}^*$  a pro funkci  $f$  platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ . Jestliže posloupnost  $\{x_n\}$  splňuje  $x_n \in D_f$ ,  $x_n \neq c$  pro všechna  $n \in \mathbf{N}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , pak platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Věta 3.8.** Necht'  $f$  je monotónní funkce na  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbf{R}^*$ . Potom existují  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ .

### 3.3 Funkce spojitá na intervalu

**Věta 3.9 (Bolzano).** Budiž funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a předpokládejme, že  $f(a) < f(b)$ . Potom pro každé  $C \in (f(a), f(b))$  existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí  $f(\xi) = C$ .

**Lemma 3.10.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}$  a platí

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R}: x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak  $M$  je interval.

**Věta 3.11.** Necht'  $J$  je nedegenerovaný interval a  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá funkce na  $J$ . Potom je  $f(J)$  interval.

**Věta 3.12.** Necht'  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom je  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  omezená shora i zdola.

**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}$ ,  $x \in M$  a funkce  $f$  je definována alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset D_f$ ). Řekneme, že  $f$  nabývá v bodě  $x$  **maxima** (resp. **minima**) na  $M$ , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod  $x$  pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce  $f$  na množině  $M$ . Symbol  $\max_M f$  (resp.  $\min_M f$ ) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce  $f$  na množině  $M$  nabývá (pokud taková hodnota existuje).

————— Konec 12. přednášky, 20. 11. 2023 —————

**Věta 3.13.** Necht'  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom funkce  $f$  nabývá na  $\langle a, b \rangle$  své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).



**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}$ ,  $x \in M$  a funkce  $f$  je definována alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset D_f$ ). Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x$

- **lokální maximum vzhledem k  $M$** , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $y \in P(x, \delta) \cap M$ :  $f(y) \leq f(x)$ ,
- **lokální minimum vzhledem k  $M$** , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $y \in P(x, \delta) \cap M$ :  $f(y) \geq f(x)$ ,

**Věta 3.14.** Budiž  $f$  spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu  $J$ . Potom funkce  $f^{-1}$  je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu  $f(J)$ .

### 3.4 Zavedení elementárních funkcí

**Věta 3.15** (zavedení logaritmu). Existuje jediná funkce (značíme ji  $\log$  a nazýváme ji **přirozeným logaritmem**), která má tyto vlastnosti:

(L1)  $D(\log) = (0, +\infty)$  a na tomto intervalu je  $\log$  rostoucí,

(L2)  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ :  $\log xy = \log x + \log y$ ,

(L3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ .

————— Konec 13. přednášky, 24. 11. 2023 —————

**Definice.** **Exponenciální funkcí** budeme rozumět funkci inverzní k funkci  $\log$ . Budeme ji značit symbolem  $\exp$ .

**Definice.** Necht'  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ . **Obecnou mocninu  $a^b$**  definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

**Věta 3.16** (zavedení funkce sinus a čísla  $\pi$ ). Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit  $\pi$ ) a jediná funkce **sinus** (budeme ji značit  $\sin$ ), které mají následující vlastnosti:

(S1)  $D(\sin) = \mathbf{R}$ ,

(S2)  $\sin$  je rostoucí na  $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ ,

(S3)  $\sin 0 = 0$ ,

(S4)  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ :  $\sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$ ,

(S5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Definice.** Funkci **kosinus** značíme  $\cos$  a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Funkci **tangens** značíme  $\operatorname{tg}$  a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné  $x$ , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}.$$

A konečně symbolem  $\operatorname{cotg}$  budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině  $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$  předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

————— Konec 14. přednášky, 27. 11. 2023 —————

**Věta 3.17.** Funkce  $\log$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ ,  $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arctg}$  a  $\operatorname{arccotg}$  jsou spojitě na svých definičních oborech.

### 3.5 Derivace funkce

**Definice.** Necht'  $f$  je reálná funkce a  $a \in \mathbf{R}$ . Pak

- **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$**  budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva** budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

**Věta 3.18.** Necht' funkce  $f$  má v bodě  $a \in \mathbf{R}$  vlastní derivaci. Potom je funkce  $f$  v bodě  $a$  spojitá.

————— Konec 15. přednášky, 1. 12. 2023 —————

**Věta 3.19** (aritmetika derivací). Předpokládejme, že funkce  $f$  a  $g$  mají v bodě  $a \in \mathbf{R}$  vlastní derivace. Potom platí

(i)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,

(ii)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ,

(iii) je-li  $g(a) \neq 0$ , pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

**Věta 3.20** (derivace složené funkce). Necht' funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $y_0 \in \mathbf{R}$ , funkce  $g$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbf{R}$  a  $y_0 = g(x_0)$ . Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

**Věta 3.21** (derivace inverzní funkce). Necht' funkce  $f$  je na intervalu  $(a, b)$  spojitá a rostoucí (resp. klesající). Necht' funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in (a, b)$  derivaci  $f'(x_0)$  vlastní a různou od nuly. Potom má funkce  $f^{-1}$  derivaci v bodě  $y_0 = f(x_0)$  a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

————— Konec 16. přednášky, 4. 12. 2023 —————

**Věta 3.22** (nutná podmínka lokálního extrému). Budiž  $x_0 \in \mathbf{R}$  bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce  $f$ . Jestliže existuje  $f'(x_0)$ , potom je  $f'(x_0) = 0$ .

**Věta 3.23 (Rolle).** *Nechť funkce  $f$  má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu  $(a, b)$ ,*
- (iii) *platí, že  $f(a) = f(b)$ .*

*Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí  $f'(\xi) = 0$ .*

**Věta 3.24 (Lagrange).** *Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu  $(a, b)$ . Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

————— Konec 17. přednášky, 8. 12. 2023 —————

**Věta 3.25** (vztah znaménka derivace a monotonie funkce). *Nechť  $J \subset \mathbf{R}$  je nedegenerovaný interval. Nechť  $f$  je spojitá na  $J$  a v každém vnitřním bodě  $J$  (množinu vnitřních bodů intervalu  $J$  označme jako  $\text{int } J$ ) má derivaci.*

- (i) *Je-li  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je rostoucí na  $J$ .*
- (ii) *Je-li  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je klesající na  $J$ .*
- (iii) *Je-li  $f'(x) \geq 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je neklesající na  $J$ .*
- (iv) *Je-li  $f'(x) \leq 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je nerostoucí na  $J$ .*

**Věta 3.26** (l'Hôpitalovo pravidlo). (i) *Nechť  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ ,  $f$  a  $g$  mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu  $a$  vlastní derivaci a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$ ,  $f$  a  $g$  mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu  $a$  vlastní derivaci a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Věta 3.27.** *Nechť  $f$  je spojitá zprava v bodě  $a \in \mathbf{R}$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ . Potom existuje  $f'_+(a)$  a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

**Definice.** *Nechť  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  a  $f$  má vlastní  $n$ -tou derivaci na okolí bodu  $a$ . Pak  $(n + 1)$ -ní derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  budeme rozumět*

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

### 3.6 Konvexní a konkávní funkce

**Definice.** Necht'  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbf{R}$ . Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  **leží pod tečnou**  $T_a$ , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  **leží nad tečnou**  $T_a$ .

**Definice.** Necht'  $f'(a) \in \mathbf{R}$ . Řekneme, že  $a$  je **inflexním bodem** funkce  $f$ , jestliže existuje  $\Delta > 0$  takové, že platí

- (i)  $\forall x \in (a - \Delta, a): [x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ ,
- (ii)  $\forall x \in (a, a + \Delta): [x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$

nebo

- (i)  $\forall x \in (a - \Delta, a): [x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ ,
- (ii)  $\forall x \in (a, a + \Delta): [x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ .

**Věta 3.28** (nutná podmínka pro inflexi). *Necht'  $a \in \mathbf{R}$  je inflexní bod funkce  $f$ . Potom  $f''(a)$  neexistuje nebo je rovna nule.*

————— Konec 18. přednášky, 11. 12. 2023 —————

**Věta 3.29** (postačující podmínka pro inflexi). *Necht' funkce  $f$  má spojitou první derivaci na intervalu  $(a, b)$  a  $z \in (a, b)$ . Necht' platí:*

- $\forall x \in (a, z): f''(x) > 0$ ,
- $\forall x \in (z, b): f''(x) < 0$ .

*Potom  $z$  je inflexním bodem funkce  $f$ .*

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  je **konvexní na intervalu**  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  je **ryze konvexní na intervalu**  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**Lemma 3.30.** *Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

**Věta 3.31.** *Necht'  $f$  má na intervalu  $(a, b)$ ,  $a < b$ , spojitou první derivaci.*

- (i) *Jestliže  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je ryze konvexní na  $(a, b)$ .*
- (ii) *Jestliže  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je ryze konkávní na  $(a, b)$ .*
- (iii) *Jestliže  $f''(x) \geq 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je konvexní na  $(a, b)$ .*
- (iv) *Jestliže  $f''(x) \leq 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je konkávní na  $(a, b)$ .*

### 3.7 Průběh funkce

**Definice.** Řekneme, že funkce  $x \mapsto ax + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , je **asymptotou funkce**  $f$  v  $+\infty$  (resp. v  $-\infty$ ), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

**Věta 3.32.** Funkce  $f$  má v  $+\infty$  asymptotu  $x \mapsto ax + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , právě když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

#### Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu.
4. Dopočítáme limity v “krajních bodech” definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce  $f$  je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce.