3. Výroková a predikátová logika, zobrazení

1. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky vždy pravdivé.

- $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

2. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Zkoumejte platnost následujících výroků.

$$\forall x \in M\ \exists y \in M \colon W(x,y)$$
$$\forall y \in M\ \exists x \in M \colon W(x,y)$$
$$\exists x \in M\ \forall y \in M \colon W(x,y)$$
$$\exists y \in M\ \forall x \in M \colon W(x,y)$$

3. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace pomocí postupu z přednášky.

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R}\ \forall z \in \mathbf{R} \colon (z > y \Rightarrow z > x)$$
$$\forall a \in \mathbf{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R} \colon (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$$
$$\exists a \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathbf{R} \colon (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$$

4. Nechť $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$ a f^{-1}.

5. Nechť $f \colon X \to Y$ a $A \subset X$, $B \subset X$. Dokažte, že platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

6. Nechť $f \colon X \to Y$ a $A \subset Y$, $B \subset Y$. Dokažte následující rovnosti.

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

7. Nechť $f \colon X \to Y$ a $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

8. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení. Dokažte následující tvrzení.

- Zobrazení f je prosté právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ nejvýše jedno řešení.
- Zobrazení f je „na“ právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ alespoň jedno řešení
- Zobrazení f je bijekce právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ právě jedno řešení.

9. Nechť $f\colon A \to C$ a $g\colon A \to B$ splňují $g(A) = B$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci zobrazení $h\colon B \to C$ splňujícího $f = h \circ g$.

10. Dokažte následující tvrzení.

(a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
(b) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
(c) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
(d) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.