Derivace funkce

1. Nalezněte $A,\ B \in \mathbf{R}$ tak, aby na $\mathbf{R}$ platil vztah

$$\Big(A+x-\operatorname{arctg} x+\big(\tfrac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}x\big)\,\big(\log(1+x^2)-1\big)\Big)' = (Ax+B)(\operatorname{arctg} x)\log(1+x^2).$$

2. Najděte $A \in \mathbf{R}$, aby na pro každé $x \in (0,+\infty)$ platil vztah

$$\Big(\log\big(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\big)+\operatorname{arctg} x+\arcsin\big(\tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big)\Big)' = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná).

3. $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ **4.** $x^2\exp(-|x-1|)$ **5.** $\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$

Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

6. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$

7. $f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}$

8. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$ **9.** $f(x) = \arccos\frac{1}{1+x^2}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$

11. $f(x) = x^{(x^x)}$ pro $x > 0$

12. $f(x) = \max\{x+4\operatorname{arctg}(\sin x), x\}$

Některé výsledky a návody

7. Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\,\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbf{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned}
f'_+(\pi/3+2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_-(\pi/3+2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0,\\
f'_+(2\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_-(2\pi/3+2k\pi) &= -\sin(2\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_+(4\pi/3+2k\pi) &= -\sin(4\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2,\\
f'_-(4\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_+(5\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_-(5\pi/3+2k\pi) &= -\sin(5\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k\ \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

8. Zřejmě $\mathcal{D}(f)=\mathbf{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x>0$. Vzhledem k tomu, že $1-e^{-x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, tak pro každé $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
- $-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$,
- $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}=1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

9. Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbf{R}$ a je na $\mathbf{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

10. Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

11. Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x\log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0.\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

12. Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbf{Z},\\ x, & x \in \langle(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k \in \mathbf{Z}.\end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbf{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbf{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5, \\ f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1, \\ f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3, \\ f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, nemá derivaci.