Matematická analýza 1

ZS 2019-20

Miroslav Zelený

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

Webová stránka předmětu:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/˜zeleny/mff/MA_1/index_MA_1.php

1. Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \ldots, M_m$.

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ A(x).$$

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným** (**velkým**) **kvantifikátorem**.

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M:\ A(x).$$

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M\textit{, pro které platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M : \ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním** (**malým**) **kvantifikátorem**.

1.2 Metody důkazů

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- důkaz rozborem případů

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- důkaz rozborem případů
- důkaz matematickou indukcí

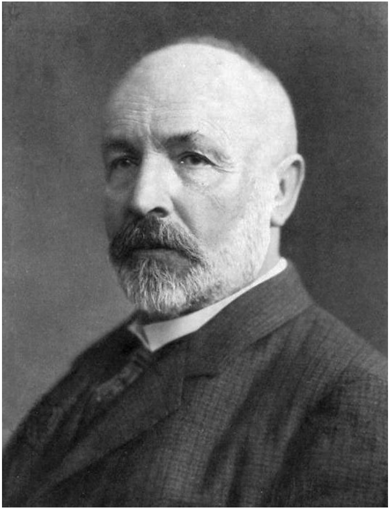
1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- důkaz rozborem případů
- důkaz matematickou indukcí
- důkaz úplnou matematickou indukcí

1.3 Množiny

G. Cantor: **Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.

Georg Cantor (1845–1918)



Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme

$$\{x \in M;\ V(x)\},$$

kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma.

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.
Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

Definice

Kartézským součinem množin $A_1, \ldots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ = \{[a_1, a_2, \ldots, a_n];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)

Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Augustus de Morgan (1806–1871)

Kurt Gödel (1906–1978)

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$.

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Píšeme $a\,R\,b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A.

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice

Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,

Definice

Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,

Definice

Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

Věta 1.2

Nechť $\leq$ *je relace uspořádání na množině* X*,* $M \subset X$ *je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny* M*. Potom platí* $\inf M \leq \sup M$*.*

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy také **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \, \forall y_1, y_2 \in B \colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2 \big).$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy také **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \, \forall y_1, y_2 \in B \colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B \colon [x, y] \in F\}.$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy také **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\, \forall y_1, y_2 \in B \colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B \colon [x, y] \in F\}.$$

Oborem hodnot zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{R}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A \colon [x, y] \in F\}.$$

Poznámka

Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. Pro každé $x \in \mathcal{D}(F)$ existuje právě jedno y takové, že $[x, y] \in F$. Takové y značíme $F(x)$. **Grafem zobrazení** F rozumíme množinu $\{[x, y] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\}$.

Označení

Nechť A a B jsou množiny. Pak symbol $F\colon A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a nechť M a P jsou množiny.

- **Obrazem množiny** M při zobrazení f rozumíme množinu $\{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\}$, kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem množiny** P při zobrazení f rozumíme množinu $\{x \in A;\ f(x) \in P\}$, kterou značíme $f^{-1}(P)$.

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže platí

$$\forall x, y \in A\colon \ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y),$$

- **„na“** (**surjektivní**), jestliže platí

$$\forall y \in B \, \exists x \in A\colon \ f(x) = y,$$

- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné zobrazení**), jestliže je prosté a „na“.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $x \mapsto f(x),\ x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C. Zobrazení g značíme $f|_C$.

Definice

Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$R^{-1} = \{[y, x] \in B \times A;\ [x, y] \in R\}$$

nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $f: A \to B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Definice

Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^{n}$. Prvek a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbf{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako **N**. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka

Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.3 (Cantor–Bernstein)

Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.

Věta 1.4 (Cantor)

Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X.

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení* $f: A \to \mathbf{N}$ *je prosté. Potom je množina* A *spočetná.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení* $f: A \to \mathbf{N}$ *je prosté. Potom je množina* A *spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení $f\colon A \to \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení $f\colon A \to \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
III. Vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* **R** *má supremum.*

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists z \in \mathbf{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \exists y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \exists y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (0 \leq x \ \wedge \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Věta 1.6

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

Věta 1.7

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ *existuje právě jedno číslo* $k \in \mathbf{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.7

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.8

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.9

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $q \in \mathbf{Q}$ *takové, že* $a < q < b$.

1.6 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel C definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

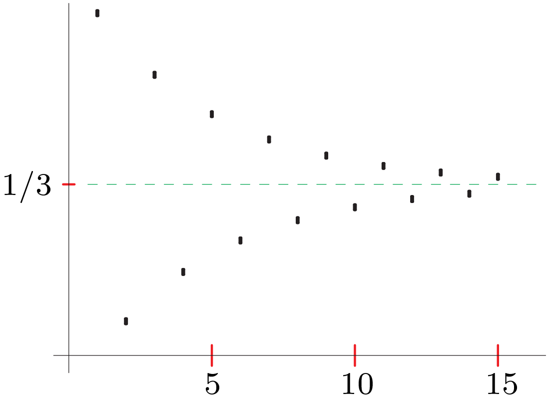
Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

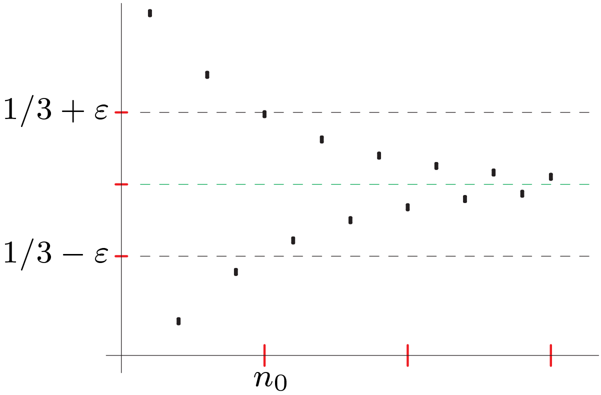
2.2 Konvergence posloupnosti

Definice

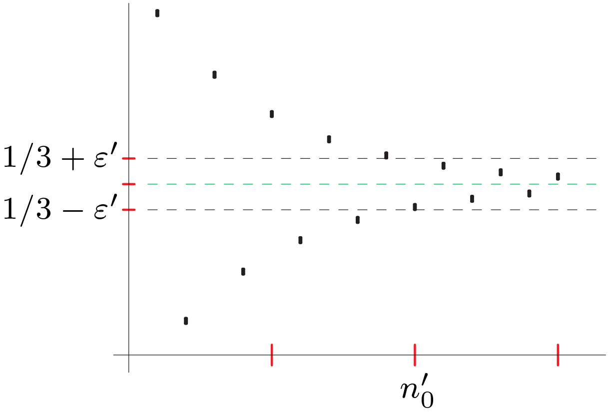
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$


1/3
5
10
15



$1/3+\varepsilon$
$1/3-\varepsilon$
n_0



$1/3+\varepsilon'$
$1/3-\varepsilon'$
n_0'

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Věta 2.2

Nechť $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbf{R}$. *Jestliže posloupnost* $\{a_n\}$ *splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < K\varepsilon.$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(a) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$*.*

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.6

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená.*
Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.7

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(b) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(b) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(b) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N},\, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq K.$$

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v $\mathbf{R}^\star$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*.*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.12

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$*,* $A > 0$*,* $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$*, že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$*.*

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N}: \ I_{n+1} \subset I_n,$
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0.$

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:

- $\forall n \in \mathbf{N}: \ I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ je jednobodová množina.

Věta 2.15 (Bolzanova-Weierstrassova věta)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$

Věta 2.16 (limita, limes superior a limes inferior)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbf{R}^*$*. Potom* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když* $\limsup a_n = \liminf a_n = A$*.*

Věta 2.17

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a platí* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. *Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad a \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.18 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup a_n$ *a* $\liminf a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* A *posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$*.*

Věta 2.18 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup a_n$ *a* $\liminf a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* A *posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Důsledek 2.19

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a nechť* $A \in \mathbf{R}^*$. *Je-li* $\lim a_n = A$, *pak* $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \\ \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.20

Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

3. Limita a spojitost funkce

3.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

3.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f),\ x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f),\ x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

3.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

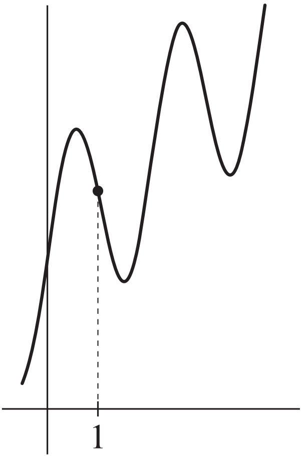
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

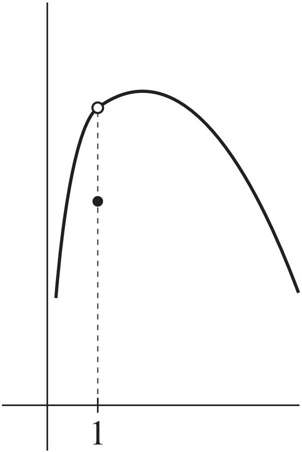
Definice

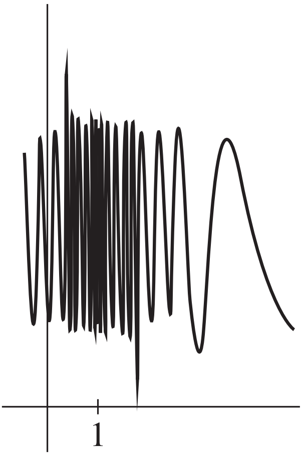
Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.


1


1


1

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^{-}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^{-}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P^-(\infty, \varepsilon) = B^-(\infty, \varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P^-(\infty, \varepsilon) = B^-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star,\; c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \to c-} f(x)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f \colon J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

3.3 Věty o limitách

Věta 3.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

3.3 Věty o limitách

Věta 3.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. Potom platí:

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. Potom platí:

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 3.4

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Věta 3.5 (limita funkce a uspořádání)

Mějme $c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť*

$$\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta): \; f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c,\eta): \; g(x) \neq D$,

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$*,* $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c, \eta) : \; g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 3.6 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta) :\ g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 3.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Věta 3.8 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a funkce f je monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:

(a) *Je-li f na (a, b) neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big) \quad a \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big).$$

Věta 3.8 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a funkce f je monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:

(a) *Je-li f na (a, b) neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big) \ \ a \ \ \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big).$$

(b) *Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big) \ \ a \ \ \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big).$$

3.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 3.9 (Bolzano)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R} : \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R}: \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Lemma 3.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R}: \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 3.11 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)

Nechť funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ *je spojitá na intervalu* J*. Potom je* $f(J)$ *interval.*

Věta 3.12

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon\ f(y) \le f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon\ f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \geq f(x)$,

Věta 3.13

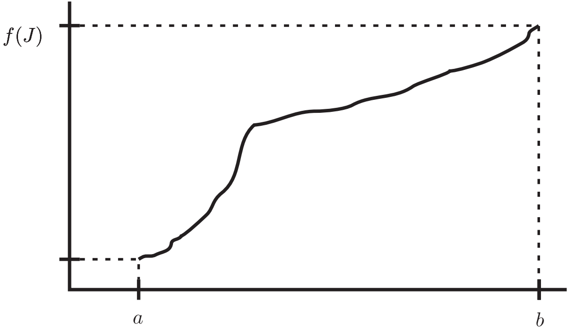
Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a f je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$. *Potom f nabývá na* $[a, b]$ *svého maxima a svého minima.*

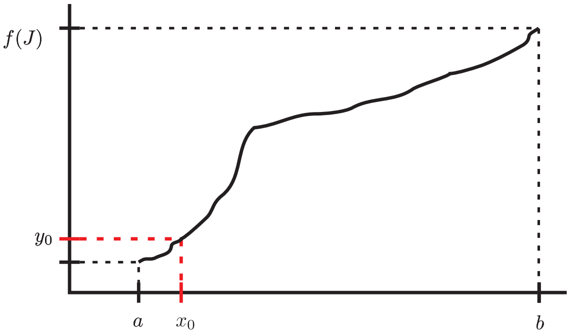
Věta 3.13

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$. *Potom* f *nabývá na* $[a, b]$ *svého maxima a svého minima.*

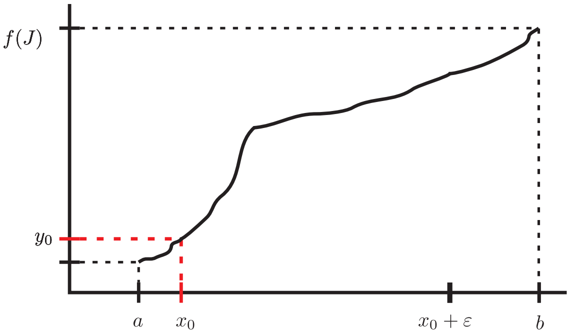
Věta 3.14 (o inverzní funkci)

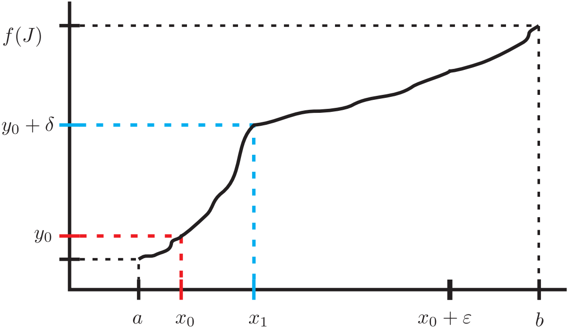
Nechť f *spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu* J. *Potom funkce* f^{-1} *je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu* $f(J)$.


$f(J)$
a
b



$f(J)$
y_0
a
x_0
b


$f(J)$
y_0
a
x_0
$x_0 + \varepsilon$
b



$f(J)$
$y_0 + \delta$
y_0
a
x_0
x_1
$x_0 + \varepsilon$
b

4. Elementární funkce

Věta 3.15 (zavedení logaritmu)

Existuje právě jedna funkce (značíme ji $\log$ *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem***), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$ *a na tomto intervalu je* $\log$ *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, \infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y,$

(L3) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako
$$a^b = \exp(b \log a).$$

Věta 3.16 (zavedení funkcí sinus a kosinus)

Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** *(*$\sin$*) a* **kosinus** *(*$\cos$*), které mají následující vlastnosti:*

(G1) $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbf{R}$,

(G2) *pro všechna* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,\\ \sin(-x) &= -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,\end{aligned}$$

(G3) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

(G4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definice

Cyklometrickými funkcemi budeme rozumět funkce **arkussinus** ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustangens** (arctg), **arkuskotangens** ($\mathrm{arccotg}$), které jsou definovány takto

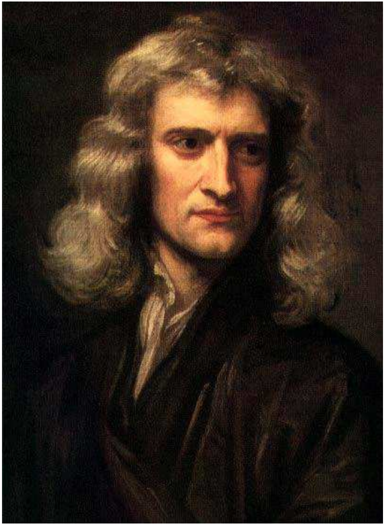
$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\mathrm{arctg} = \left(\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \mathrm{arccotg} = \left(\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Věta 3.17

Funkce $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg, cotg, $\arcsin$, $\arccos$, arctg *a* $\mathrm{arccotg}$ *jsou spojité na svých definičních oborech.*

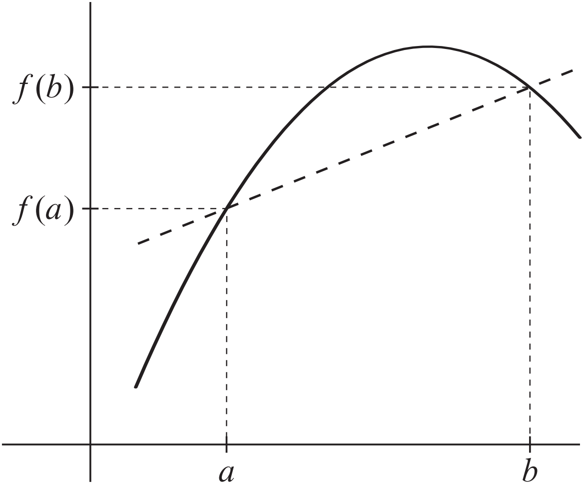
5. Derivace

Isaac Newton (1643-1727)

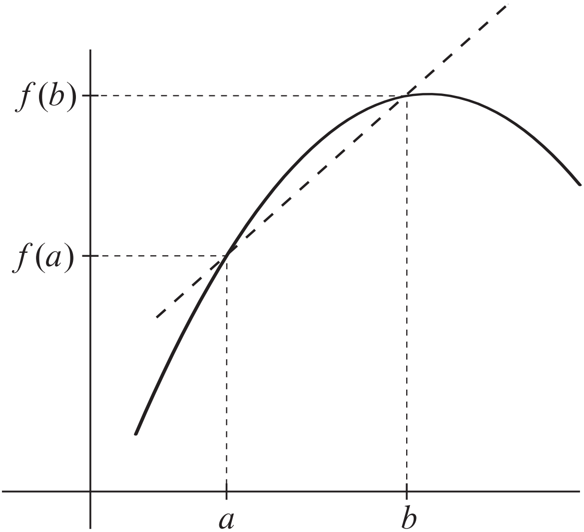


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

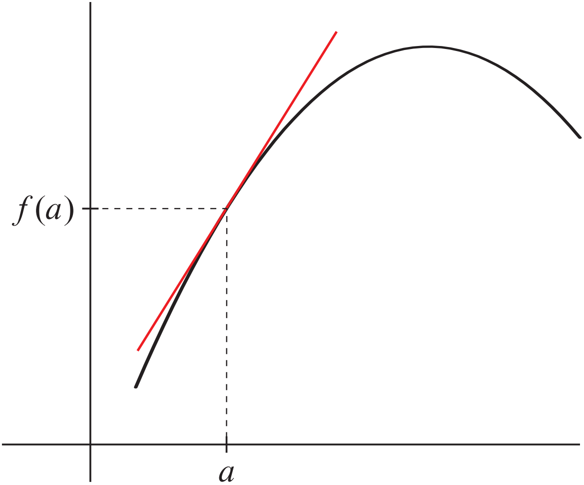
Geometrický význam derivace



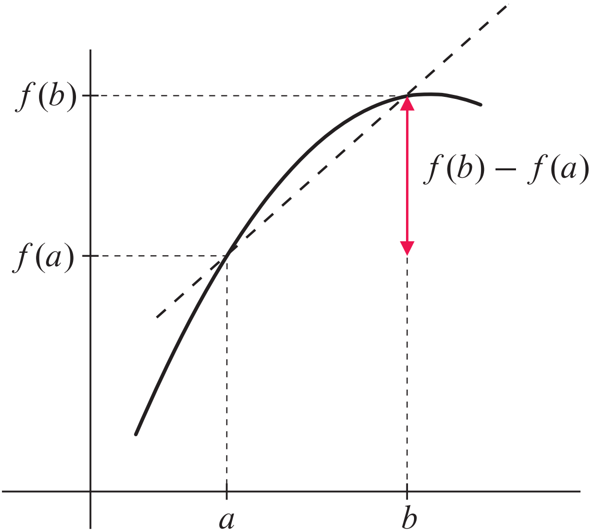
Geometrický význam derivace



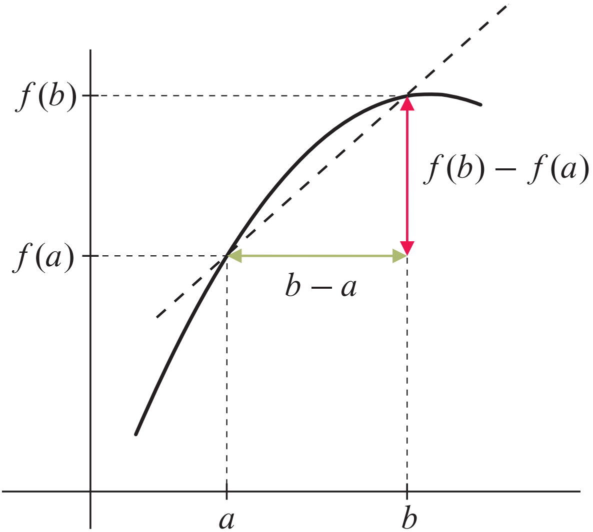
Geometrický význam derivace



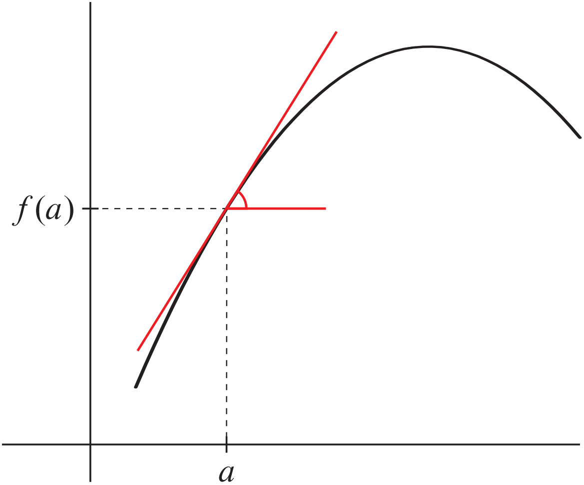
Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



5.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

5.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

  analogicky definujeme **derivaci funkce** f **v bodě** a **zleva**.

Věta 5.1

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ *a* $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$.

(a) *Pak platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ *a* $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$.

(a) *Pak platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá v bodě* a, *pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ *a* $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$.

(a) *Pak platí*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá v bodě a, pak*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Je-li funkce* g *spojitá v bodě* a *a navíc* $g(a) \neq 0$, *pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce)

Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$.*

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$.*

(c) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$.*

Věta 5.5 (nutná podmínka lokálního extrému)

Nechť f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu* $[a, b]$,

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu* $[a, b]$*,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b)*,*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu* $[a, b]$,

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b),

(iii) *platí, že* $f(a) = f(b)$.

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

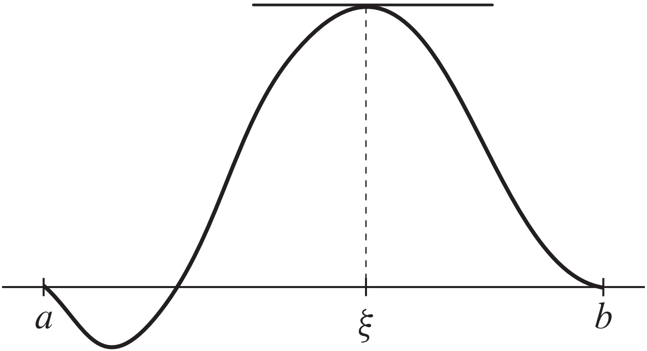
(i) *je spojitá na intervalu* $[a, b]$,

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b),

(iii) *platí, že* $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí* $f'(\xi) = 0$.

Geometrický význam Rolleovy věty



Věta 5.7 (Lagrange)

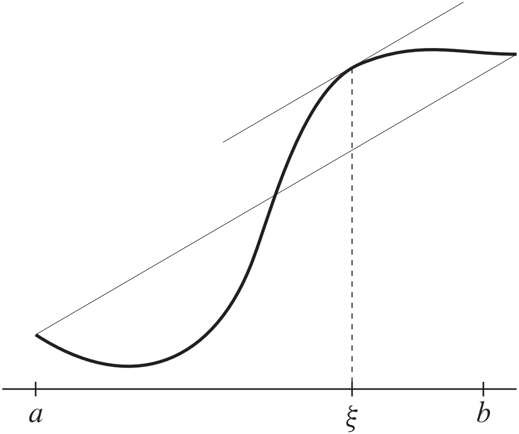
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b).

Věta 5.7 (Lagrange)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty



Věta 5.8 (Cauchy)

Nechť funkce f*,* g *jsou spojité na intervalu* $[a, b]$ *a takové, že* f *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu* (a, b) *a* g *má v každém bodě intervalu* (a, b) *vlastní a nenulovou derivaci.*

Věta 5.8 (Cauchy)

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je klesající na* J*.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. *Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Věta 5.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. *Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f*. Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 5.13 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:

- $\forall x \in (a, z): \; f''(x) > 0,$
- $\forall x \in (z, b): \; f''(x) < 0.$

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \,\forall \lambda \in [0,1]\colon$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \,\forall \lambda \in [0,1]\colon$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \;\forall \lambda \in (0,1)\colon$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Lemma 5.14

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \colon \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 5.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

Věta 5.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

Věta 5.16

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.

Věta 5.17

Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$*, a* $a < b$*, a* f' *je spojitá na* (a,b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$*, pak* f *je ryze konvexní na* (a,b).

Věta 5.17

Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f' *je spojitá na* (a,b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a,b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a,b).

Věta 5.17

Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f' *je spojitá na* (a,b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a,b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a,b).

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je konvexní na* (a,b).

Věta 5.17

Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, *a* $a < b$, *a* f' *je spojitá na* (a,b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a,b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a,b).

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je konvexní na* (a,b).

(iv) *Jestliže* $f''(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak* f *je konkávní na* (a,b).

5.4 Průběh funkce

Věta 5.18

Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ *(resp.* $f''(a) < 0$*). Potom* f *má v* a *lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0\text{)}.$$

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0\text{)}.$$

Věta 5.19

Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce *f* je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.

6. Taylorův polynom

6.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

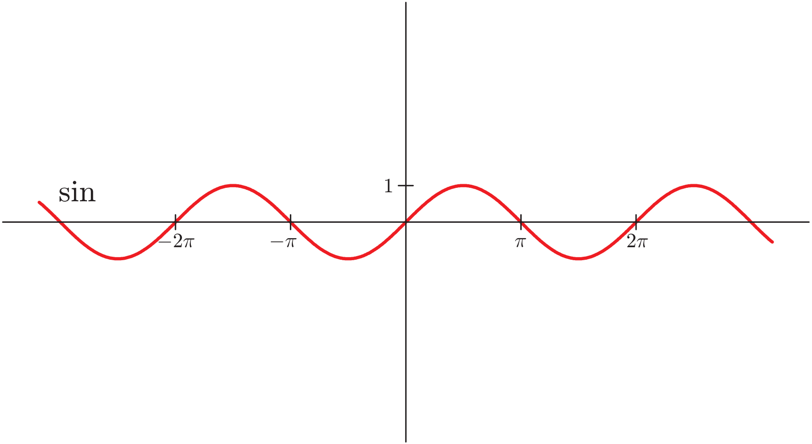
Lemma 6.1

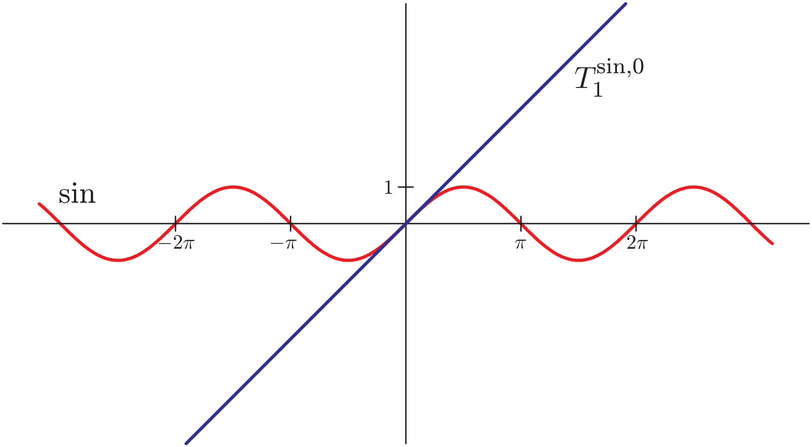
Nechť Q je polynom, st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak Q je nulový polynom.*

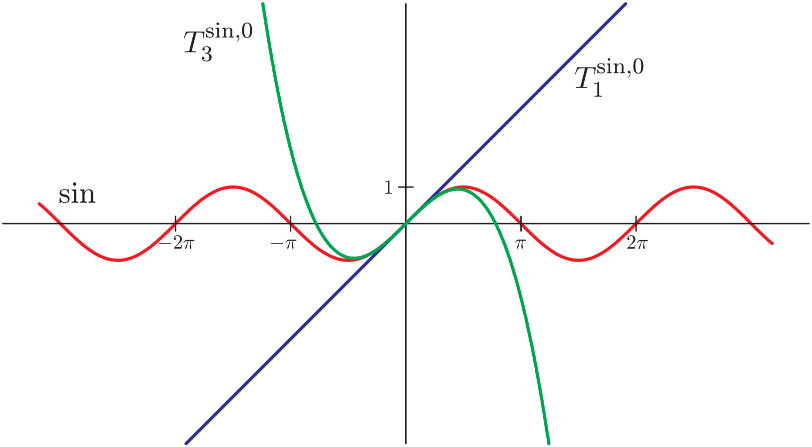
Věta 6.2 (Peanův tvar zbytku)

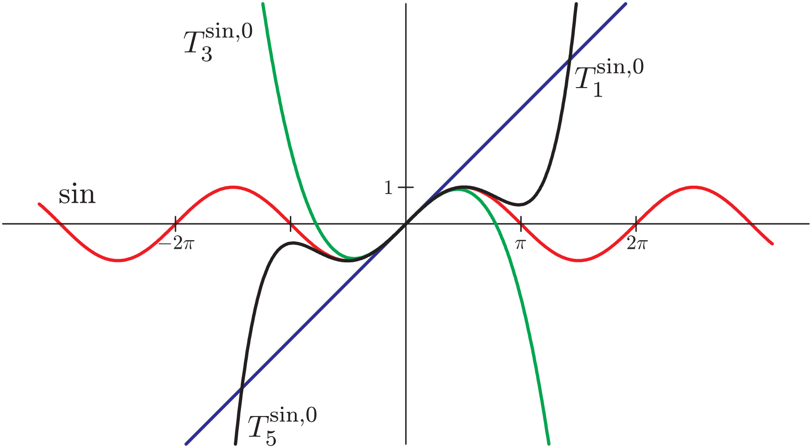
Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ *a* P *je polynom stupně nejvýše* n*. Pak*

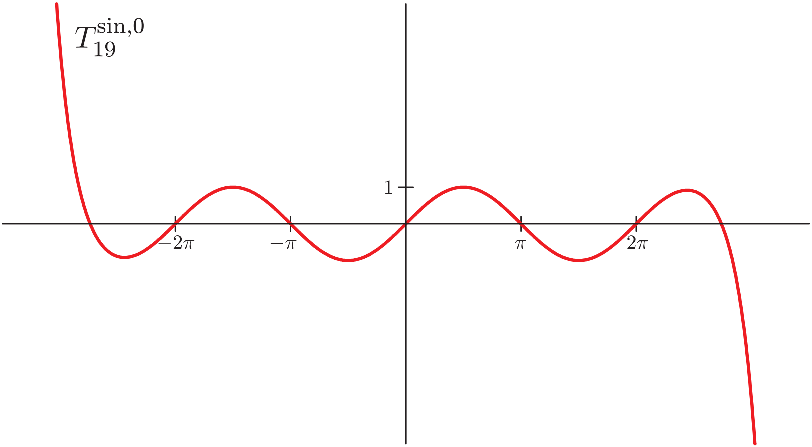
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$


sin
1
−2π
−π
π
2π


$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π


$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π


$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
π
2π
$T_5^{\sin,0}$


$T_{19}^{\sin,0}$
1
-2π
$-\pi$
π
2π

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$*,* $a < x$*. Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$*, která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$, *která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

6.2 Symbol malé o

Definice

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^\star$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 6.6

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \ \ a\ \ f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)),\ x \to a.$$

(iii) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Věta 6.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta)\colon\ \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$, $x \to a$.