1 Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice. **Konjunkcí** $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice. **Disjunkcí** $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice. **Implikací** $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice. **Ekvivalencí** $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

——— Konec 1. přednášky, 1. 10. 2019 ———

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz

——— Konec 2. přednášky, 2. 10. 2019 ———

- důkaz sporem
- důkaz rozborem případů
- důkaz matematickou indukcí
- důkaz úplnou matematickou indukcí

1.3 Množiny

G. Cantor: **Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme

$$\{x \in M;\ V(x)\},$$

kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma.

Definice.

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

- Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. **Průnikem** množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. **Rozdílem** množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

Definice. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Píšeme $a\, R\, b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A.

Definice. Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,

- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice. Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,

(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

Věta 1.2. *Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $M \subset X$ je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny M. Potom platí* $\inf M \leq \sup M$.

Konec 3. přednášky, 8. 10. 2019

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy také **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \, \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon [x, y] \in F\}.$$

Oborem hodnot zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{R}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon [x, y] \in F\}.$$

Poznámka. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. Pro každé $x \in \mathcal{D}(F)$ existuje právě jedno y takové, že $[x, y] \in F$. Takové y značíme $F(x)$. **Grafem zobrazení** F rozumíme množinu $\{[x, y] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\}$.

Označení. Nechť A a B jsou množiny. Pak symbol $F\colon A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a nechť M a P jsou množiny.

- **Obrazem množiny** M při zobrazení f rozumíme množinu $\{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\}$, kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem množiny** P při zobrazení f rozumíme množinu $\{x \in A;\ f(x) \in P\}$, kterou značíme $f^{-1}(P)$.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže platí

$$\forall x, y \in A\colon \ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y),$$

- **„na“** (**surjektivní**), jestliže platí

$$\forall y \in B \, \exists x \in A\colon \ f(x) = y,$$

- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné zobrazení**), jestliže je prosté a „na“.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C. Zobrazení g značíme $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem
$$R^{-1} = \{[y,x] \in B \times A;\ [x,y] \in R\}$$
nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Definice. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1,\dots,n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1,\dots,n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbf{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1,\dots,n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.3 (Cantor–Bernstein)**.** *Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Věta 1.4 (Cantor)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení* $f\colon A \to \mathbf{N}$ *je prosté. Potom je množina* A *spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

——— Konec 4. přednášky, 9. 10. 2019 ———

1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

III. Vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbf{R}$ *má supremum.*

Věta 1.6. *Nechť* $M \subset \mathbf{R}$ *je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny* M.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

Věta 1.7. *Pro každé* $r \in \mathbf{R}$ *existuje právě jedno číslo* $k \in \mathbf{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k+1$.

Věta 1.8. *Ke každému* $x \in \mathbf{R}$ *existuje* $n \in \mathbf{N}$ *splňující* $x < n$.

Věta 1.9. *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $q \in \mathbf{Q}$ *takové, že* $a < q < b$.

1.7 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2 Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

Konec 5. přednášky, 15. 10. 2019

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Konec 6. přednášky, 16. 10. 2019

Věta 2.2. *Nechť $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbf{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < K\varepsilon.$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4. *Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)**.** *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

Konec 7. přednášky, 22. 10. 2019

Věta 2.6. *Nechť $\lim a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Věta 2.7. *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)**.** *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.*

(a) *Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

(b) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.*

Věta 2.9 (o dvou strážnících)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq K.$$

Konec 8. přednášky, 23. 10. 2019

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v* $\mathbf{R}^\star$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$*, pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.12. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$*,* $A > 0$*,* $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$*, že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$*.*

Konec 9. přednášky, 30. 10. 2019

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.13. *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** *Nechť* $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N}:\ I_{n+1} \subset I_n$*,*
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0$*.*

Potom $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ *je jednobodová množina.*

Věta 2.15 (Bolzanova-Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Konec 10. přednášky, 5. 11. 2019

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená.} \end{cases}$$

Věta 2.16 (limita, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbf{R}^*$*. Potom* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když* $\limsup a_n = \liminf a_n = A$*.*

Věta 2.17. *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a platí* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$*,* $n \geq n_0$*. Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{a} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Konec 11. přednášky, 6. 11. 2019

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.18 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup a_n$ *a* $\liminf a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* A *posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$*.*

Důsledek 2.19. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a nechť* $A \in \mathbf{R}^*$*. Je-li* $\lim a_n = A$*, pak* $H(\{a_n\}) = \{A\}$*.*

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.20. *Posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

3 Limita a spojitost funkce

3.1 Základní pojmy

Definice. **Funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice. **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f),\ x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta)\colon\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

——— Konec 12. přednášky, 13. 11. 2019 ———

Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,

- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c,\varepsilon) = (c, c+\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c)$.

Definice. Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty,\varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P^-(\infty,\varepsilon) = B^-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty,\varepsilon) = B^+(-\infty,\varepsilon)$.

Definice. Nechť $A \in \mathbf{R}^\star,\ c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c,\delta) \colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).

Definice. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

3.3 Věty o limitách

Věta 3.1. *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta 3.2. *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.*

Věta 3.3 (aritmetika limit)**.** *Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Konec 13. přednášky, 19. 11. 2019

Věta 3.4. *Nechť* $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c,\eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Věta 3.5 (limita funkce a uspořádání)**.** *Mějme* $c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť*

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta): \; f(x) > g(x).$$

(ii) *Nechť existuje prstencové okolí* $P(c,\delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta): \; f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) *(o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí* $P(c,\delta)$ *platí*

$$f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$. *Potom existuje rovněž* $\lim_{x\to c} h(x)$ *a všechny tři limity jsou si rovny.*

Věta 3.6 (limita složené funkce)**.** *Nechť* $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c,\eta): \; g(x) \ne D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Konec 14. přednášky, 20. 11. 2019

Věta 3.7 (Heine)**.** *Nechť* $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ *a funkce* f *je definována na prstencovém okolí bodu* c. *Pak jsou výroky* (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *splňující* $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 3.8 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a funkce* f *je monotónní na intervalu* (a, b). *Potom existují* $\lim_{x\to a_+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b_-} f(x)$, *přičemž platí:*

(a) *Je-li* f *na* (a, b) *neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big) \ \text{ a } \ \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big).$$

(b) *Je-li* f *na* (a, b) *nerostoucí, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big) \ \text{ a } \ \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big).$$

Konec 15. přednášky, 26. 11. 2019

3.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 3.9 (Bolzano)**.** *Nechť funkce* f *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a předpokládejme, že* $f(a) < f(b)$. *Potom pro každé* $C \in (f(a), f(b))$ *existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí* $f(\xi) = C$.

Lemma 3.10. *Nechť* $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M\, \forall z \in \mathbf{R}: \ x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 3.11 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť funkce* $f\colon J \to \mathbf{R}$ *je spojitá na intervalu* J. *Potom je* $f(J)$ *interval.*

Věta 3.12. *Nechť* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$. *Potom je* f *na* $[a, b]$ *omezená.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)$,

Věta 3.13. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a svého minima.*

Konec 16. přednášky, 27. 11. 2019

Věta 3.14 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

4 Elementární funkce

Věta 4.1 (zavedení logaritmu)**.** *Existuje právě jedna funkce (značíme ji* $\log$ *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem***), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$ *a na tomto intervalu je* $\log$ *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, \infty)\colon \log xy = \log x + \log y$,

(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Definice. Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Konec 17. přednášky, 3. 12. 2019

Věta 4.2 (zavedení funkcí sinus a kosinus)**.** *Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí* **sinus** *(*$\sin$*) a* **kosinus** *(*$\cos$*), které mají následující vlastnosti:*

(G1) $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbf{R}$,

(G2) *pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \end{aligned}$$

(G3) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

(G4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definice. **Cyklometrickými funkcemi** budeme rozumět funkce **arkussinus** ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustangens** (arctg), **arkuskotangens** ($\operatorname{arccotg}$), které jsou definovány takto

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}, \qquad \arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} = (\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)})^{-1}.$$

Věta 4.3. *Funkce* $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg, cotg, $\arcsin$, $\arccos$, arctg *a* $\operatorname{arccotg}$ *jsou spojité na svých definičních oborech.*

5 Derivace

5.1 Definice a základní vztahy

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

  analogicky definujeme **derivaci funkce** f **v bodě** a **zleva**.

Konec 18. přednášky, 4. 12. 2019

Věta 5.1. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.*

Věta 5.2 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ a $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$.*

(a) *Pak platí*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak*
$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*
$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak $\big(f^{-1}\big)'(b) = \infty$.*

(c) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak $\big(f^{-1}\big)'(b) = -\infty$.*

——— Konec 19. přednášky, 10. 12. 2019 ———

Věta 5.5 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)**.** *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

Věta 5.7 (Lagrange)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 5.8 (Cauchy)**.** *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** (i) *Nechť $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Konec 21. přednášky, 17. 12. 2019

Věta 5.11. *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a)\cdot(x-a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a-\delta, a):\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\delta):\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a-\delta, a):\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\delta):\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.13 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b) a $z \in (a,b)$. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a,z):\ f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z,b):\ f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in [0,1]\colon\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2\, \forall \lambda \in (0,1)\colon\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Lemma 5.14. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3\colon\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Konec 22. přednášky, 18. 12. 2019

Věta 5.15. *Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Věta 5.16. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.*

Věta 5.17. *Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, a f' je spojitá na (a,b).*

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ryze konvexní na (a,b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ryze konkávní na (a,b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je konvexní na (a,b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je konkávní na (a,b).*

5.4 Průběh funkce

Věta 5.18. *Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Definice. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 5.19. *Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.

6 Taylorův polynom

6.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.**

Konec 23. přednášky, 7. 1. 2020

Lemma 6.1. *Nechť Q je polynom, $\operatorname{st} Q \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.*

Věta 6.2 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Věta 6.3. *Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že*

- *f je funkce, která má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *φ je spojitá funkce na $[a, x]$, která má v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku). *Nechť* a, x, f *jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje* $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

Konec 24. přednášky, 8. 1. 2020

Seznam definic a vět

Látka bude zkoušena v rozsahu odpřednesené látky. Níže uvedené seznamy slouží *pouze* k snadnější formulaci otázek v úvodu zkoušky. Na zkoušku je tedy třeba znát i formulace a důkazy tvrzení z přednášek, které se v seznamech nevyskytují.

Klíčové pojmy

Neznalost některého z klíčových pojmů bude mít za následek ukončení zkoušky se známkou „neprospěl(a)“.

- supremum a infimum
- limita posloupnosti
- okolí bodu, prstencové okolí bodu
- limita funkce
- limita funkce zprava (resp. zleva)
- spojitost funkce v bodě
- spojitost funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- maximum a minimum funkce na množině
- derivace funkce v bodě
- derivace funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- konvexní a konkávní funkce
- Taylorův polynom

Definice

- negace výroku
- konjunkce výroků
- disjunkce výroků
- implikace výroků
- ekvivalence výroků
- nutná a postačující podmínka
- výroková forma
- obecný a existenční kvantifikátor
- kartézský součin množin
- binární relace a její vlastnosti (reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie, slabá antisymetrie)
- uspořádání, ostré uspořádání, lineární uspořádání
- horní a dolní závora
- shora omezená množina, zdola omezená množina, omezená množina
- supremum a infimum
- zobrazení
- definiční obor
- obor hodnot

- obraz množiny
- vzor množiny
- injektivní zobrazení
- surjektivní zobrazení
- bijektivní zobrazení
- restrikce zobrazení
- složené zobrazení
- inverzní relace a zobrazení
- konečná a nekonečná posloupnost
- mohutnost množin
- konečná a nekonečná množina
- spočetná množina
- potenční množina
- množina reálných čísel
- maximum množiny
- minimum množiny
- komplexní čísla

- posloupnost reálných čísel
- shora omezená posloupnost, zdola omezená posloupnost, omezená posloupnost
- monotonie posloupnosti a její typy
- vlastní limita posloupnosti
- konvergentní posloupnost
- vybraná posloupnost
- rozšířená reálná osa
- nevlastní limita posloupnosti
- limes inferior a limes superior
- hromadná hodnota posloupnosti
- Bolzanova-Cauchyova podmínka

- funkce jedné reálné proměnné
- monotonie funkce a její typy
- ryze monotónní funkce
- symetrie funkce
- shora omezená funkce, zdola omezená funkce, omezená funkce
- konstantní funkce
- okolí bodu, prstencové okolí bodu a jeho typy
- limita funkce v bodě
- limita funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- funkce spojitá v bodě
- funkce spojitá v bodě zleva (resp. zprava)
- funkce spojitá na intervalu
- maximum a minimum funkce na množině
- lokální maximum a minimum funkce vzhledem k množině

- exponenciální funkce
- obecná mocnina
- goniometrické funkce
- cyklometrické funkce

- derivace funkce v bodě
- derivace funkce v bodě zleva (resp. zprava)
- $(n+1)$-ní derivace funkce v bodě
- inflexní bod
- (ryze) konvexní a konkávní funkce na intervalu
- asymptota funkce

- Taylorův polynom

Věty

B .... bez důkazu, jinak jsou všechna tvrzení vyžadována i s důkazem
T .... věta je zařazena do kategorie „těžké“

- de Morganova pravidla (Věta 1.1
- vztah suprema a infima (Věta 1.2)

B Cantorova-Bernsteinova věta (Věta 1.3)
B Cantorova věta (Věta 1.4)
B vlastnosti spočetných množin (Věta 1.5)
- existence infima (Věta 1.6)

T celá část čísla (Věta 1.7)
- neomezenost množiny přirozených čísel (Věta 1.8)
- hustota $\mathbb{Q}$ (Věta 1.9)

- jednoznačnost limity posloupnosti (Věta 2.1, Věta 2.10)
- omezenost konvergentní posloupnosti (Věta 2.3)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 2.4)

T aritmetika limit posloupností (Věta 2.5, Věta 2.11)
- limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou (Věta 2.6)
- limita a absolutní hodnota (Věta 2.7)
- limita posloupnosti a uspořádání (Věta 2.8)
- dva strážníci pro posloupnosti (Věta 2.9)
- limita posloupnosti typu „$A/0$“ (Věta 2.12)
- limita monotónní posloupnosti (Věta 2.13)

T Cantorův princip vložených intervalů (Věta 2.14)
T Bolzanova-Weierstrassova věta (Věta 2.15)
- vztah $\lim$, $\limsup$ a $\liminf$ (Věta 2.16)

T $\limsup$, $\liminf$ a uspořádání (Věta 2.17)

T vztah $\limsup$ a množiny hromadných hodnot (Věta 2.18)
T limita posloupnosti a Bolzanova-Cauchyova podmínka (Věta 2.20)

• jednoznačnost limity funkce (Věta 3.1)
• limita a omezenost funkce (Věta 3.2)
T aritmetika limit funkcí (Věta 3.3)
• limita funkce „$A/0$“ (Věta 3.4)
• limita funkce a uspořádání (Věta 3.5)
T limita složené funkce (Věta 3.6)
T Heineova věta (Věta 3.7)
T limita monotónní funkce (Věta 3.8)
T Bolzanova věta (Věta 3.9)
T zobrazení intervalu spojitou funkcí (Věta 3.11)
T omezenost a spojitost na intervalu (Věta 3.12)
T spojitost funkce a nabývání extrémů (Věta 3.13)
T o inverzní funkci (Věta 3.14)

T zavedení logaritmu a jeho vlastnosti (Věta 4.1) – důkazy budou požadovány pro odvození vlastností, ne pro větu samotnou
T zavedení funkcí sinus a kosinus (Věta 4.2) – důkazy budou požadovány pro odvození vlastností, ne pro větu samotnou
• spojitost elementárních funkcí (Věta 4.3)

• vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1)
T aritmetika derivací (Věta 5.2)
T derivace složené funkce (Věta 5.3)
T derivace inverzní funkce (Věta 5.4)
• nutná podmínka lokálního extrému (Věta 5.5)
T Rolleova věta (Věta 5.6)
• Lagrangeova věta (Věta 5.7)
T Cauchyova věta (Věta 5.8)
• vztah derivace a monotonie (Věta 5.9)
T l'Hospitalovo pravidlo (Věta 5.10)
• derivace a limita derivace (Věta 5.11)
T nutná podmínka pro inflexi (Věta 5.12)
T postačující podmínka pro inflexní bod (Věta 5.13)
T konvexita a jednostranné derivace (Věta 5.15)
• konvexita a spojitost (Věta 5.16)
T druhá derivace a konvexita (Věta 5.17)
T postačující podmínka pro lokální minimum (Věta 5.18)
• existence asymptoty (Věta 5.19)

T Peanův tvar zbytku (Věta 6.2)
T abstraktní tvar zbytku Taylorova polynomu (Věta 6.3)
T Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.4)
T Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.5)