Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2019-20

Písemka číslo 4, 13. 2. 2020

---

1. Spočtěte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^{n\log(n+2)}$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x+\frac{2\log(\cos x)}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

(15 bodů)

3. Uvažujte funkci

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x)=|3\cos x|+2(\cos x)^3.$$

(a) Nalezněte extrémy funkce f.

(b) Nalezněte intervaly monotonie funkce f.

(c) Rozhodněte, zda je funkce f konvexní na intervalu $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

(15 bodů)

Řešení

1. Počítjme:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x + \frac{2\log\cos x}{x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \left\{ \frac{e^x - 1}{x} \cdot \sqrt{x} + \frac{1 + \frac{2\log\cos x}{x^2}}{\sqrt{x}} \right\}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + 2\log\cos x}{x^{5/2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x - 2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{5}{2}x^{3/2}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2 - 2\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{15}{4}x^{1/2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{8}{15\cos^2 x}\,\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \cdot x^{3/2}$$
$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{-1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Předposlední rovnost jsme odvodili pomocí l'Hospitalova pravidla.

4. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$; f je 2π-periodická - proto můžeme průběh funkce f zkoumat pouze na intervalu $\langle -\pi/2, 3\pi/2\rangle$. Platí tak, $f(0) = 5$ a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\pi/2, \pi/2, 3\pi/2\}$. Spoźˇtejme prvnˇ derivaci f a zkoumejme jejˇ znam,nko.

$$f'(x) = \begin{cases} -3\sin x - 6\cos^2 x \sin x, & x \in (-\pi/2, \pi/2); \\ 3\sin x - 6\cos^2 x \sin x, & x \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

Jednostrann, derivace v krajnˇch bodech intervalu a ve „zlomov,m bodŘ" $\pi/2$ dopoźˇt me jako limity derivacˇ (f je spojit !). Dostaneme:

$$f'_+(-\pi/2) = 3, \qquad f'_-(\pi/2) = -3, \qquad f'_+(\pi/2) = 3, \qquad f'_-(3\pi/2) = -3.$$

Funkce f (uva§ovan na cel,m $\mathbb{R}$) nem v bodech $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, derivaci. Urźeme znam,nko prvnˇ derivace:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, 3\pi/4) \cup (\pi, 5\pi/4)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/4, \pi) \cup (5\pi/4, 3\pi/2)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4\}.$$

Funkce f je tedy rostoucˇ na intervalech $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, $(\pi, 5\pi/4)$ a klesajˇcˇ na intervalech $(0, \pi/2)$, $(3\pi/4, \pi)$, $(5\pi/4, 3\pi/2)$. Glob lnˇ maximum m funkce f v bodŘ 0 a glob lnˇ minimum m v bodech $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$. V bodech $3\pi/4$, $5\pi/4$ m funkce f lok lnˇ maximum a v bodŘ π m lok lnˇ minimum. Pro obor hodnot platˇ $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 5\rangle$.

Spoźˇtejme druhou derivaci funkce f.

$$f''(x) = \begin{cases} -3\cos x + 12\cos x \sin^2 x - 6\cos^3 x, & x \in (-\pi/2, \pi/2); \\ 3\cos x + 12\cos x \sin^2 x - 6\cos^3 x, & x \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

Pro znaménko f'' platí:

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (\pi/2, \pi - \arcsin(1/\sqrt{6})) \cup (\pi + \arcsin(1/\sqrt{6}), 3\pi/2);$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/2, -\pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2) \cup (\pi - \arcsin(1/\sqrt{6}), \pi + \arcsin(1/\sqrt{6}));$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\pi/4, \pi/4, \pi - \arcsin(1/\sqrt{6}), \pi + \arcsin(1/\sqrt{6})\}.$$

Funkce f je tedy konk vnˇ na intervalech $(-\pi/4, \pi/4)$, $(\pi/2, \pi - \arcsin(1/\sqrt{6}))$, $(\pi + \arcsin(1/\sqrt{6}), 3\pi/2)$. Funkce f je konvexnˇ na intervalech $(-\pi/2, -\pi/4)$, $(\pi/4, \pi/2)$, $(\pi - \arcsin(1/\sqrt{6}), \pi + \arcsin(1/\sqrt{6}))$. Body $-\pi/4$, $\pi/4$, $\pi - \arcsin(1/\sqrt{6})$, $\pi + \arcsin(1/\sqrt{6})$ jsou inflexnˇ.

Funkce f nem v $+\infty$ ani v $-\infty$ asymptotu.

Toto je graf funkce f: