Matematická analýza 1
(velmi předběžná verze)

21. ledna 2020

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

KAPITOLA 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí), nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu** 1, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé." a „Praha je hlavní město Kanady." jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!" nebo „Kéž by už byl konec." nikoli. Tvrzení „Číslo π^π je iracionální." je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A." K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A.", případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne-". Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B." Dále používáme také obraty „Platí A a platí B.", „Platí A i B." Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \& B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B, pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B." Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo" v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B." Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Pro vyjádření implikace používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B. Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A, pak platí B." v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B, zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě." Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoliv pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [**18**, II.8].

1.1.7. Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B." Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Ekvivalenci vyjadřujeme také pomocí následujících obratů.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní výroku B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce)**.** Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
(b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
(c) $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \Leftrightarrow \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$
(d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
(e) $\big((A \vee B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big(A \vee (B \vee C)\big)$
(f) $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$
(g) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A, B a C.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ■

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky $A_1, \dots, A_n$ pomocí konjunkce, pak nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge \big((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4\big), \qquad \big((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1\big) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ pro disjunkci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol $\wedge$ a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3." znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$."

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

(a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
(d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Pravdivost výroků (a)–(c) lze dokázat obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ■

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \tag{1.1}$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ■

1.1.14. Věta. Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(c) $\big((A \vee B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big)$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ■

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. Výroková forma $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z něhož vznikne výrok, když za proměnné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme po řadě prvky z daných množin $M_1, M_2, \dots, M_n$. Takovou výrokovou formu s n proměnnými a příslušnými množinami $M_1, M_2, \dots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

1.1.17. Pojem množiny v předchozí definici používáme v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Zpřesňující výklad je uveden v Oddílu 1.3 a Dodatku A.

1.1.18. Nechť výroková forma V má tvar „x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme prvky z množiny všech českých měst. Pak V(Praha) je pravdivý výrok, ale výrok V(Plzeň) neplatí.

1.1.19. Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V 1.1.18 je predikátem „být hlavním městem České republiky“. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.20. Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(a) Výrok „Pro každé $x \in P$ platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in P : V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje $x \in P$ takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in P : V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

(c) Výrok „Existuje právě jedno $x \in P$ takové, že platí $V(x)$." zapisujeme ve tvaru

$$\exists! x \in P\colon V(x).$$

1.1.21. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly $\forall$ a $\exists$ otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.22 (kvantifikace přes prázdnou množinu)**.** Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Jestliže P je prázdná množina, potom výrok

$$\forall x \in P\colon V(x)$$

považujeme za pravdivý. Na druhé straně výrok

$$\exists x \in P\colon V(x)$$

je zřejmě nepravdivý.

1.1.23. Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky. Mějme výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{aligned} &\forall x \in M_1\colon V(x, y), && \exists x \in M_1\colon V(x, y),\\ &\forall y \in M_2\colon V(x, y), && \exists y \in M_2\colon V(x, y). \end{aligned}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x. Z těchto forem lze utvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x \in M_1\colon \big(\forall y \in M_2\colon V(x, y)\big), \qquad \exists y \in M_2\colon \big(\exists x \in M_1\colon V(x, y)\big).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2\colon V(x, y), \qquad \exists y \in M_2\ \exists x \in M_1\colon V(x, y).$$

Obdobně můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.24 (intuitivní pojetí matematické logiky)**.** V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x" a „existuje x". Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [**16**] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.25 (zúžení výrokové formy)**.** Uveďme nejprve dvě následující vlastnosti. Nechť $V(x)$, $x \in M_1$, je výroková forma a $M_2 \subset M_1$. Potom platí:

(a) $\big(\forall x \in M_1\colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x \in M_2\colon V(x)\big)$,
(b) $\big(\exists x \in M_2\colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x \in M_1\colon V(x)\big)$.

Výrok (a) říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny M_1, pak platí i pro každý prvek x z množiny M_2. Výrok (b) tvrdí, že pokud v podmnožině M_2 existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině M_1.

1.1.26 (pořadí kvantifikátorů)**.** Uveďme dále tři základní vlastnosti týkající se pořadí kvantifikátorů, které budeme často používat. Nechť $V(x, y), x \in M_1, y \in M_2$ je výroková forma. Potom platí:

- $\big(\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2 \colon V(x, y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y \in M_2\ \forall x \in M_1 \colon V(x, y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \exists y \in M_2 \colon V(x, y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y \in M_2\ \exists x \in M_1 \colon V(x, y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2 \colon V(x, y)\big) \Rightarrow \big(\forall y \in M_2\ \exists x \in M_1 \colon V(x, y)\big)$.

První dvě vlastnosti říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejného typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

Nechť $A(m, d), m \in M, d \in D$, značí výrokovou formu

„Muž m je otcem dítěte d.“, $\quad m \in M, d \in D$,

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D\ \exists m \in M \colon A(m, d), \qquad \exists m \in M\ \forall d \in D \colon A(m, d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.27. Označení. Nechť $V(x, y)$ je výroková forma, kde za proměnné x a y bereme prvky množiny A. V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A\ \forall y \in A \colon V(x, y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A \colon V(x, y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A\ \exists y \in A \colon V(x, y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A \colon V(x, y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.28. Označení. Nechť V a P jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Zápis

$$\forall x \in M, P(x) \colon V(x), \tag{1.2}$$

označuje výrok

$$\forall x \in M \colon \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Výrok (1.2) čteme: „Pro každé x z M splňující P platí $V(x)$." Zápis

$$\exists x \in M, P(x) \colon V(x) \tag{1.3}$$

označuje výrok

$$\exists x \in M \colon \big(P(x) \wedge V(x)\big).$$

Výrok (1.3) čteme: „Existuje x z M splňující P, pro které platí $V(x)$." Obdobný zápis používáme i v případě, že V je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená úmluva zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.29 (negace výroků s kvantifikátory)**.** Nechť V a P jsou výrokové formy proměnné $x \in M$. Negaci výroku

$$\forall x \in M \colon V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M \colon \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg\big(V(x)\big)$. Podobně negaci výroku

$$\exists x \in M \colon V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x \in M \colon \neg V(x).$$

Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x) \colon V(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x \in M \colon \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x \in M \colon \neg\big(P(x) \Rightarrow V(x)\big),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x \in M \colon \big(P(x) \wedge \neg V(x)\big).$$

Poslední formuli lze přepsat ve tvaru

$$\exists x \in M, P(x) \colon \neg V(x).$$

Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x) \colon V(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x) \colon \neg V(x).$$

Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a negujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.30. Negaci výroku

$$\forall x \in M_1\ \exists y \in M_2\ \forall z \in M_3 \colon V(x,y,z)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2\ \exists z \in M_3 \colon \neg V(x,y,z).$$

S výrokovými formami a kvantifikátory se budeme v tomto textu setkávat neustále. Úlohy k procvičení jsou uvedeny v Oddílu 1.8.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odečítat, násobit a dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), $\cdot$ (krát) a $-$ (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině všech celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Více o nich řekneme v Oddílu 1.5 a jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.2. V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom v **důkazech** odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.[1] **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku A.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,

[1] Slovo lemma je středního rodu.

- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uveďme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz)**.** Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B. Při přímém důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1, pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2, z něho pak dokážeme C_3 a tak dále, až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B. Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1, \; C_1 \Rightarrow C_2, \; C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n, \; C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom nalezli vhodné střední členy $C_1, \dots, C_n$, které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz)**.** Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (vizte Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoli důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem)**.** Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ (vizte Větu 1.1.12(c)). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C, který je neplatný, pak nemůže platit ani výrok $A \wedge \neg B$ (z platného výroku nelze odvodit výrok neplatný). Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozborem případů)**.** Má-li dokazované tvrzení tvar $(A \vee B) \Rightarrow C$, pak podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr C za předpokladu, že platí A. Pak dokazujeme C za předpokladu, že platí B. Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $A \vee B$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. Ani zde není k dispozici žádný algoritmus, jak taková A a B nalézt, a je třeba použít vlastního důvtipu.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí)**.** Metodu důkazu matematickou indukcí lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon V(n), \tag{1.4}$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. V prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(1)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. **indukční předpoklad**) a odvodíme platnost $V(n+1)$. Z těchto dvou kroků pak vyplývá platnost výroku (1.4).

V případě, že chceme dokázat výrok tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 \colon V(n),$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $V(n)$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, je výroková forma, pak v prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(n_0)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 \colon \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big).$$

Korektnost této důkazové metody podstatně souvisí s konstrukcemi množiny přirozených čísel a množiny celých čísel, kterým se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.8 (důkaz úplnou matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon V(n) \tag{1.5}$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,

(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\big(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n \colon V(j)\big) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (b) úplné matematické indukce se liší od druhého kroku matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali platnost pouze $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \ldots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (a) a (b). Ukážeme, že pak platí (1.5). Definujme výrokovou formu $W(n), n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon W(n). \tag{1.6}$$

Výrok $W(1)$ platí podle (a). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (b) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.6). Z výroku (1.6) pak okamžitě plyne (1.5).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.8).

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.9. Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ♣

1.2.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k = \frac{1}{2}$. Číslo $l - k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.11. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že potom p^n je liché číslo.

Řešení. Nechť $p \in \mathbb{N}$ je liché. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $p^1 = p$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n, tj. předpokládejme, že číslo p^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2l - 1$. Potom platí

$$p^{n+1} = p^n \cdot p = (2k - 1) \cdot (2l - 1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l - 1) + l(k - 1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo p^{n+1} je liché. ♣

1.2.12. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, značíme $d \mid n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě 1 i n dělitelem n. Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n. Například čísla $2, 3, 5, 7, 11$ jsou prvočísla.

1.2.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l - 1)$.

Řešení. Pomocí úplné matematické indukce nejprve dokážeme existenci příslušných $k, l \in \mathbb{N}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ukážeme i jednoznačnost k a l.

Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1)$. Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l - 1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n + 1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n + 1$ číslo liché, pak existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2l - 1$. Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n + 1$ sudé, pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l' - 1)$. Potom stačí položit $k = k' + 1$ a $l = l'$.

Zbývá dokázat, že čísla k, l jsou pro dané $n \in \mathbb{N}$ určena jednoznačně. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l - 1) = 2^{k'-1}(2l' - 1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l - 1 = 2^{k'-k}(2l' - 1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l - 1 = 2l' - 1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.14. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 sudé, potom je i n sudé.

Řešení. Podle Příkladu 1.2.11 platí, že pokud je n liché, pak je i n^2 liché. Odtud plyne tvrzení metodou nepřímého důkazu. ♣

1.2.15. Příklad (Hippasus[2]). Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (vizte 4.3.14).

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom existují $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.13 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny $\mathbb{N}$ taková, že $p = 2^{k_1-1}(2l_1 - 1)$ a $q = 2^{k_2-1}(2l_2 - 1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2 - 1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1 - 1)$ a $2l_2 - 1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ plyne, že $p^2 = 2q^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 dostáváme, že i p je sudé, a tedy $p^2 = 4k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Z výchozí rovnosti $p^2 = 2q^2$ dostáváme, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 je číslo q sudé. Odtud plyne, že p a q mají společného dělitele 2. To je ovšem spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ♣

1.2.16. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n + 1)$ sudé.

Řešení. Provedeme důkaz rozborem případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n + 1$ sudé, a proto je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.17. Při důkazu výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

1.2.18 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz)**.** Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.19. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

---

[2]Hippasus (5. stol. př. n. l.)

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmů uvedeme v Kapitole 6. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální podle Příkladu 1.2.15. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.11 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} \qquad \text{nebo} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([**7**, **15**]). ♣

1.2.20 (důkazy nerovností)**.** Máme-li dokázat nerovnost $A \le B$ mezi reálnými čísly A a B, často postupujeme tak, že nalezneme reálné číslo C splňující $A \le C$ a $C \le B$. Odtud pak již plyne nerovnost $A \le B$. Při hledání čísla C jde o to, aby důkazy nerovností $A \le C$ a $C \le B$ byly snazší než důkaz nerovnosti $A \le B$. Číslu C někdy říkáme *horní odhad* čísla A a také *dolní odhad* čísla B. Samotnou nerovnost $A \le C$ nebo $C \le B$ také někdy nazýváme *odhadem*.

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu 1.1.17, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku. Doplňující informace jsou uvedeny v Dodatku A. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [**5**].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu 1.1.17 a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a **patří** do množiny A, značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A **nepatří**, zapíšeme jako $a \notin A$.

Množinu definujeme výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M;\ V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$ je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazýváme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem $\emptyset$. Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B nebo množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy také píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,
- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovny, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B nebo A je **vlastní podmnožinou** množiny B, jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Nechť X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X. Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \dots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol $\supset$.

(b) Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Nechť $\mathcal{A} = \{\{1,2,3\},\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5\}\}$. Potom $\bigcup \mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$.

1.3.8. **Rozdílem** množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m$ jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m-tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Přesnou definici pojmu uspořádaná n-tice lze nalézt v Dodatku A. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n.

1.3.10. Poznámka. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0,1]\}$, $B \times A = \{[1,0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova[3] pravidla)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každoua $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

[3]Augustus de Morgan (1806–1871)

1.4.1. Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Píšeme $a\ R\ b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A. Pokud nehrozí nedorozumění, budeme místo slovního spojení „binární relace" používat slovo „relace".

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

1.4.2. Definice. Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže platí
$$\forall x \in A\colon [x, x] \in R,$$
- **symetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$
- **tranzitivní**, jestliže platí
$$\forall x, y, z \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R\big) \Rightarrow [x, z] \in R,$$
- **antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$
- **slabě antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R\big) \Rightarrow x = y.$$

1.4.3. Definice. Nechť A je množina a R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé prvky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.4. Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Toto uspořádání je navíc lineární. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

1.4.5. Nechť X je množina. Pak relace
$$R = \big\{[A, B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X);\ A \subset B\big\}$$
je uspořádání na $\mathcal{P}(X)$. Pokud má X alespoň dva prvky, pak toto uspořádání není lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

1.4.6. Příklad. Na množině $\mathbb{N}^2$ definujeme lexikografické uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ následujícím způsobem

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow \big(n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)\big).$$

Ověřte, že relace $\leq_{\text{lex}}$ je opravdu uspořádání.

Řešení. Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a proto $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Nechť $[n_1, n_2]$, $[m_1, m_2]$, $[k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňují $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. ♣

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.7. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.8. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

1.4.9. Poznámka. V předchozích dvou definicích jsme použili symbol $\leq$, který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.10. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní závorou. Supremum a infimum množiny A nemusejí existovat, pokud však existují, jsou určena jednoznačně.

Odvoďme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Nechť g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání $\leq$ na množině X. Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A. Podle vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání pak plyne $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání $\leq$) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A, značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uveďme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.11. Příklad. Nechť $\leq_{\text{lex}}$ je lexikografické uspořádání na množině $\mathbb{N}^2$ (vizte Příklad 1.4.6). Dokažte, že supremum množiny $A = \{[1, n] \in \mathbb{N}^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2, 1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1, n] \leq_{\text{lex}} [2, 1]$, čímž je ověřena podmínka (a) z definice suprema. Uvažujme prvek $[a, b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$, nebo $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n, neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ dostáváme $[2, 1] \leq_{\text{lex}} [a, b]$. Tím je ověřena i podmínka (b) z definice suprema. ♣

1.4.12. Věta. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $M \subset X$ je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny M. Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Důkaz. Množina M je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$, neboť $\inf M$ je dolní závorou M. Dále platí $a \leq \sup M$, neboť $\sup M$ je horní závorou M. Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf M \leq \sup M$. ■

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.13. Definice. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon \Big(\big([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F\big) \Rightarrow y_1 = y_2\Big).$$

1.4.14. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme je $F(x)$.

1.4.15. Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon F(x) = y\}.$$
- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{H}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon F(x) = y\}.$$
- **Grafem** zobrazení F nazýváme množinu
$$\operatorname{graf}(F) = \big\{[x, y] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\big\}.$$

1.4.16. (a) Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu tedy ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvkům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B. V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D, pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F, které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

1.4.17. Označení. Nechť A a B jsou množiny. Pak symbol $F\colon A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny** A **do množiny** B. Na rozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B, kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A, je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A.

1.4.18. Zobrazení $F\colon A \to B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:
$$x \mapsto (x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$x \mapsto x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.19. Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a nechť M a P jsou množiny.

- **Obrazem množiny** M při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{y \in B;\ \exists x \in M\colon x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x) = y\},$$
kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem množiny** P při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{x \in A;\ f(x) \in P\},$$
kterou značíme $f^{-1}(P)$.

1.4.20. Definice. Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y),$$
- „**na**“ (**surjektivní**), jestliže platí
$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y,$$
- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné zobrazení**), jestliže je prosté a „na“.

1.4.21. Abychom mohli říci, že nějaké zobrazení je „na“, musí být zadána cílová množina B. Odtud vyplývá, že pojmy surjektivity a bijektivity zobrazení zavedené v Definici 1.4.20 představují vlastnosti zobrazení f a zároveň množiny B.

1.4.22. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Potom přímo z definic dostáváme, že f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.23. Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C. Zobrazení g značíme $f|_C$.

1.4.24. Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

1.4.25. Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}\colon f(A) \to A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

1.4.26. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.27 (sjednocení a průnik indexovaného systému)**.** Nechť X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin**. Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ \exists \alpha \in I\colon A = A_\alpha\}$. Pak množinu $\bigcup \mathcal{A}$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap \mathcal{A}$ označujeme $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme definice dvou typů zobrazení, se kterými budeme často pracovat.

1.4.28. Definice. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.4.29. Posloupnost může být definována také **rekurentně**. Mějme neprázdnou množinu A. Při rekurentním zadání posloupnosti je obvykle explicitně předepsán člen $a_1 \in A$ nebo několik prvních členů $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a je stanoven předpis, podle kterého je možné pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j > n$, určit hodnotu $a_{j+1} \in A$ na základě znalosti hodnoty a_j, případně některých dalších již známých hodnot a_k, kde $k \leq j$. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti je ověřena ve Větě B.1.44.

Nejčastější způsob zadání rekurentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vypadá následovně. Je dána neprázdná množina A a zobrazení $g\colon A \to A$. Prvek $x_1 \in A$ je dán a $x_n = g(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Příkladem takové posloupnosti je posloupnost definována předpisem $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$, neboť stačí položit $A = \mathbb{R}$ a $g(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

1.5. Množina reálných čísel

Vlastnost existence suprema.

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku B. V dalším výkladu vystačíme se středoškolskými pojmy, které doplníme o vlastnost existence suprema. V Definicích 1.4.7 a 1.4.8 jsme zavedli pojem horní závory, dolní zavory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní tyto pojmy použijeme pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním $\leq$. Vlastnost existence suprema reálných čísel lze pak formulovat následovně.

$$\text{Každá neprázdná shora omezená podmnožina } \mathbb{R} \text{ má supremum.} \tag{1.7}$$

Množina reálných čísel spolu s jejím uspořádáním a s operacemi sčítání a násobení je zkonstruována tak, že právě uvedenou vlastnost má. Vlastnost suprema je důležitá, neboť některé hlubší věty o reálných číslech bychom bez ní nemohli dokázat.

Vlastnosti početních operací a uspořádání. V tomto textu předpokládáme znalost základních pravidel pro práci s uspořádáním reálných čísel a s operacemi sčítání a násobení. V dalším si však některé výsledky připomeneme a také zavedeme značení, které budeme používat.

1.5.2. Označení. (a) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^{n} a_i$ značíme součet všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0.$$

(b) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^{n} a_i$ značíme součin všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = 1.$$

Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$

Pokud $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případě, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k, předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

1.5.3. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n+1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ jsou přirozená čísla a $a_{n_1}, \dots, a_{n_3}$ jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostačující.

Uveďme následující pozorování, které je užitečné při práci se součty reálných čísel.

1.5.4. Nechť $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla $a_m, \dots, a_n$.

1.5.5. Věta (binomická věta)**.** Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.8}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^0 = 1,$$
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Odtud dostáváme (1.8) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.8) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Podle pozorování v 1.5.4 obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

■

Následující příklad obsahuje zobecnění známých vztahů $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

1.5.6. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned}(a-b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k} \\ &= a^n + \sum_{k=2}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - b^n \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - b^n \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

♣

1.5.7. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.5.6 pro $a = 1, b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n+1$. Pak s pomocí 1.5.4 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1-q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1 - q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1 - q$. ♣

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.5.8. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.5.9. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $\big||x|\big| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon\ |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu** x **od bodu** y.

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.5.10. Věta (trojúhelníková nerovnost)**.** Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b| . \tag{1.9}$$

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Z 1.5.9(f) okamžitě vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a+b \leq |a|+|b|$. Opět z 1.5.9(f) snadno vyplývá, že platí $|a| \geq -a$ a $|b| \geq -b$. Odtud dostáváme $-(a+b) \leq |a|+|b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a + b| = a + b$ nebo $|a + b| = -(a + b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.9) dokázána. ■

1.5.11. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| . \tag{1.10}$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| . \tag{1.11}$$

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.9) nejprve $a = y$, $b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.9) dále položme $a = x$, $b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností již plyne (1.10).

(b) V (1.9) položme $a = x - z$, $b = z - y$, a dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.5.12. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.11).

1.5.13. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a-b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a-b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$. Odtud vyplývá $0 < a-b < \frac{1}{2}(a-b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b-a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ∎

Další vlastnosti suprema a infima.

1.5.14. Uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M : G' < x$.

Pokud je totiž G supremem množiny M, pak je G horní závorou M, a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M. Odtud plyne, že existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$. Tím je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M. Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M. Chceme ukázat, že platí $G \leq G'$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání $\leq$ dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M.

Zdůrazněme, že linearitu uspořádání $\leq$ jsme využili v okamžiku, kdy jsme z předpokladu, že neplatí $G \leq G'$ odvodili nerovnost $G' < G$. Pro obecné uspořádání takové odvození nelze provést.

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(c) g je dolní závorou M,
(d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g < g'\ \exists x \in M : x < g'$.

1.5.15. Věta (o existenci infima)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a označíme-li

$$-M = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in M\},$$

pak platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny M. Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z 1.7 plyne existence suprema množiny $-M$, které označíme symbolem G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.5.14.

Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou množiny M. Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.5.14 tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.5.14. Tím je důkaz proveden. ∎

1.5.16. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že a je **největším prvkem** (**maximem**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.
- Řekneme, že b je **nejmenším prvkem** (**minimem**) množiny M, jestliže $b \in M$ a b je dolní závorou množiny M.

1.5.17. Pokud maximum a minimum množiny M existují, pak jsou určeny jednoznačně. Má-li totiž množina M dvě maxima G_1, G_2, pak G_1 i G_2 jsou horní závory M. Platí tedy $G_1 \leq G_2$ a $G_2 \leq G_1$, a proto $G_1 = G_2$. Obdobně se dokáže jednoznačnost minima. Minimum a maximum množiny M značíme po řadě $\min M$ a $\max M$.

1.5.18. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

(a) Má-li množina M maximum, pak má i supremum, které je rovno jejímu maximu.
(b) Má-li množina M minimum, pak má i infimum, které je rovno jejímu minimu.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $G = \max M$. Pak je G horní závorou M, a tedy je splněna podmínka (a) z 1.5.14. Je-li nyní $G' < G$, pak G je prvek M větší než G', a tedy je splněna i podmínka (b) z 1.5.14. Proto je číslo G supremem množiny M.

Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. ■

1.5.19. Příklad. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A.

Řešení. Budeme postupovat rozborem případů. Z linearity uspořádání $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmě

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.5.20. Označení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \dots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

1.5.21. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}, \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}, \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}, \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pak množiny (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ a $[a, \infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

1.5.22. Prázdná množina je také interval, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je interval, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je interval, stačí ověřit podmínku (1.12), která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi x a y. Není tedy třeba hledat krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.6.

1.5.23. Lemma. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M \ \forall z \in \mathbb{R}: (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.12}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz Lemmatu 1.5.23. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.12) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.12) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.12). Pokud $M = \emptyset$, pak je M interval. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak k němu nalezneme $x \in M$, $x < z$ (neboť M není zdola omezená) a také $y \in M$, $z < y$ (protože M není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $z < y$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závora M a G je horní závora M. Množina M je tedy interval s krajními body g a G, přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do M.

V ostatních případech, kdy M je omezená pouze zdola a kdy M je omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ∎

1.5.24. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Potom $n + 1 \leq m$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $1 \leq m - n$. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.5.25. Věta (celá část)**.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme jednoznačnost čísla k s uvedenými vlastnostmi. Nechť existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $k \neq j$, $k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x - 1 < j$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, plyne z Věty 1.5.24, že $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. Dokázali jsme tedy, že existuje nejvýše jedno číslo s uvedenými vlastnostmi.

Nyní dokážeme, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ příslušné číslo existuje. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. Číslo x je horní závorou množiny M, a proto je M shora omezená. Ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $x < n$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tedy existuje infimum g množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $g \leq n$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $g \leq n - 1$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $g + 1 \leq n$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná.

Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M. K němu nalezneme $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $G < k + 1$, a tedy $k + 1 \notin M$. Odtud a z toho, že $k \in M$, plyne $k \in \mathbb{Z}$ a $k \leq x < k + 1$. ∎

1.5.26. Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.5.25), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme jej $[x]$.

1.5.27. Věta (Archimédova[4] vlastnost $\mathbb{R}$)**.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Nechť $x \in R$. Nyní stačí položit $n = \max\{[x] + 1, 1\}$. ∎

1.5.28. Lemma. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Dle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A. Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože

$$\forall b \in B : b \text{ je horní závorou } A,$$

platí

$$\forall b \in B :\ \sup A \leq b.$$

Tedy $\sup A$ je dolní závora B, z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ∎

1.5.29. Věta (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.27 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{b-a}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položíme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.5.25 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} < \frac{nb}{n} = b.$$

[4] Archimédés (287 př. n. l. – 212 př. n. l.)

■

1.5.30. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum množiny M.

Důkaz. Jelikož $M \subset \mathbb{N}$, je 1 dolní závorou M. Proto existuje infimum množiny M, které označíme symbolem g. Z definice infima plyne, že existuje $a \in M$ splňující $g \leq a < g + \frac{1}{2}$. Dokážeme, že $a = \min M$. Nechť tedy $b \in M$ je libovolné. Chceme ukázat, že $a \leq b$. Tuto nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme tedy, že $b < a$. Platí $g \leq b$. Protože $a - b$ je kladné celé číslo, platí $a - b \in \mathbb{N}$. Tedy $1 \leq a - b$. Platí tak

$$1 \leq a - b < g + \frac{1}{2} - g = \frac{1}{2}.$$

Tedy $2 < 1$, což je spor s tím, že 1 je nejmenší přirozené číslo. Platí tedy $a \leq b$, a a je tak minimem množiny M. ■

1.5.31. Označení. V dalším výkladu budeme používat i zápisy $x > y$ a $x \geq y$, které po řadě znamenají totéž co $y < x$ a $y \leq x$.

1.6. Konečné a spočetné množiny

Pojem „počet prvků množiny“ je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny“. Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [**5**]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.6.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B, jestliže existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A a B nemají stejnou mohutnost. Značíme $A \prec B$.

1.6.2. Označení. Nechť A je množina. Zobrazení $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ definované předpisem $\mathrm{Id}_A(a) = a$, $a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.6.3. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \preceq A$,
(b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A, a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f: A \to B$ a $g: B \to C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ■

1.6.4. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \approx A$,
(b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,
(c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A, a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B. Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1}. Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a jeho obor hodnot je roven A. Zobrazení $f^{-1}: A \to B$ je tedy „na“. Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina A stejnou mohutnost jako množina B, tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté. Pro každý prvek $c \in C$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je „na“. Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je „na“. Potom platí $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy „na“. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.6.5. Věta (Cantor[5]-Bernstein[6])**.** Nechť X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a zároveň $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma. Připomeňme, že symbol $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (vizte 1.3.3).

1.6.6. Lemma. Nechť X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \tag{1.13}$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

[5]Georg Cantor (1845–1918)
[6]Felix Bernstein (1878–1956)

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice C. Díky (1.13) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A) \subset H(C)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.13) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H\big(H(C)\big)$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ■

Důkaz Věty 1.6.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$. Definujme zobrazení $H\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.6.6, s pomocí kterého nalezneme množinu $C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g\big(Y \setminus f(C)\big).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g\big(Y \setminus f(C)\big)$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$, je následující zobrazení $h\colon X \to Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in X \setminus C. \end{cases}$$ ■

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší“ ve smyslu Definice 1.6.1.

1.6.7. Věta (Cantorova věta). Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ■

1.6.8. Definice. Nechť A je množina. Řekneme, že množina A je

- **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$,
- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.6.9. Lemma. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ právě tehdy, když $m = n$.

Důkaz. Pokud $m = n$, potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ podle Věty 1.6.4(a).

Opačnou implikaci dokážeme pomocí matematické indukce podle m. Předpokládejme, že $m = 1$ a $\{1\} \approx \{1, \dots, n\}$. Potom existuje bijekce $\varphi \colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $\varphi(1) = 1$ a také $\varphi(1) = n$. Musí tedy platit $n = 1$, a proto $m = n$.

Předpokládejme platnost tvrzení pro $m \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m+1\}$. Existuje tedy bijekce $\varphi \colon \{1, \dots, m+1\} \to \{1, \dots, n\}$. Pak existuje jednoznačně určené číslo $k_0 \in \{1, \dots, m+1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi \colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n-1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m+1), & \text{pokud } k = k_0 \text{ a } k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení ψ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n-1\}$. Zobrazení je „na“, neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n-1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$ pro $k, k' \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $k = k_0$, pak $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ a $\psi(k) = \psi(k_0) = \varphi(m+1)$. Díky prostotě φ platí $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě φ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení ψ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n-1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n - 1 = m$, a tedy $n = m + 1$. ■

1.6.10. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno podle Lemmatu 1.6.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.6.11. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven n. Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.6.12. Pokud jsou množiny X a Y konečné a mají stejnou mohutnost, pak jsou obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a počet prvků X a Y je roven 0. Ve druhém případě existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $X \approx \{1, \dots, m\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4 dostáváme $\{1, \dots, m\} \approx \{1, \dots, n\}$, a tedy podle Lemmatu 1.6.9 platí $m = n$, neboli $|X| = |Y|$.

Pokud jsou X a Y konečné a mají stejný počet prvků, pak jsou opět obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a $X \approx Y$. Ve druhém případě existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4 dostáváme $X \approx Y$.

Platí tedy, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

1.6.13. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A.

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi\colon \{1,\dots,n+1\} \to A$. Položme $B = \{\varphi(1),\dots,\varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g'. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.5.19. Dále platí

$$\forall i \in \{1,\dots,n+1\}\colon g \le \varphi(i) \le G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A. Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1,\dots,n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A. Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ∎

1.6.14. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina $\mathbb{N}$ je konečná. Podle Věty 1.6.13 je potom množina $\mathbb{N}$ omezená, a tedy existuje její horní závora v $\mathbb{R}$, kterou označíme K. Potom podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > K$. Tudíž K není horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor. ∎

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do $\mathbb{N}$.

1.6.15. Lemma. Zobrazení $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n,m) = (n+m)^2 + n, \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ pro $(n,m), (n',m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned}(n'+m'+1)^2 > (n'+m')^2 + n' &= \varphi(n',m') = \varphi(n,m)\\ &= (n+m)^2 + n > (n+m)^2.\end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n'+m'+1 > n+m$. Potom máme $n+m \le n'+m'$. Obdobně odvodíme nerovnost $n'+m' \le n+m$. Musí tedy platit $n'+m' = n+m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ∎

1.6.16. Lemma. Nechť A, B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je zobrazení. Pak $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Korektní důkaz se opírá o axiom výběru, což je výrok, jehož platnost při práci s množinami předpokládáme. Zde je jedna z jeho možných formulací:

Je-li $b \mapsto C_b, b \in I$, indexovaný systém neprázdných množin, potom existuje zobrazení $\varphi\colon I \to \bigcup_{b\in I} C_b$ takové, že pro každé $b \in I$ platí $\varphi(b) \in C_b$.

Další vysvětlení je uvedeno v Dodatku B.

Pokud je množina A prázdná, potom tvrzení zřejmě platí. Pokud je množina A neprázdná, potom položíme $I = f(A)$ a $C_b = f^{-1}(\{b\})$ pro $b \in I$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi\colon f(A) \to A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(\{b\})$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f\big(\varphi(b)\big) = f\big(\varphi(b')\big) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. ■

1.6.17. Věta (vlastnosti konečných množin)**.**

(a) Nechť A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je konečná množina, jejímiž prvky jsou konečné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je konečná množina.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom $A_1 \times \cdots \times A_n$ je konečná množina.
(d) Nechť A je konečná množina, B je množina a $f\colon A \to B$ je zobrazení. Potom $f(A)$ je konečná množina.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Nechť A je podmnožina množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$, pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí

$$A = \big(A \cap \{1, \dots, n\}\big) \cup \{n+1\}.$$

Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny $\{1\}$ na množinu A. Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, k\} \to B$. Definujme $\psi\colon \{1, \dots, k+1\} \to A$ předpisem

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n+1 & \text{pro } i = k+1. \end{cases}$$

Pak ψ je bijekce $\{1, \dots, k+1\}$ na A, a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi\colon A \to \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\psi = \varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ a bijekce $\omega\colon \varphi(B) \to \{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \psi$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Nechť tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha\colon C \to \{1, \dots, n\}$, $\beta\colon D \to \{1, \dots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma\colon D \setminus C \to \{n+1, \dots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x)+n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi\colon C \cup D \to \{1, \dots, n+m\}$ definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in C, \\ \gamma(x), & x \in D \setminus C, \end{cases}$$

je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \dots, n+m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C$, $\gamma|_{D\setminus C}$ jsou prostá a

$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \dots, n\} \cap \{n+1, \dots, n+m\} = \emptyset.$$

Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \dots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Množina $C \cup D$ je konečná, neboť podle 1.4.22 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$.

Pokud je množina $\mathcal{A}$ konečná, pak je buď prázdná nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je její sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť tedy $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, kde A_i, $i = 1, \dots, n+1$, jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ konečnou množinou. Pak je ale množina

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cup A_{n+1}$$

konečná dle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Podobně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha\colon A \to \{1, \dots, n\}$, $\beta\colon B \to \{1, \dots, m\}$. Nechť φ je zobrazení z Lemmatu 1.6.15. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a, b) = \varphi(\alpha(a), \beta(b)), \quad (a, b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \dots, (n+m)^2 + n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Díky Lemmatu 1.6.16 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. existuje prosté zobrazení $\psi\colon f(A) \to A$. Potom je množina $\psi(f(A))$ podmnožinou konečné množiny A, a je tedy podle (a) konečná. Množina $f(A)$ je tedy konečná, neboť $f(A) \approx \psi(f(A))$. ■

1.6.18. Lemma. (a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \preceq \mathbb{N}$.

(b) Nechť A je neprázdná množina. Potom je množina A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to A$, které je „na“.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě tedy platí $A \preceq \mathbb{N}$.

Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \preceq \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $f : A \to \mathbb{N}$ je prosté zobrazení. Množina $f(A)$ je buď omezená, nebo neomezená. Předpokládejme nejprve, že nastává první možnost. Potom existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, které je horní závorou množiny $f(A)$. Podle Věty 1.5.27 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K < n$. Potom platí $f(A) \subset \{1, \dots, n\}$. Podle Věty 1.6.17(a) je $f(A)$ konečná množina. Vzhledem k tomu, že $A \approx f(A)$ podle 1.4.22, dostáváme, že množina A je konečná, a tedy spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není omezená. Induktivně budeme konstruovat posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Položme $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definována čísla $n_1, \dots, n_k$. Množina $f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ je neprázdná, neboť $f(A)$ je neomezená. Položíme $n_{k+1} = \min\bigl(f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}\bigr)$. Tím je konstrukce posloupnosti provedena podle Věty **??**. Zobrazení $\varphi \colon k \mapsto n_k, k \in \mathbb{N}$, je podle konstrukce prosté a platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Podle 1.4.22 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle 1.4.22. Množina A je tedy spočetná.

(b) $\Rightarrow$ Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g \colon A \to \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g), \\ a, & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $f(\mathbb{N}) = A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $f : \mathbb{N} \to A$ je zobrazení, které je „na“. Potom podle 1.6.16 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ∎

1.6.19. Věta (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) Nechť A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom je množina B spočetná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ spočetná.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou spočetné množiny. Potom je množina $A_1 \times \dots \times A_n$ spočetná.
(d) Nechť A je spočetná množina, B je množina a $f : A \to B$ je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ spočetná.

Důkaz. (a) Nechť $B \subset A$ a A je spočetná. Potom $\mathrm{Id}_B : B \to A$ je prosté zobrazení, a platí tedy $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$ podle Lemmatu 1.6.18(a), dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.6.3(b) a množina B je tedy spočetná podle Lemmatu 1.6.18(a).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A};\ A \neq \emptyset\}$. Potom $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.6.18(b) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \tilde{\mathcal{A}}$, které je „na“. Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ existuje zobrazení $g_A\colon \mathbb{N} \to A$, které je „na“. Definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n,m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je „na“. Pro každé $x \in \bigcup \mathcal{A}$ totiž existuje $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n,m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n,m) = g_{f(n)}(m) = g_A(m) = x$.

Podle Lemmat 1.6.15 a 1.6.18(a) je množina $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ spočetná, a tedy existuje zobrazení h množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (Lemma 1.6.18(b)). Potom je zobrazení $\psi \circ h$ zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\bigcup\mathcal{A}$, což podle Lemmatu 1.6.18(b) dokazuje spočetnost množiny $\bigcup\mathcal{A}$.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.6.17 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a\in A}\{a\}\times B$. Zřejmě platí $\{a\}\times B \approx B$. Množina $A\times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Nechť A je spočetná množina a $f\colon A \to B$ je zobrazení. Víme z Lemmatu 1.6.16, že platí $f(A) \preceq A$. Protože $A \preceq \mathbb{N}$, dostáváme podle Věty 1.6.3(b) $f(A) \preceq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$. ■

1.6.20. Příklad. Dokažte, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná, neboť je sjednocením množiny kladných čísel, množiny záporných čísel a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.6.19(c) spočetná. Zobrazení $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p,q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.6.19(d) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.6.21. Příklad. Nechť $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Dokažte, že potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do spočetné množiny $\mathbb{Q}$, tedy $\mathcal{J}$ je také spočetná. ♣

1.6.22. Příklad. Nechť A je nekonečná množina. Dokažte, že potom A obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Řešení. Definujme induktivně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně. Zvolme $a_1 \in A$ libovolně. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ jsme již definovali prvky $a_1,\dots,a_n$. Množina $A \setminus \{a_1,\dots,a_n\}$ je neprázdná, neboť A je nekonečná. Prvek a_{n+1} zvolme libovolně z této množiny. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná dle Věty 1.6.14, a tím je důkaz proveden. ♣

1.6.23. Poznámka. Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v Příkladu 3.8.9 a jiným způsobem v paragrafu 10.10.30.

1.7. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen funkce) je zobrazení $f: M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

V tomto oddílu uvedeme definice některých pojmů, které jsou důležité při zkoumání reálných funkcí. Dále se seznámíme s elementárními funkcemi, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, odmocninami, obecnou mocninou, goniometrickými funkcemi a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrny jejich základních vlastností, ze kterých lze odvodit všechna početní pravidla středoškolské matematiky. V Kapitole 6 pak několik takových odvození provedeme.

1.7.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je

- **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.7.2. Definice. Monotónní funkcí (respektive **ryze monotónní funkcí**) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (respektive rostoucí nebo klesající) na J.

1.7.3. Definice. Nechť $f: A \to \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **shora omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

1.7.4. Definice. Nechť $f: A \to \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.7.5 (algebraické operace s funkcemi)**.** Nechť M je množina, $f: M \to \mathbb{R}$, $g: M \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg, cf na množině M předpisy

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in M,\\
(fg)(x) &= f(x)g(x), \quad x \in M,\\
(cf)(x) &= cf(x), \quad x \in M.
\end{aligned}$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in M.$$

1.7.6. Věta. Nechť M je neprázdná množina a $f: M \to \mathbb{R}$ a $g: M \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezená, potom
$$\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezená, potom
$$\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B. Nechť $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f+g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Důkaz tvrzení (b) je obdobný důkazu tvrzení (a). ■

1.7.7. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax + b$. Takto definovaná funkce se nazývá **afinní**. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak, než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice.

1.7.8. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Je-li $a \neq 0$, pak se takto definovaná funkce nazývá **kvadratická**.

1.7.9. Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$
kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu** P. **Nulovým polynomem** rozumíme konstantní nulovou funkci definovanou na $\mathbb{R}$.

Důkaz následujícího tvrzení a důkaz tvrzení z dalšího paragrafu jsou uvedeny v Dodatku **??**. Pro každý nenulový polynom existují *jednoznačně určená* čísla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, taková, že
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Pak říkáme, že **stupeň polynomu** P je roven n. Stupeň nulového polynomu definujeme jako -1. Stupeň polynomu P značíme $\operatorname{st} P$.

1.7.10. Reálným kořenem polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$. Nechť P je polynom tvaru (1.14), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P.

Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty reálných kořenů pomocí následujících vzorců. Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen $-\frac{b}{a}$. Odvození je snadné. Uvažujme rovnici
$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.15}$$
kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Označme $D = b^2 - 4ac$. Číslo D nazýváme **diskriminantem** rovnice (1.15). Pokud $D > 0$, pak má rovnice právě dva reálné kořeny $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ a

$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jeden reálný kořen $\frac{-b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá reálné kořeny.

1.7.11 (dělení polynomů)**.** Nechť P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$ a $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$.

Polynomy R a Z hledáme pomocí následujícího algoritmu. Pokud $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$, pak stačí položit R rovno nulovému polynomu a $Z = P$. Pokud $\operatorname{st} Q \leq \operatorname{st} P$, pak nalezneme takové $a_1 \in \mathbb{R}$ a $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že $\operatorname{st}(P - a_1 x^{k_1} Q) < \operatorname{st} P$. Tento krok potom opakujeme, přičemž místo polynomu P uvažujeme polynom $P - a_1 x^{k_1} Q$, pokud nemá tento polynom stupeň menší než polynom Q. Tímto způsobem obdržíme $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že platí $\operatorname{st}(P - a_1 x^{k_1} Q - a_2 x^{k_2} Q - \dots - a_l x^{k_l} Q) < \operatorname{st} Q$. Potom položíme $R(x) = a_1 x^{k_1} + \dots + a_l x^{k_l}$ a $Z = P - RQ$.

1.7.12. Příklad. Vydělte polynom $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ polynomem $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení. Budeme postupovat podle algoritmu uvedeného v 1.7.11. Polynom Q vynásobíme výrazem $2x$ a výsledek odečteme od P. Obdržíme

$$P_1(x) = P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 - 2x(x^2 + x + 2) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Polynom Q vynásobíme výrazem 2 a výsledek odečteme od P_1. Obdržíme

$$P_2(x) = P_1(x) - 2Q(x) = 2x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + x + 2) = -7x - 2.$$

Potom máme

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - 7x - 2.$$

♣

1.7.13. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom k**-tou odmocninou** nazýváme inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^k$, $x \in [0, \infty)$, je-li k sudé, a k $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, je-li k liché. Značíme $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Definice je korektní, neboť v obou případech uvažujeme inverzní funkci k funkci, která je na svém definičním oboru rostoucí.

1.7.14. Racionální funkcí rozumíme každou funkci tvaru $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) = 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě $\mathbb{R}$ vyjma nejvýše konečně mnoha bodů (vizte 1.7.10).

1.7.15. Exponenciální funkce, kterou budeme značit exp, má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven $(0, \infty)$. Tato funkce splňuje následující podmínky:

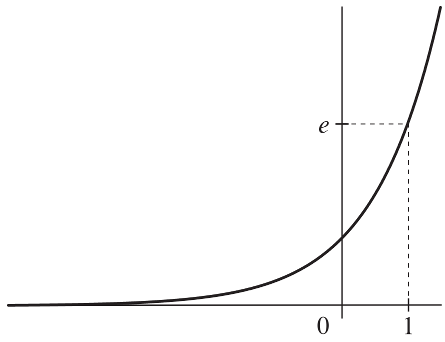
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x) \geq 1 + x$.

Odtud lze odvodit následující užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- exp je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp(nx) = (\exp(x))^n$,

- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\colon\ \exp(x) > 1.$

Hodnotu funkce exp v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem.[7]



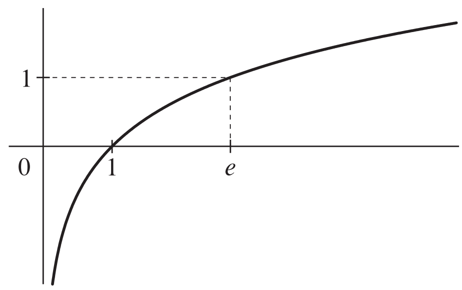
Obrázek 1. Graf exponenciální funkce

1.7.16. Logaritmická funkce, kterou budeme značit log, je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0,\infty)$ a obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Tato funkce splňuje následující podmínky:

- $\forall x, y \in (0,\infty)\colon\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0,\infty)\colon\ \log(x) \le x - 1$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce:

- funkce log je rostoucí na intervalu $(0,\infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0,\infty)\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \log(x^n) = n \log x$,
- $\forall x \in (1,\infty)\colon\ \log(x) > 0$.



Obrázek 2. Graf funkce logaritmus

[7] Leonhard Euler (1707–1783)

1.7.17. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** a^x předpisem $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.5.2(b). Pokud je $a > 0$, máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp\bigl(n \log(a)\bigr) = \exp\bigl(\log(a^n)\bigr) = a^n$. Funkce a^x je rostoucí na $\mathbb{R}$ pro $a \in (1, \infty)$ a klesající na $\mathbb{R}$ pro $a \in (0, 1)$.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ platí

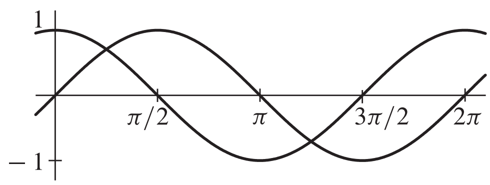
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Oba vztahy snadno ověříme použitím základních vlastností exponenciální a logaritmické funkce. Platí

$$\begin{aligned}
a^{x+y} &= \exp\bigl((x+y)\log(a)\bigr) = \exp\bigl(x\log(a) + y\log a\bigr) \\
&= \exp\bigl(x\log(a)\bigr) \cdot \exp(y \log a) = a^x \cdot a^y, \\
(a^x)^y &= \exp\bigl(y \log(a^x)\bigr) = \exp\bigl(y \log(\exp(x \log a))\bigr) \\
&= \exp(yx \log a) = \exp(xy \log a) = a^{xy}.
\end{aligned}$$

1.7.18 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)**.** Funkce **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, mají definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven intervalu $[-1, 1]$. Tyto funkce splňují následující podmínky:

- funkce sin a cos jsou 2π-periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,
- existuje jednoznačně určené kladné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

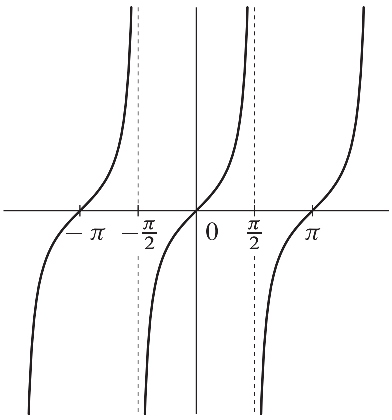


Obrázek 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

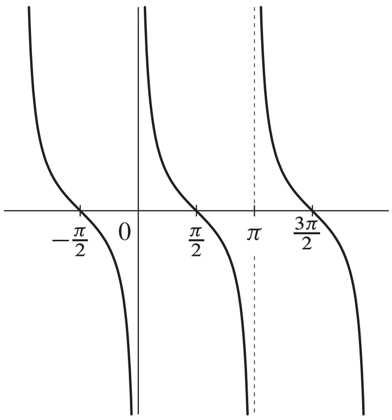
1.7.19 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens)**.** Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
\operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

- funkce tg a cotg jsou π-periodické,
- $\forall x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\colon\ \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$.



Obrázek 4. Graf funkce tangens



Obrázek 5. Graf funkce kotangens

1.7.20. Následující tabulka obsahuje funkční hodnoty goniometrických funkcí v některých význačných bodech.

funkce	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.7.21. Cyklometrické funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

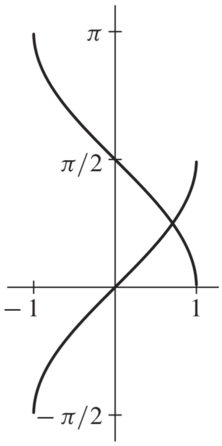
$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Uvedené definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté.

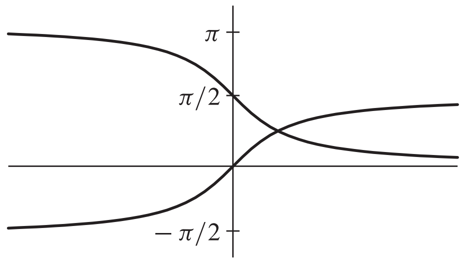
Nyní uvedeme základní vlastnosti cyklometrických funkcí:

- funkce arcsin je lichá,
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(1) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 1]\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

- $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- arctg je rostoucí a lichá funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
- $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$,
- arccotg je klesající funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



Obrázek 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.8. Teoretické a početní příklady

1.8.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon). \tag{1.16}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.29. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.29 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{gathered}
\neg\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)\\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \neg\big(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)\\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \neg\big(\forall x \in \mathbb{R}\colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)\\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\colon \neg\big(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon\big)
\end{gathered}$$

Podle Věty 1.1.12(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\colon (0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x-1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x-1| < \delta$. Navíc pro $|x-3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x-3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.16) neplatí. ♣

1.8.2. Příklad. Nechť $V(x), x \in M$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists! x \in M: V(x) \tag{1.17}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.29.

Řešení. Výrok (1.17) lze zapsat ve tvaru

$$\Big(\exists x \in M: V(x)\Big) \wedge \Big(\forall y, z \in M: \big((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z\big)\Big) \tag{1.18}$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle 1.1.29 a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.18) ve tvaru

$$\Big(\forall x \in M: \neg V(x)\Big) \vee \Big(\exists y, z \in M: \big(V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z\big)\Big).$$

Neformálně lze poslední výrok vyjádřit takto: buď pro žádné $x \in M$ neplatí $V(x)$, nebo existují dvě různá $y, z \in M$, pro která platí $V(y)$ a $V(z)$. ♣

1.8.3. Příklad. Nechť $A = \{x \in \mathbb{Q}\colon x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$. Pak A je shora omezená podmnožina v $\mathbb{Q}$, která v $\mathbb{Q}$ nemá supremum, tj. neexistuje racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ s vlastnostmi z Definice 1.4.8.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$, a shora omezená, a to například číslem 2. Pro každé číslo $x \in \mathbb{Q}$, které je větší než 2, totiž platí nerovnosti $2 \leq 2^2 \leq x^2$, a tedy takové x není prvkem množiny A.

Postupujme nyní sporem a předpokládejme existenci čísla $q \in \mathbb{Q}$, které by bylo nejmenší horní závorou množiny A. Ukážeme, že pak platí $q^2 = 2$. Pokud by totiž bylo $q^2 < 2$, tj. $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.5.29 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \leq q'$ a $(q')^2 < 2$, tj. $q' \in A$. To je ovšem ve sporu s nerovností $q < q'$, tedy s faktem, že q je horní závora množiny A.

Pokud by bylo $q > \sqrt{2}$, opět díky Větě 1.5.29 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \leq q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \leq (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní závora množiny A, která je ostře menší než q, což je spor s faktem, že q je nejmenší horní závora množina A.

Zbývá tedy jediná možnost, totiž že $q^2 = 2$. To je ale spor s Větou 1.2.15, a proto supremum množiny A v množině racionálních čísel neexistuje. ♣

1.8.4. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z binomické věty (Věta 1.5.5), neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

♣

1.8.5. Příklad (součet aritmetické řady)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n. \tag{1.19}$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^{1}(ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Předpokládejme platnost vztahu (1.19) pro pevně dané n, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+2)a + 2b\big)(n+1). \tag{1.20}$$

Levou stranu (1.20) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \left(\sum_{i=1}^{n} (ai + b)\right) + \big(a(n+1) + b\big).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(ai+b) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}(ai+b)\Big) + \big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+1)a+2b\big)n+\big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+2)a+2b\big)(n+1).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.8.6. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n+1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.8.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Tvrzení platí pro $n = 3$, neboť

$$2 \cdot 3^2 = 18 \geq 16 = (3+1)^2.$$

Předpokládejme nyní platnost nerovnosti pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Předpokládáme tedy $2n^2 \geq (n+1)^2$. Potom

$$\begin{aligned}2(n+1)^2 &= 2n^2 + 4n + 2 \geq (n+1)^2 + 4n + 2\\ &= n^2 + 6n + 3 = (n^2 + 4n + 4) + (2n - 1)\\ &= (n+2)^2 + (2n-1) \geq (n+2)^2.\end{aligned}$$

Tím je dokončen indukční krok. Z principu matematické indukce nyní vyplývá požadované tvrzení. ♣

1.8.8. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Opět použijeme princip matematické indukce popsaný v paragrafu 1.2.7, přičemž v prvním kroku dokážeme výrok pro $n = 4$. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$ a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.8.7 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle (modifikovaného) principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.8.9 (varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n) \tag{1.21}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.21). Matematickou indukcí ověřme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(2n-1). \tag{1.22}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Předpokládejme, že tvrzení (1.22) platí pro n, tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v paragrafu 1.2.7, dokázán výrok (1.22).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(2n). \tag{1.23}$$

Nyní ověříme platnost (1.21). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.10 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k-1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.21) podle (1.22) a ve druhém případě platí (1.21) podle (1.23). Tím je tvrzení (1.21) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.8.10. Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2,\infty)\colon (1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.24}$$

Řešení. Matematickou indukcí ve variantě z 1.8.9 dokážeme platnost (1.24) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ vztah (1.24) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.24) z následujícího odhadu:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Tím je ověřen bod (a) v 1.8.9. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.24). Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2\\ &= 1 + (n+2)x + (2+x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2+x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$. Tím je dokázána implikace (b) podle 1.8.9, a tedy i Bernoulliova nerovnost. ♣

1.8.11. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) platí

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

odtud plyne $2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost, obdržíme

$$\begin{aligned}(n+1)! = n! \cdot (n+1) &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) \\ &= \frac{2 \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

♣

1.8.12 (další varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon V(n) \tag{1.25}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
(c) pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (a)–(c) plyne (1.25). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N} \colon V(2^m). \tag{1.26}$$

Z (a) a (b) plyne platnost $V(2)$. Nechť nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (b). Tím je tvrzení (1.26) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.25) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N};\ j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B. Množina B je podmnožinou $\mathbb{N}$, takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.8.6 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$, takže $n_0 \in B$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.6.13. Označme $G = \max B$. Platí tudíž $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.26) platí $V(2^{n_0})$, a tedy $2^{n_0} \notin B$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G+1)$ platí. Podle (c) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.8.13. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem)**.** Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.27}$$

Řešení. Postupně ověříme (a)–(c) z 1.8.12, přičemž $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.27).

(a) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(b) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.27) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.9

$$\frac{A + B}{2} \geq \sqrt{AB}. \tag{1.28}$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n-tici $x_1, \ldots, x_n$ a poté pro n-tici $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Nerovnost (1.28) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.29) dává

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (b).

(c) Předpokládejme, že platí $V(n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n-tici čísel $y_1, \ldots, y_n$ definovanou předpisem

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne, že

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}. \tag{1.30}$$

Dále platí

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{(n-1)D + D}{n} = D \qquad \text{a}$$
$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}.$$

Pak můžeme přepsat (1.30) ve tvaru

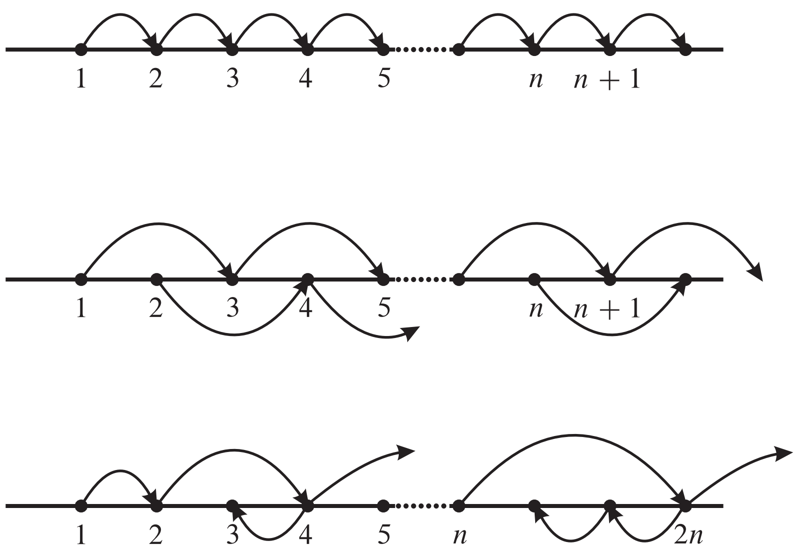
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\,\sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (c) varianty matematické indukce z 1.8.12. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. ♣

1.8.14. Poznámka. Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.8.9 a 1.8.12 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



Obrázek 8.

1.8.15. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci (vizte 1.2.8). Číslo 2 je prvočíslo, a proto tvrzení platí. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Nechť D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 1 < d < n+1$, která dělí $n+1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n+1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov, neboť prvočíslo $n+1$ dělí $n+1$. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Vezměme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p, které dělí d. Protože d dělí $n+1$, dělí p také $n+1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.8.16. Příklad (Eukleidés[8]). Ukažte, že množina prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.8.15). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i(n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel $p_1, \ldots, p_k$. To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.8.17. Příklad (vlastnosti průniku). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
(b) $A \cap A = A$,
(c) $A \cap B = B \cap A$,
(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(e) $A \cap B \subset A$,
(f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
(g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cap B) \subset (C \cap D)$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.8.18. Příklad (vlastnosti sjednocení). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cup A = A$,
(b) $A \cup A = A$,
(c) $A \cup B = B \cup A$,
(d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $A \subset A \cup B$,
(f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,

[8]Eukleidés (asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l.)

(g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definic sjednocení a inkluze. ♣

1.8.19. Příklad (obraz množiny a množinové operace)**.** Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset X$.

(a) Dokažte, že pokud $A \subset B$, pak platí $f(A) \subset f(B)$.
(b) Dokažte, že platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(c) Dokažte, že platí $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dokažte, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, platí podle již dokázaného tvrzení (a), že $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, potom existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme podle tvrzení (a), že $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dokážeme, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností. Uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f : X \to Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Pak $A \cap = \emptyset$, a tedy $f(A) = \emptyset$, ale $f(A) = f(B) = \{0\}$, takže $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Tudíž $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ♣

1.8.20. Příklad (vzor množiny a množinové operace)**.** Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset Y$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
(b) Platí $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(c) Platí $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
(d) Platí $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.8.21. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru)**.** Nechť X, Y jsou množiny, $f: X \to Y$ je zobrazení.

(a) Dokažte, že pro každé $A \subset X$ platí $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) Nechť $\mathcal{H}(f) = Y$. Dokažte, že pro každé $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
(c) Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset X$ platí $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
(d) Dokažte, že f je „na" právě tehdy, když pro každou množinu $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in A$, potom $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Nechť $B \subset Y$. Pokud $y \in B$, pak existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$, neboť $\mathcal{H}(f) = Y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Nechť $f: X \to X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$.

(d) Důkaz je podobný jako v (c). ♣

1.8.22. Příklad (hustota $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.29 existuje racionální číslo $y \in (a, b)$. Podle téže věty aplikované na interval (y, b) nalezneme racionální číslo $y' \in (y, b)$. Položme $z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}}$. Protože $\sqrt{2} > 1$, máme

$$a < y < z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}} < y + (y'-y) = y' < b.$$

Kdyby bylo číslo z racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{y'-y}{z-y}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.15. Číslo z je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ■

1.8.23. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.5.18 také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M. Zdá se, že čísla z množiny M mohou být „libovolně malá", a tedy žádné kladné číslo by nemělo být dolní závorou M. Proto je 0 vhodným kandidátem na infimum M. Ukážeme, že opravdu platí $\inf M = 0$. Ověříme platnost podmínek (c) a (d) z 1.5.14.

Platnost první podmínky plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \geq 0$. Pro ověření druhé podmínky musíme ukázat, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists x \in M: y > x.$$

Mějme tedy $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, dáno. Z Věty 1.5.27 plyne existence přirozeného čísla n splňujícího $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.5.14, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.8.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.5.18 také $\inf M = 0$. Snadno odhadneme, že supremem množiny M bude patrně 1. Tuto domněnku nyní dokážeme.

Platnost podmínky (c) z 1.5.14 plyne přímo z definice intervalu. Pro ověření podmínky (d) dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists x \in [0, 1) \colon y < x.$$

Nechť tedy $y \in \mathbb{R}$, $y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1 + y)\}$. Díky tomu, že platí $y < 1$, dostáváme $0 \leq x < 1$, a tedy $x \in [0, 1)$. Z nerovnosti $y < 1$ dále plyne odhad $y < \frac{1}{2}(1 + y)$, a proto $y < x$. Tím je podmínka (d) ověřena, a tedy skutečně $\sup M = 1$. ♣

1.8.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ je hodnota zlomku $\frac{p}{p+q}$ kladné číslo menší než 1.

Proveďme nyní následující neformální úvahu. Nechť $p = 1$ a q je „velké" číslo. Pak zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude „blízko" 0. Obdobně, je-li $q = 1$ a p je „velké" číslo, pak je zlomek $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}$ „blízko" 1. Jako rozumná se tedy jeví domněnka, že $\inf M = 0$ a $\sup M = 1$.

Dokážeme nejprve $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.5.14 plyne z nerovnosti $\frac{p}{p+q} \geq 0$, která platí pro každé $p, q \in \mathbb{N}$. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists p, q \in \mathbb{N} \colon y > \frac{p}{p+q}.$$

Mějme $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, dáno. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.5.27 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y-1}$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Tím jsem dokončili důkaz, že $\inf M = 0$.

Nyní ověříme, že $\sup M = 1$. Protože platí $\frac{p}{p+q} \leq 1$ pro každé $p, q \in \mathbb{N}$, je podmínka (a) z 1.5.14 splněna. Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists p, q \in \mathbb{N} \colon y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$. Z Věty 1.5.27 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

1.8.26. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

(a) Dokažte, že funkce f je klesající na $(0, 1]$, rostoucí na $[1, \infty)$ a v bodě 1 má minimum.
(b) Dokažte, že funkce $g = f|_{(0,1]}$, $h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
(c) Dokažte, že platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Nalezněte inverzní funkci k funkcím g a h.

(d) Nalezněte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.

Řešení. (a) Vezměme $0 < x < y \leq 1$. Pak je nerovnost $f(x) > f(y)$ ekvivalentní s nerovností

$$\frac{(y-x)(1-xy)}{xy} > 0,$$

která platí díky nerovnosti $xy < y^2 \leq 1$. Obdobně ověříme, že f roste na intervalu $[1, \infty)$. V bodě 1 má tedy minimum, jehož hodnota je $f(1) = 2$.

(b) Funkce g je klesající na $(0, 1]$ a funkce h rostoucí na $[1, \infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Protože je g klesající na $(0, 1]$ a $g(1) = f(1) = 2$, zjevně platí $\mathcal{H}(g) \subset [2, \infty)$. Mějme nyní dáno $y \in [2, \infty)$. Pak rovnice $x + \frac{1}{x} = y$ má dle 1.7.10 dva kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2}\Big(y + \sqrt{y^2 - 4}\Big), \quad x_2 = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2 - 4}\Big).$$

Protože hledáme x splňující $g(x) = y$ v intervalu $(0, 1]$, je tímto hledaným x číslo x_2, neboť $x_2 \in [0, 1]$, jak lze snadno ověřit. Tedy $\mathcal{H}(g) = [2, \infty)$.

Pro $y \in [2, \infty]$ jsem nalezli $x = \frac{1}{2}\big(y - \sqrt{y^2 - 4}\big)$ splňující $g(x) = y$. Protože již víme, že $g\colon (0, 1] \to [2, \infty)$ je bijekce, platí

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2 - 4}\Big), \quad y \in [2, \infty).$$

Obdobně odvodíme, že $\mathcal{H}(h) = [2, \infty)$ a $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\big(y + \sqrt{y^2 - 4}\big)$ pro $y \in [2, \infty)$. Zřejmě tedy $\mathcal{H}(f) = [2, \infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2, \infty) \subset (0, \infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) &= x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Dále platí dle (c) a (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \circ f) &= f\Big(f\big((0, \infty)\big)\Big) = f\big([2, \infty)\big) \\ &\subset [f(2), \infty) = \Big[\frac{5}{2}, \infty\Big).\end{aligned}$$

Mějme nyní dáno $z \in \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. Dle (b) a (c) existuje $y \in [1, \infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$, jinak by totiž platilo $z = f(y) < f(2) = \frac{5}{2}$, což by byl spor. Opět podle (c) existuje $x \in [1, \infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = z$$

a $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. Tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. ♣

KAPITOLA 2

Limita posloupnosti

2.1. Úvod

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost meteorologických měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat jako je například inflace nebo nezaměstnanost a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Formální definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.28(a)).

2.1.1. Definice. Konečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1,\dots,n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1,\dots,n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Číslo a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.28(b)).

2.1.2. Definice. Nekonečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

V dalším textu budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost.

2.1.3. Nyní uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovnictví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1+\tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n-tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1+\tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1+\tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1+\frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1+\frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n = \left(1+\frac{\tilde{p}}{n}\right)^n a$.

Nyní se můžeme ptát, zda budou hodnoty a_n nebo b_n s rostoucím n růst. Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze“ nebo se budou „blížit“ k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A, které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A. Takto postupoval Archimédés, když počítal délku obvodu kruhu přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečnému obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme, jsme neformálně užili slov „blížit se“ a „přibližovat se“ o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obratům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále. Ještě před jeho zavedením se budeme krátce zabývat základními vlastnostmi posloupností.

2.1.4. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označuje posloupnost, tedy zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jde tedy o podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak známe i $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

2.1.5. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá **konstantní**.

2.1.6. Množina všech členů konstantní posloupnosti je jednoprvková.

2.1.7. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina $\mathbb{N}$, ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

V následujících třech příkladech jsou posloupnosti zadány rekurentně (viz 1.4.29).

2.1.8. Fibonacciova[1] **posloupnost** je dána následujícím způsobem: $a_1 = 1, a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Zde je prvních osm členů této posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Další informace o Fibonacciově posloupnosti lze nalézt například v knize [**6**].

2.1.9. Položme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n. Podle Příkladu 1.8.16 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina $A_n = \{k \in \mathbb{N};\ k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$ neprázdná. Podle Věty 1.5.30 má tato množina nejmenší prvek. Položme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme rekurentně definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n-té prvočíslo, tedy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,

[1] Leonardo Fibonacci (asi 1170–1250)

$p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13, \ldots$ Podotkněme, že určit n-tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [**4**].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.10. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ \ldots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením“ číslic v dekadickém zápisu členu a_n. Člen $a_1 = 1$ přečteme jako „jedna jednička“, což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Člen a_2 přečteme jako „dvě jedničky“ a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička“, takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [**3**].

Nyní zavedeme několik nových pojmů, které popisují důležité základní vlastnosti posloupností.

2.1.11. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.12. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

2.1.13. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ■

2.1.14. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,

- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, jestliže je nerostoucí nebo neklesající. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

2.1.15. Poznámka. Upozorněme na to, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající." není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající." Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí." a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.".

2.1.16. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n \colon a_m \leq a_n.$$

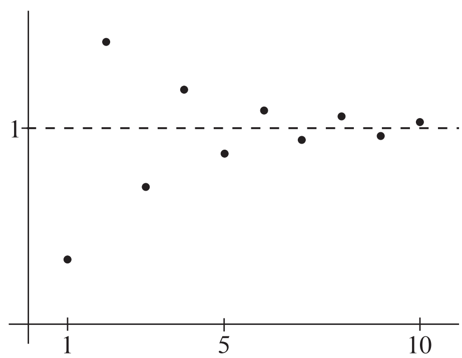
Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

2.1.17. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Další výklad začneme dvěma příklady. Uvažujme nejprve posloupnost $\{a_n\}$ definovanou předpisem $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily" (vizte Obrázek 1).

Nechť nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



Obrázek 1.

V tomto případě se naopak zdá být zřejmé, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží“ k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

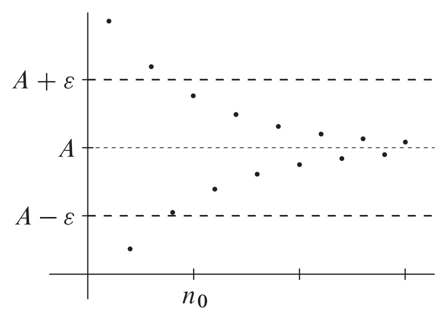
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.2.2. Chceme-li tvrdit, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A, musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadané kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby byla odchylka každého členu posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 od hodnoty A menší než ε, tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

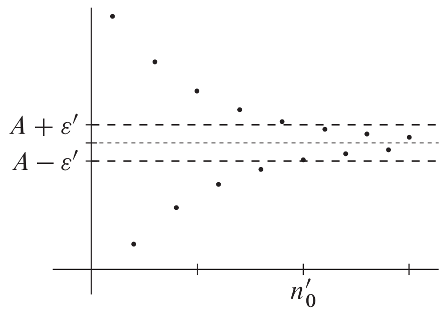
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε (viz následující dva obrázky).

Na Obrázku 2 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadané ε. Na Obrázku 3 bylo zadáno ε' menší než ε. Pro toto nové zadání ovšem index n_0 již podmínku (2.2) nesplňuje, neboť existují $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pro která nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Proto musíme nalézt jiný index n_0' (větší než n_0), aby podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n_0', byla splněna.



Obrázek 2.



Obrázek 3.

2.2.3. Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (náš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε. Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0. Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A. Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0, aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.4. Věta (jednoznačnost limity)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $\left|a_{n_0} - A\right| < \varepsilon$ i $\left|a_{n_0} - B\right| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.9) máme

$$\begin{aligned}|A - B| &= \left|A - a_{n_0} + a_{n_0} - B\right| \\ &\leq \left|A - a_{n_0}\right| + \left|a_{n_0} - B\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.5.13 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ■

2.2.5. Označení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

2.2.6. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.4. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.7. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že **má vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

2.2.8. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

Následující příklad ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.9. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $\frac{1}{n} > 0$, a tedy $\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = 0$. ♣

2.2.10. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

♣

2.2.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Je užitečné uvědomit si, jak vypadá negace výroku „$\{a_n\}$ je konvergentní". Posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje, tj. nemá vlastní limitu, právě tehdy, když platí

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

2.2.12. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy podle Důsledku 1.5.11(a) platí

$$\left|n^4 - A\right| \geq n^4 - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1.$$

Podle 2.2.11 je tedy posloupnost $\{n^4\}$ divergentní. ♣

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé číslo $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. V předchozím příkladu bylo sice možné pracovat s libovolným kladným reálným číslem ε, ale v dalších dvou úlohách bude volba vhodného ε hrát důležitou roli.

2.2.13. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n liché. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n sudé. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu. ♣

2.2.14. Poznámka. Na rozdíl od Příkladu 2.2.12 nelze při řešení Příkladu 2.2.13 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“.

V Příkladu 2.2.10 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\{\frac{n}{n+2}\}$ ve smyslu Definice 2.2.1. V Příkladech 2.2.12 a 2.6.2 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.15. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

Tedy $\lim b_n = A$. ∎

2.2.16. Poznámka. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

2.2.17. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, jak vyplývá z Příkladu 2.2.8 a Věty 2.2.15.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek namísto podmínky původní.

2.2.18. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{2.3}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (2.3) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.3). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2.3) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy $\lim a_n = A$. ∎

2.2.19. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.4) plyne z definice limity a 1.1.25, kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy podle (2.4) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ∎

2.2.20. Z Lemmatu 2.2.19 plyne, že pro ověření existence limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je libovolně malé pevně stanovené číslo. Stačí se tedy zabývat jen „malými hodnotami“ ε, což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.21. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.1) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Jestliže naopak platí (2.5), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.18 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztahy mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.22. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.5.11(a) odhad $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \big||a_n| - |A|\big| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ∎

2.2.23. Poznámka. Opačná implikace ve Větě 2.2.22 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (viz Příklad 2.2.13), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.24. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí: $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ \big||a_n|\big| < \varepsilon.$$

Protože $\big||a_n|\big| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ■

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.25. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Existuje tedy $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a tedy je posloupnost $\{a_n\}$ omezená. ■

2.2.26. Z Věty 2.2.25 vyplývá, že každá neomezená posloupnost je divergentní.

2.2.27. Poznámka. Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

2.2.28. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.29. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

(a) posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$;
(b) posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$;
(c) posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$;
(d) posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k-té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.30. Poznámka. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.28 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnosti $a_2, a_2, a_2, a_2, \dots$ nebo $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \dots$ obecně neurčují podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.31. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je zadána předpisem $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme její podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní.

V 2.2.31 jsme k zadané divergentní posloupnosti nalezli dvě její konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu její divergentní podposloupnost. Posloupnosti vybrané z divergentní posloupnosti mohou tedy konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.32. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí poslupnost přirozených čísel. Potom platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.33. Lemma. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Věty 1.5.24 plyne, že $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ■

Důkaz Věty 2.2.32. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n^*\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.6) dostaneme $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ■

2.2.34. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A, pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.32 limitu A, což by byl spor.

2.2.35. Předchozí odstavec nám umožňuje dokázat, že $\lim\{(-1)^n\}$ neexistuje, jiným způsobem než v Příkladu 2.2.13. Označíme-li $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak podle 2.2.31 je $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, a tedy $\lim\{(-1)^n\}$ neexistuje.

V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.36. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

(a) Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B|\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n b_n - AB| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}\,|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n|\,|B|}\,|b_n - B|\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podle definice limity existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{2}\,|B|$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.8}$$

Podle Důsledku 1.5.11(a) a (2.8) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\big||B| - |b_n|\big| \leq |B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.9}$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \le \big||B| - |b_n|\big|$, dostáváme podle (2.9) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_1$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2}|B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{2.10}$$

Položme

$$K = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{B^2}\right\}.$$

Pak podle (2.7) a (2.10) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &\le \frac{2}{|B|}|a_n - A| + \frac{2|A|}{B^2}|b_n - B| \\ &\le K(|a_n - A| + |b_n - B|).\end{aligned}$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_2$, potom máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < 2K\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 2.2.18. ■

V dalším textu se budeme někdy odkazovat na dílčí tvrzení (a), (b), (c) Věty 2.2.36 po řadě jako na větu o limitě součtu, větu o limitě součinu a větu o limitě podílu.

2.2.37. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.9 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.38. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. V případě, kdy jedna či obě posloupnosti divergují, nelze o konvergenci posloupnosti definované jako jejich součet, součin či podíl obecně nic říci. Uvedeme několik příkladů.

- Nechť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Nechť $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty 2.2.25 a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.9.
- Nechť $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.37 a $\{a_n b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

V dalším výkladu se nám bude hodit následující obecnější verze věty o limitě součtu.

2.2.39. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, a $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j .$$

Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Máme-li $l + 1$ posloupností $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l + 1$, pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\sum_{j=1}^{l} a_n^j\big) + a_n^{l+1} \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j + \lim_{n\to\infty} a_n^{l+1} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{l} A_j \Big) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j , \end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z Věty 2.2.36(a) a třetí z indukčního předpokladu.

Tvrzení týkající se součinu konečně mnoha posloupností lze dokázat obdobně. ■

2.2.40. Příklad. Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2 + n}{2n^2 + 7} = \frac{n^2 + n}{2n^2 + 7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} .$$

Podle Příkladu 2.2.9 je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a podle Příkladu 2.2.8 je $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Podobně odvodíme $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{7}{n^2})} = \frac{1}{2} .$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{7}{n^2})} && (2.11) \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} && (2.12) \\ &= \frac{1 + 0}{2 + 7 \cdot 0} = \frac{1}{2} . && (2.13) \end{aligned}$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.11), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.12) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu v (2.12) však již známe a výpočet (2.13) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti ve (2.13), a díky tomu i platnost rovnosti (2.12). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.11), a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění jako například v předchozím odstavci *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.41. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje číslo $K > 0$ splňující $|b_n| \le K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.18 platí $\lim a_n b_n = 0$. ■

2.2.42. Poznámka. Tvrzení Věty 2.2.41 neplyne z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

2.2.43. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.2.41, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi pojmem limity a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.44. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n^*$, platí $a_n \ge b_n$. Potom $A \ge B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$. Pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n < A + \varepsilon$ a $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A + B}{2} = B - \varepsilon < b_n.$$

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ■

2.2.45. Poznámky. (a) Věta 2.2.44 nám poskytuje možnost odhadnout shora nebo zdola hodnotu limity dané posloupnosti, o níž víme, že konverguje, ale jejíž limitu neznáme, pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

(b) V tvrzení Věty 2.2.44(b) nelze nerovnosti $a_n \geq b_n$ a $A \geq B$ nahradit nerovnostmi $a_n > b_n$ a $A > B$. Položme například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí však $A = B = 0$.

2.2.46. Věta (o dvou strážnících)**.** Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. ■

2.2.47. Věta (existence k-té odmocniny)**.** Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^k = x$.

Důkaz. Je-li $x = 0$, potom zřejmě platí $0^k = 0$.

Předpokládejme, že $x > 0$. Definujme množiny

$$M_1 = \{y \in [0, \infty);\ y^k \leq x\},$$
$$M_2 = \{y \in [0, \infty);\ y^k \geq x\}.$$

Ukážeme, že množina M_1 je shora omezená. Rozlišíme dva případy. Předpokládejme nejprve, že platí $x \leq 1$. Potom pro každé $y \in M_1$ platí $y^k \leq x \leq 1$. Pokud by platilo $y > 1$, pak podle Věty B.0.11(a) dostáváme $y^k > 1^k = 1$, což by byl spor.

Musí tedy být $y \leq 1$ a číslo 1 je tak horní závorou množiny M_1. Ve druhém případě budeme předpokládat, že $x > 1$. Potom pro každé $y \in M_1$ platí $y^k \leq x \leq x^k$. Odtud plyne $x \geq y$. Číslo x je tedy horní závorou množiny M_1. Množina M_1 je navíc neprázdná, neboť $0 \in M_1$. Z **??** vyplývá, že M_1 má supremum, které označíme y_1.

Množina M_2 je zřejmě zdola omezená, neboť například 0 je její dolní závorou. Navíc je neprázdná, neboť $\max\{1, x\} \in M_2$. Tedy M_2 má infimum, které označíme y_2.

Protože pro každé $y \in M_1$, $y' \in M_2$ platí $y \leq y'$, dostáváme dle Lemmatu 1.5.28 nerovnost $y_1 \leq y_2$. Dále plyne z vlastností mocniny (vizte Větu B.0.11) a Lemma 1.5.23, že M_1 i M_2 jsou intervaly. Nechť $y \in [0, \infty)$. Potom z linearity uspořádání reálných čísel plyne, že buď $y^k \leq x$ nebo $y^k \geq x$, a tedy $[0, \infty) = M_1 \cup M_2$.

Dokážeme, že $y_2 > 0$. Předpokládejme, že $y_2 = 0$. Pak pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ platí $\varepsilon \in M_2$. Tedy $x \leq \varepsilon^k \leq \varepsilon$. To podle Lemmatu 1.5.13 znamená, že $x = 0$, což je spor. Tedy $y_2 > 0$.

Nyní dokážeme, že $y_1 = y_2$. Již víme, že $y_1 \leq y_2$. Předpokládejme, že $y_1 < y_2$. Potom platí

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \notin M_1 \cup M_2 = [0, \infty),$$

což je spor. Tedy $y_1 = y_2$. Označme tuto společnou hodnotu jako y. Položme

$$C = \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} y^{k-1}.$$

Pak $C > 0$.

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{C}{\varepsilon} < n$ zároveň $y - \frac{1}{n} \geq 0$ (obé lze zařídit pomocí Věty 1.5.27). Pak $y - \frac{1}{n} \in M_1$, $y + \frac{1}{n} \in M_2$, a tedy

$$x \geq (y - \frac{1}{n})^k = y^k + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} y^{k-l} \left(-\frac{1}{n}\right)^l \geq y^k - \frac{1}{n}C > y^k - \varepsilon,$$

$$x \leq (y + \frac{1}{n})^k = y^k + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} y^{k-1} \left(\frac{1}{n}\right)^l \leq y^k + \frac{1}{n}C < y^k + \varepsilon.$$

Tedy

$$\left| x - y^k \right| < \varepsilon.$$

Podle Lemmatu 1.5.13 tak dostáváme $x = y^k$.

Jednoznačnost pak plyne z Věty B.0.11. ∎

2.2.48. Definice. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom číslo $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^k = x$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 2.2.47), nazýváme k**-tou odmocninou** z čísla x a značíme jej $\sqrt[k]{x}$.

2.2.49. Věta (vlastnosti k-té odmocniny)**.** Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$, platí $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \leq x$.
(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \geq x$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z odpovídajících tvrzení pro k-tou mocninu reálného čísla, která jsou uvedena ve Větě B.0.11. ∎

2.2.50. Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle Věty 2.2.49 tedy pro pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$. ♣

2.2.51. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.44(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro taková $n \in \mathbb{N}$ ale díky monotonii odmocniny (Věta 2.2.49(a)) máme $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - A}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{A} + \cdots + \sqrt[k]{a_n}(\sqrt[k]{A})^{k-2} + (\sqrt[k]{A})^{k-1}}\right| \\
&\leq \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}}\left|a_n - A\right|.
\end{aligned}$$

Odtud a použitím rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}} |a_n - A| = 0$ obdržíme podle Věty 2.2.46 $\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = 0$. Podle Věty 2.2.24 platí $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) dostáváme $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. ♣

2.2.52. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.5)

$$n = (1 + \theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $n - 1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (Věta 2.2.49(a)) pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Podle Příkladu 2.2.9, Příkladu 2.2.51 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.46 máme $\lim \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.53. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Nechť nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) a Příkladu 2.2.52 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Nechť nyní $c \in (0, 1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem $b_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné, než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

2.3.2. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

2.3.3. Příklad. Dokažte, že $\lim n = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n \geq n_0 > K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Naším cílem nyní bude rozšířit některé poznatky z předcházejícího oddílu i pro nevlastní limity. K tomuto účelu nejprve rozšíříme reálnou osu o prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme také operace sčítání a násobení a relaci uspořádání.

2.3.4. Definice. **Rozšířenou reálnou osou** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}\colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R}\colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

2.3.5. Operace sčítání a násobení nejsou definovány pro všechny dvojice z $\mathbb{R}^*$. Přesněji, následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

2.3.6. Věta. Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí následující rovnosti, pokud je vždy alespoň jedna strana rovnosti definována:

(a) $x + y = y + x$,
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(c) $xy = yx$,
(d) $(xy)z = x(yz)$,
(e) $x(y + z) = xy + xz$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z Definice 2.3.4 a z vlastností sčítání a násobení reálných čísel pomocí rozboru jednotlivých případů, kdy postupně rozlišujeme, zda prvky x, y a z jsou reálné, nebo se rovnají ∞, nebo se rovnají $-\infty$. ∎

Právě provedené rozšíření množiny reálných čísel nám umožňuje definovat pojmy suprema a infima pro libovolné podmnožiny $\mathbb{R}$.

2.3.7. Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A\colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A\colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Podobně definujeme **infimum** množiny A.

2.3.8. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema zavedený v Definici 1.4.8 shoduje s pojmem zavedeným v Definici 2.3.7. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Podobně infimum zdola neomezené množiny je $-\infty$ a infimum prázdné množiny je ∞.

V následujícím textu budeme již vždy používat právě uvedenou rozšířenou definici suprema a infima. Budeme je však i nadále značit symboly sup a inf.

2.3.9. Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

2.3.10. Definice 2.3.1 je doplněním Definice 2.2.1 o případy, kdy limitou je buď ∞ nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.4) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.11. Věta (jednoznačnost limity)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{a_n\}$. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.4). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞. Podle Věty 2.2.25 je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, a tím spíš je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Ve zbývajících dvou případech je důkaz obdobný. ■

2.3.12. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.11. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu (vlastní či nevlastní), pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl (pro srovnání viz 2.2.6).

2.3.13. Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.14. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.

2.3.15. Lemma. Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{|\tilde{A} - A|}{2}$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Nyní předpokládejme, že $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Odtud opět plyne, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$ je obdobný případu $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.14) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní) jedinou formulí. To je náplní následující věty.

2.3.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom je výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.14) shodná a formulí (2.1).

Nechť $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Víme, že pro $K = \frac{1}{\varepsilon}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$, a tedy formule (2.14) platí.

Nyní naopak předpokládejme, že platí (2.14). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \geq K$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

V případě $A = -\infty$ je důkaz obdobný. ■

Ve zbývající části tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity. Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.15.

2.3.17. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. ■

2.3.18. Poznámka. Z předchozí věty plyne následující zobecnění Poznámky 2.2.16. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A.

Následující tvrzení je obdobou Věty 2.2.22.

2.3.19. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.22. Nechť $A = \infty$. Pak z předpokladu $\lim a_n = A$ plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.17 platí $\lim |a_n| = \lim a_n$. Protože $\lim a_n = \infty$ a $|\infty| = \infty$, plyne odtud, že $\lim |a_n| = |A|$.

Konečně nechť $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| \in B(\infty, \varepsilon)$. Protože $|A| = \infty$, dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

Následující věta je jistou jednostrannou obdobou Věty 2.2.25.

2.3.20. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $K = 1$. Podle Definice 2.3.1 k tomuto K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > 1$. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq \min\{M, 1\}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ■

2.3.21. Obdobně jako ve Větě 2.3.20 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = -\infty$, potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená.

Následující věta je obdobou Věty 2.2.32 pro nevlastní limity.

2.3.22. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, která určuje naši vybranou posloupnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^*\colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.15}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.15) dostaneme $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ■

Tvrzení věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32 a 2.3.22) nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.23. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\left\{n_k^j;\ j \in \{1, \ldots, l\},\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1, \ldots, l\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_1\colon a_{n_k^1} \in B(A, \varepsilon),\\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_2\colon a_{n_k^2} \in B(A, \varepsilon),\\ &\qquad\vdots\\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_l\colon a_{n_k^l} \in B(A, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \ldots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky podmínce (2.16) existují $j \in \{1, \ldots, l\}$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_k^j$. Potom platí

$$n_k^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto $k \geq k_j$. Podle j-té podmínky v (2.17) dostaneme $a_n = a_{n_k^j} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

2.3.24. Poznámka. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = A.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

2.3.25. Ve Větě 2.3.23 je důležité, aby počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty$, $\{n_k^2\}_{k=1}^\infty$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ byl konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí, jak ukazuje následující příklad.

2.3.26. Příklad. Definujme posloupnost $\{a_n\}$ předpisem

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále definujme pro každé $j \in \mathbb{N}$ posloupnost přirozených čísel $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ předpisem

$$n_k^j = \begin{cases} k, & k \le j, \\ 2k, & k > j. \end{cases}$$

Dokažte, že $\{n_k^j;\ j,k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, pro každé $j \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ rostoucí a platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = 1$, přesto ale $\lim a_n$ neexistuje.

Řešení. Nechť $j \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ zřejmě rostoucí a navíc platí $\{n_k^j;\ j,k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Dále pro každé $k \in \mathbb{N}, k > j$, je n_k^j sudé, a tedy $a_{n_k^j} = 1$. Tudíž $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = 1$. ♣

Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36).

2.3.27. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.36. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b), a to v případě, kdy $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a $B = -\infty$.

Chceme tedy dokázat, že

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } A < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } A > 0. \end{cases}$$

Nechť nejprve $A < 0$ a $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{A}{2}$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_1$, platí $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) = (\frac{3A}{2}, \frac{A}{2})$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{Ab_n}{2} > K,$$

takže $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$. V případě $A > 0$ lze tvrzení dokázat obdobně. ■

2.3.28. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vynechat. Položme například $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim(-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní.

2.3.29. Víme-li pouze, že $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$, pak odtud nemůžeme vyvodit žádnou informaci o existenci nebo hodnotě $\lim(a_n + b_n)$. Nechť například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby pro takové posloupnosti platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

2.3.30. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}^*$, $j = 1, \dots, l$, a dále $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j,$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností. Důkaz lze provést obdobně jako ve Větě 2.2.39.

Z odstavce 2.3.28 vyplývá, že pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.31. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K němu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2L}} = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nechť nyní $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$. Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.44.

2.3.32. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.33. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,

(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \geq L$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n \geq L$. Tím je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka“ k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.34. Věta. Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,

(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

2.3.35. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1, \infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje}, & \text{pokud } q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $q > 1$. Pak můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne $q^n = (1+h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim(1 + hn) = \infty$, a podle Věty 2.3.33 máme $\lim q^n = \infty$.

Pokud $q \in (0, 1)$, pak podle předchozího odstavce platí $\lim(q^{-1})^n = \infty$. Aplikací Věty 2.3.27 dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $q = -1$ plyne tvrzení z Příkladu 2.2.13. Pokud $q \in (-1, 0)$, pak $\lim |q^n| = \lim |q|^n = 0$, a tedy podle Věty 2.2.24 také $\lim q^n = 0$.

Je-li konečně $q < -1$, pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny.

2.3.36. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí $G = \sup M$.

(ii) Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Je-li $G = \sup M$, pak G je zřejmě horní závorou M.

Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.33 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, pak podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M, je automaticky $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$. Pak z definice limity plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. (V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$.) Našli jsme tedy prvek z množiny M, který je větší než G', čímž jsme ověřili podmínku (b) z definice suprema. ■

2.3.37. Poznámka. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.38. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.51.

Nechť $A = \infty$ a $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom podle monotonie odmocniny (Věta 2.2.49) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$, tedy $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ♣

V následujících příkladech ukážeme použití výše vyložených vět.

2.3.39. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.3 a Příkladu 2.3.38 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32) dále plyne, že $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)) můžeme počítat

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.40. Poznámka. Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazení množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do $\mathbb{R}$, přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy: jednak posloupnosti tvaru $n \mapsto a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (značíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) a jednak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$. V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili. V případech, které budou vyžadovat jisté modifikace, na ně vždy explicitně upozorníme.

2.4. Hlubší věty o limitách

Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající. Nechť navíc $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $a_{n_0} \geq K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí díky 2.1.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} \geq K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je shora omezená, tedy $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označíme $A = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.5.15 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c}+1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c}+1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c}+1+c} < \sqrt{c+2\sqrt{c}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c}+1)^2} = \sqrt{c}+1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c}+1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A. Z (2.18) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A, o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.2.44(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená, a tedy jsou obě posloupnosti konvergentní, a že navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne odhad

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n\frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Dokázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44) platí $A, B \in [2, 4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.6. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z Příkladu 2.4.5 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo e nazýváme **Eulerovým číslem**.[2]

2.4.7. Věta (Bolzano[3]-Weierstrass[4]). Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $m \leq a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $\alpha_1 = m$, $\beta_1 = M$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a $\beta_1, \dots, \beta_k$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ konečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$ a $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \subset [\alpha_k, \beta_k]$. Navíc $\beta_k - \alpha_k = \frac{M-m}{2^{k-1}}$.

Posloupnost $\{\alpha_k\}$ je neklesající a posloupnost $\{\beta_k\}$ je nerostoucí. Navíc pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1$, takže posloupnost $\{\alpha_k\}$ je shora omezená. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\beta_k\}$ je zdola omezená. Tudíž existují vlastní limity posloupností $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$. Označme $A = \lim \alpha_k$ a $B = \lim \beta_k$. Protože $A, B \in \mathbb{R}$, je $B - A$ definovaný výraz. Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = B - A$. Jest

$$\lim_{k\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{M-m}{2^{k-1}} = 0,$$

takže $A = B$.

Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N};\ n > n_k,\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A \in \mathbb{R}$, nalezli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. ■

2.4.8. Nechť $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost reálných čísel. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.9. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená}, \\ \infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora neomezená}. \end{cases}$$

---

[2] Leonhard Euler (1707–1783)
[3] Bernard Bolzano (1781–1848)
[4] Karl Weierstrass (1815–1897)

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,}\\ -\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.}\end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.10. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim}\, a_n$ a $\underline{\lim}\, a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

2.4.12. Příklad. Dokažte, že $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

Řešení. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, neboť pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| = 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup\{(-1)^k;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n\}.$$

Pro libovolné $n\in\mathbb{N}$ existuje sudé číslo $k\geq n$. To znamená, že

$$\sup\{(-1)^k;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n\} = 1,$$

a tedy

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Obdobně lze dokázat, že $\liminf(-1)^n = -1$. ♣

2.4.13. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A\in\mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že platí $A\in\mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Můžeme tedy definovat posloupnosti reálných čísel $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde $b_n = \sup\{a_k;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a posloupnost $\{c_n\}$ neklesající. Navíc zřejmě platí $c_n\leq b_n$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. K němu nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí $|a_n-A|<\varepsilon$. Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí $a_n > A-\varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0}\geq A-\varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0}\leq A+\varepsilon$. Pak pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí

$$A-\varepsilon\leq c_{n_0}\leq c_n\leq b_n\leq b_{n_0}\leq A+\varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)) dostáváme

$$A-\varepsilon\leq \liminf a_n\leq \limsup a_n\leq A+\varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.5.13 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.20). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Je-li $A = -\infty$, postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ Nejprve opět předpokládejme, že platí $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v předchozí části důkazu. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Nechť $A = \infty$. Potom je podle Věty 2.3.20 posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako výše. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.3.33 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Jestliže $A = -\infty$, pak lze tvrzení dokázat obdobně jako v případě, kdy $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.3.33 je třeba použít Větu 2.3.34. ■

2.4.14. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost triviální. Nechť nyní $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou nyní obě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \tag{2.19}$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.7.6(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{2.20}$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.27(a)) pak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \tag{2.21}$$

Konečně z (2.19), (2.20) a (2.21) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.15. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \leq y_n .$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti $\sup\{x_k;\ k \geq n\} \leq \sup\{y_k;\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)). ■

2.4.16. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.17. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnosti posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.18. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) = H(\{a_n\}).$$

Řešení. Posloupnost $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ je podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$, takže inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$ plyne z 2.4.17. Dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $A \in H(\{a_n\})$. Pak existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost $\{n_{k+m}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.33 pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_{k+m} \geq k + m > m$, je $\{a_{n_{k+m}}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_{k+m}} = A$, a proto $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty})$. ♣

2.4.19. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $a \leq a_n \leq b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$. Dokažte, že potom $A \in [a, b]$.

Řešení. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost indexů taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Položme $b_k = a$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{k\to\infty} b_k = a$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \geq b_k$. Podle Věty 2.2.44(b) platí $A \geq a$. Obdobně lze dokázat, že $A \leq b$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.4.20. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{m_1} < A + 1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Pak platí $|b_{m_1} - a_{m_1}| < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určena přirozená čísla $m_1, \dots, m_k$ a $n_1, \dots, n_k$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > m_k$ a $b_{m_{k+1}} < A + \frac{1}{k+1}$. Z definice $b_{m_{k+1}}$ vyplývá, že existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, takové, že $n_{k+1} \geq m_{k+1}$ a $b_{m_{k+1}} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1}$. Takto postupně definujeme všechny členy posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ pak platí

$$|a_{n_k} - A| \leq |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| < \frac{2}{k} + \frac{2}{k} = \frac{2}{k},$$

a tedy $\lim a_{n_k} = A$. Odtud vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$. Množina $\{a_j;\ j > n_k\}$ je shora neomezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.3.33 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Konečně předpokládejme, že $A = -\infty$. Podle 2.4.11 platí $\liminf a_n \leq -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Odtud bezprostředně vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$, neboť posloupnost $\{a_n\}$ je svou vlastní podposloupností,

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$. Zbývá dokázat, že pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)) platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz věty proveden. ∎

2.4.21. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom je množina $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. Podle Věty 2.4.20 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, je tedy neprázdná. ∎

2.4.22. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z Věty 2.4.20. ∎

2.4.23. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Důkaz. Podle Věty 2.4.13 platí $\limsup a_n = \liminf a_n = A$, takže tvrzení plyne z Věty 2.4.20. ■

2.4.24. Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $H(\{a_n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ splňují $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$, dostáváme inkluzi $H(\{a_n\}) \supset \{-1, 1\}$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}^*$ takové, že $A \in H(\{a_n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Podle Lemmatu 2.3.15 existuje $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $a_{n_k} = 1$ nebo $a_{n_k} = -1$, a tedy $a_{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{a_n\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Na závěr tohoto oddílu uveďme ještě Bolzanovu-Cauchyovu[5] podmínku. Její význam ukazuje pak následující věta.

2.4.25. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.4.26. Věta. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a označme tuto limitu A. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v textu před Definicí 2.4.9. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

[5] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně,

$$\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}.$$

Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.13 platí $\lim a_n = A$. Jak víme, $A \in \mathbb{R}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu. ∎

2.4.27. Věta (Borelova věta[6]). Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset S$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.

Důkaz. Nechť $I = [a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_x$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{S}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{S}_a = \{I_a\}$. Potom je zřejmě $\mathcal{S}_a$ konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$. Tedy $a \in M$, takže množina M je neprázdná. Navíc je zřejmě b horní závorou množiny M, a tedy M je shora omezená. Označme $y = \sup M$. Z výše uvedených faktů vyplývá, že $y \in [a, b]$. Protože I_a je otevřený interval, existuje $x \in [a, b]$, $x > a$, takové, že $x \in I_a$. Pak zřejmě platí $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$, a tedy $x \in M$. To znamená, že $y > a$.

Dokážeme, že $y \in M$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $y - \delta > a$ a $(y - \delta, y] \subset I_y$. Položme $z = y - \frac{\delta}{2}$. Potom $z < y$, a tedy dle definice suprema existuje konečná množina $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{S}_z$. Položme $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z \cup \{I_y\}$. Potom je $\mathcal{S}_y$ konečná množina otevřených intervalů. Předpokládejme, že $x \in [a, y]$. Je-li $x \in [a, z]$, potom $x \in \bigcup \mathcal{S}_z$. Je-li $x \in (z, y]$, potom $x \in I_y$. V každém případě platí $x \in \bigcup \mathcal{S}_y$, takže $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_y$. Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme, že $y < b$. Potom existuje otevřený interval $J_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in J_y$. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $y + \varepsilon < b$ a $[y, y + \varepsilon) \subset J_y$. Potom pomocí obdobné úvahy jako výše lze dokázat, že $y + \varepsilon \in M$. To je spor s definicí suprema. Dokázali jsme tedy, že $b = \sup M$ a $b \in M$. Odtud vyplývá tvrzení věty. ∎

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je množina

$$\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$$

konečná.

[6] Émile Borel (1871–1956)

Řešení. $\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\} + 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N};\ n < n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, a tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Zároveň zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$. Podle definice limity odtud vyplývá, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ♣

2.5.3. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve dokážeme tvrzení pro $k = 1$. Označme $\varepsilon = a - 1$. Potom $\varepsilon > 0$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.5)

$$a^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n+1)\varepsilon^2}{2}.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq n \frac{2}{n(n+1)\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)}.$$

Protože $\lim \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)} = 0$, plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že $\lim \frac{n}{a_n} = 0$.

Nechť nyní $k \in \mathbb{N}$. Označme $b = a^{\frac{1}{k}}$. Pak $b > 1$, a tedy dle již dokázané části tvrzení platí $\lim \frac{n}{b^n} = 0$. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36(b)) platí

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = \lim \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0^k = 0.$$

Tvrzení je dokázáno. ♣

2.5.4. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Řešení. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) vyplývá existence čísla $m \in \mathbb{N}$ splňujícího $m \geq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, potom platí

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq m-1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq a$$

a pro každé $j \in \mathbb{N}$, $m \leq j \leq n-1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq 1.$$

Celkem tedy dostáváme odhad

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^m}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{a^m}{n} \text{ a } c_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

♣

2.5.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme n-tý člen posloupnosti ve tvaru

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}.$$

Postupně odhadneme každý činitel v tomto součinu a dostaneme

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ a } c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

♣

2.5.6. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí

$$n! \geq n(n-1)(n-2)\cdots\left[\frac{n}{2}\right] \geq \left[\frac{n}{2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

a tedy

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left[\frac{n}{2}\right]^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Dále zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty.$$

Z Věty 2.3.33 tudíž vyplývá, že také $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. ♣

2.5.7. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \log n = \infty.$$

Řešení. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Musíme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $\log n > K$. Tato nerovnost je podle vlastností logaritmu a exponenciální funkce (Věta 1.7.16(h)) ekvivalentní nerovnosti

$$n > e^K. \tag{2.22}$$

Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$ (například můžeme volit $n_0 = [e^K] + 1$). Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (2.22). Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.8. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $\alpha = 0$.

Řešení. Je-li $\alpha = 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ konstantní, a tedy monotónní. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Je-li $q \in [0, 1]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \leq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \leq \alpha q^n$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě nerostoucí. Je-li $q \in [1, \infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \geq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \geq \alpha q^n$ a posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě neklesající. Obdobně lze dokázat, že je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající pro každé $q \in [0, 1]$ a nerostoucí pro každé $q \in [1, \infty)$.

Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a $q < 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \geq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \leq 0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \leq \alpha q^{n+1}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \geq \alpha q^{n+1}$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy není monotónní. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní, je-li $\alpha < 0$ a $q < 0$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.5.9. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Dokažte, že pro množinu hromadných hodnot této posloupnosti platí

$$H(\{a_n\}) = \{c \in \mathbb{R}^*;\ \liminf a_n \leq c \leq \limsup a_n\}.$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z Věty 2.4.20 plyne inkluze „$\subset$“ a fakt, že $a, b \in H(\{a_n\})$. Stačí proto dokázat, že každý prvek intervalu (a, b) leží v množině $H(\{a_n\})$. Nechť tedy $c \in (a, b)$ je dáno. Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující $a < c - \delta < c + \delta < b$. Hlavní myšlenka důkazu spočívá v ověření následujícího pozorování:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \delta)\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > k \ \&\ a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Abychom tento fakt dokázali, uvažujme dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $j_0 > k$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $|a_{j+1} - a_j| < \varepsilon$. Protože $a < c - \frac{\varepsilon}{2}$, z definice limes inferior existuje $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 > j_0$, splňující $a_{j_1} < c - \frac{\varepsilon}{2}$ a protože $c + \frac{\varepsilon}{2} < b$, z definice limes superior existuje $j_2 \in \mathbb{N}$, $j_2 > j_1$, splňující $a_{j_2} > c + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme

$$N = \left\{\mathbb{N} \cap [j_1, j_2] : a_j < c - \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Protože $j_1 \in N$, je N neprázdná konečná množina, a existuje tak $m = \max N$. Protože $j_2 \notin N$, platí $m < j_2$. Přirozené číslo $k = m + 1$ pak splňuje $j_1 < k \leq j_2$ a $k \notin N$. Proto $a_k \geq c - \frac{\varepsilon}{2}$. Dostáváme tak

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_k = a_{m+1} = a_{m+1} - a_m + a_m < \varepsilon + c - \frac{\varepsilon}{2} = c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Číslo k je tedy požadovaný index, neboť $k > m \geq j_1 > j_0 > k$ a

$$c - \varepsilon < c - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_k \leq c + \frac{\varepsilon}{2} < c + \varepsilon.$$

Tím je důkaz pozorování dokončen.

Pomocí právě ověřeného pozorování již důkaz tvrzení snadno dokončíme. Položme $\varepsilon_k = \frac{\delta}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, a induktivně nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ splňující $a_{n_k} \in (c - \varepsilon_k, c + \varepsilon_k)$. V prvním kroku indukce nalezneme pomocí pozorování použitého pro $k = 1$ index $n_1 > 1$ takový, že $a_{n_1} \in (c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1)$. Máme-li nyní již nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in (c - \varepsilon_j, c + \varepsilon_j)$ pro $j \in \{1, \ldots, k\}$, použijeme pozorování pro přirozené číslo n_k k nalezení indexu $n_{k+1} > n_k$ takového, že $a_{n_{k+1}} \in (c - \varepsilon_{k+1}, c + \varepsilon_{k+1})$.

Tím jsme nalezli posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k c, jelikož

$$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - c| \leq \lim_{k\to\infty} 2\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta}{2^{k-1}} = 0.$$

Tedy $c \in H(\{a_n\})$ a důkaz tvrzení je dokončen. ♣

2.5.10. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. Nejprve dokážeme první nerovnost. Označme $B = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud $B = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme nyní $B > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $B > K > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(K^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \left(K^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.53 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} K\left(K^{-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq K.$$

Díky volbě K odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq B.$$

Tím je dokázána první nerovnost. Druhá nerovnost platí podle 2.4.11. Zbývá provést důkaz třetí nerovnosti. Označme $A = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom $A \in \mathbb{R}^*, A \geq 0$. Pokud $A = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.23}$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.53 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (A+\varepsilon)\left((A+\varepsilon)^{-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A+\varepsilon.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\limsup_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A+\varepsilon,$$

a tedy celkem dostáváme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon.$$

Díky volbě ε odtud plyne, že $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Tím je dokázána třetí nerovnost.

♣

2.5.11. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $b_k \in H(\{a_n\})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť dále $b \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Dokažte, že potom $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Položme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_1} \in B(b, 1)$. Z definice hromadného bodu plyne, že pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$.

Nechť $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla $n_1, n_2, \cdots, n_j$. Potom existuje $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$. Nalezneme $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$.

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b$. Tedy b je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. ♣

2.5.12. Příklad (Stolzova věta)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim b_n = \infty$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Řešení. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}.$$

Pro druhý sčítanec na pravé straně poslední rovnosti platí odhad

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \geq \alpha \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n}.$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A.$$

Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A.$$

Odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Tvrzení věty je dokázáno. ♣

2.5.13. Příklad. Dokažte, že každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

Řešení. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Předpokládejme nejprve, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ největší prvek. Označme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n;\ n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$. Zvolíme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n;\ n \geq n_k + 1\}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_j} = \max\{a_n;\ n \geq n_{j-1} + 1\}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

Nyní předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ nemá největší prvek. Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$ nemá množina $\{a_n;\ n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$. Množina $\{a_n;\ n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k}.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je rostoucí. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.14. Poznámka. Příklad 2.5.13 lze následujícím způsobem využít k alternativnímu důkazu Bolzanovy-Weierstrassovy věty. Je-li $\{a_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel, lze z ní vybrat podle Příkladu 2.5.13 vybrat monotónní podposloupnost, která bude opět omezená. Taková posloupnost je konvergentní podle Důsledku 2.4.2.

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která reálná čísla x je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní a určete typ její monotonie v závislosti na parametru x.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$. Podle Příkladu 2.5.8 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je konstantní právě pro $q_x \in \{0, 1\}$. Bude užitečné si uvědomit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, platí

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Je-li $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$, je $q_x \geq 0$. Pro tato x dále platí, že $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, tj. $q_x \geq 1$. Navíc $q_x > 1$ pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a $q_x = 1$ pro $x = 1$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a konstantní pro $x = 1$.

V případě $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$ platí $q_x \geq 0$ právě tehdy, když $x \leq 0$. Dále je $q_x > 1$ právě tehdy, když $x^3 - 3x + 2 < 0$, což nastává právě pro $x \in (-\infty, -2)$. Nakonec si povšimneme, že $q_x \in \{0, 1\}$ právě tehdy, když $x \in \{0, -2\}$. Zadaná posloupnost je proto rostoucí pro $x \in (-\infty, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$ a konstantní pro $x \in \{-2, 0\}$.

Shrneme-li přecházející úvahy, dostáváme, že

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{je rostoucí pro} & x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty), \\ \text{je klesající pro} & x \in (-2, 0), \\ \text{je konstantní pro} & x \in \{-2, 0, 1\}, \\ \text{není monotónní pro} & x \in (0, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

♣

2.6.2. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right)\right\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = \frac{1}{36}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Předpokládejme nejprve, že $A \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ liché a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom $\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} > 0$, a tedy

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|(-1)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A\right)\right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

jinými slovy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Nyní předpokládejme, že $A < 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ sudé a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|\frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A\right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy opět $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Podle 2.2.11 tedy posloupnost $\{a_n\}$ nemá vlastní limitu.

♣

2.6.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodech n, přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3, tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0.\end{aligned}$$

♣

2.6.4. Příklad. Nechť $a, b \in (0, 1)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.5.7 plyne, že

$$\frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n} = \frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})}.$$

Z Příkladu 2.3.35 a Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} 1-a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} a \lim_{n\to\infty} a^n = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n\to\infty} 1-b^{n+1} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(1-a^{n+1})}{\lim_{n\to\infty}(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

♣

2.6.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}.$$

Odtud a z Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} &= \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{99}+\sum_{i=2}^{100}\binom{100}{i}(4^i-3^i)n^{100-i}}{200n^{99}+\sum_{i=2}^{100}\binom{100}{i}2^i n^{100-i}} &= \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{100+\sum_{i=2}^{100}\binom{100}{i}(4^i-3^i)\frac{1}{n^{i-1}}}{200+\sum_{i=2}^{100}\binom{100}{i}2^i\frac{1}{n^{i-1}}} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♣

2.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}).$$

Řešení. Bude užitečné si uvědomit, že větu o aritmetice limit (Věta 2.3.27) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}=\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}=\infty,$$

a tedy výraz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}$$

není definován. Zapíšeme výraz $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.\end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Podle Příkladu 2.2.50 platí

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}},$$

plyne odtud a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♣

2.6.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Protože

$$(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}) = 1,$$

platí

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$1 \leq \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} \leq 1+\frac{1}{n},$$

a tedy z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} = 1.$$

Z Příkladů 2.2.37 a 2.2.51 vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0.$$

Kombinací odhadů pak pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}1} \\ &= \frac{0}{1+1+1} = 0.\end{aligned}$$

♣

2.6.8. Příklad. Vypočtěte $\lim\big(\sqrt{4n^2-n}-2n\big)$.

Řešení. Uvědomíme si, že nelze užít větu o limitě součtu, protože $\lim\sqrt{4n^2-n} = \infty$ a $\lim\sqrt{n(4n-1)} = \infty$ (Věta 2.3.27(b) a Příklad 2.3.38) a $\lim(-2n) = -\infty$. Nejprve rozšíříme n-tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}$$

a použijeme vzorec $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, kde položíme $a = \sqrt{4n^2-n}$, $b = 2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2-n}-2n = \Big(\sqrt{4n^2-n}-2n\Big)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2-n}-2n = \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.27 a Příkladu 2.2.51

$$\lim\big(\sqrt{4n^2-n}-2n\big) = \lim\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}.$$

♣

2.6.9. Příklad. Vypočtěte $\lim\frac{n\sqrt{2n+5}-3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8}+\sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n, které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n: $n^{\frac{3}{2}}$, $n^{\frac{1}{3}}$, $n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak

$$\frac{n\sqrt{2n+5}-3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8}+\sqrt[3]{n^4}} = \frac{\sqrt{2+\frac{5}{n}}-3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}+\sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.27 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.38:

$$\lim \frac{\sqrt{2+\frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim \sqrt{2+\frac{5}{n}} - 3\lim \sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim \sqrt{1+\frac{8}{n^3}} + \lim \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a^6 - b^6) = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \quad \text{a} \quad b = \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3+1)^8(n^2+1)^3} + \ldots + \sqrt[6]{(n^2+1)^{15}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}) = \frac{-3 + 2\frac{1}{n} - 3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9, 2.2.37, 2.2.51 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) konečně dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty \cdot 0$. Zkusíme si tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) &= \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{n}(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}.\end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0 \le \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \le \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n\to\infty} 1}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 pro $a = 3$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Podle Příkladů 2.5.3 a 2.5.4 a podle Věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}\frac{2^n}{n!} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Řešení. Z Věty 1.7.18(a) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$-1 \le \sin(n!) \le 1.$$

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Podle Příkladu 2.2.51 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le c_n \le b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0.$$

♣

2.6.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.8.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$, platí

$$n^2 \le 2^n \le 3^n.$$

Pro každé takové $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.53 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) platí

$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{3} = 3.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 3, \quad b_n = \sqrt[n]{3}, \quad c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 3.$$

Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.15. Příklad. Nechť $a_n = [\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}]$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{\frac{2}{3}} + ((n^3 + 8n^2)(n^3 + 2n^2))^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 2n^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{6}{(1 + \frac{8}{n})^{\frac{2}{3}} + \left((1 + \frac{8}{n})(1 + \frac{2}{n})\right)^{\frac{1}{3}} + (1 + \frac{2}{n})^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Protože

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left((1 + \frac{8}{n})(1 + \frac{2}{n})\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $b_n < 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [b_n] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

♣

2.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right] 100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Na většinu jednoduchých příkladů s celými částmi stačí použít elementární odhad

$$x - 1 \leq [x] \leq x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0=\frac{n^3-\frac{n^3}{100}100}{\sqrt{n}}\leq\frac{n^3-\left[\frac{n^3}{100}\right]}{\sqrt{n}}\leq\frac{n^3-\left(\frac{n^3}{100}-1\right)100}{\sqrt{n}}=\frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k $\lim_{n\to\infty}\frac{100}{\sqrt{n}}=0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{n\pi}{2}).$$

Řešení. Nechť $A\in\mathbb{R}$ a $n_0\in\mathbb{N}$. Položme $\varepsilon=1$. Je-li $A\geq 0$, pak položíme $n=4n_0+3$. Potom zřejmě platí $n\geq n_0$ a

$$|\sin(\frac{n\pi}{2})-A|=|-1-A|=1+A\geq 1=\varepsilon.$$

Je-li $A<0$, pak položíme $n=4n_0+1$. Potom opět $n\geq n_0$ a navíc platí

$$|\sin(\frac{n\pi}{2})-A|=|1-A|=1-A\geq 1=\varepsilon.$$

Z kombinace obou případů vyplývá výrok

$$\forall A\in\mathbb{R}\;\exists\varepsilon\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0\;\forall n_0\in\mathbb{N}\;\exists n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\colon|\sin(\frac{n\pi}{2})-A|\geq\varepsilon.$$

Z 2.2.11 vyplývá, že posloupnost $\sin(\frac{n\pi}{2})$ nemá vlastní limitu. Z vlastností funkce sin (Věta 1.7.18(a)) plyne, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $-1\leq\sin(\frac{n\pi}{2})\leq 1$. Posloupnost je tedy omezená, a proto nemůže mít ani nevlastní limitu. ♣

2.6.18. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Řešení. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ označíme

$$a_n=(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) a Příkladu 2.2.50 tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{2},$$

zatímco

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud a z 2.2.34 plyne, že $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.19. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \right).$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} = \frac{2n}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 a Věty 2.2.36 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2\cdot 0 = 0.$$

Tedy opět podle Věty 2.3.27 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} + n \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = \infty$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} + n \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(-\frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = -\infty.$$

Protože

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \in \{4k+1;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & n \in \{4k-1;\ k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

dostáváme celkem

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{4k-1} = -\infty,$$

a tedy podle Věty 2.3.22 $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.20. Příklad. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ má limitu. Pokud ano, vypočtěte ji.

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.41 má tedy posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ limitu rovnou 0. ♣

2.6.21. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že posloupnost má vlastní limitu, kterou označíme A. Kombinací 2.2.29(b) a věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) pak dostaneme

$$\lim a_{n+1} = A.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) obdržíme

$$\lim\left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy

$$A = \lim a_{n+1} = \lim\left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A}.$$

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.22. Příklad. Nechť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je hodnota a_n zadána předpisem

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \tag{2.24}$$

Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

Odtud dále plyne, že

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a podobně

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} > \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$

Kombinací odhadů dostaneme

$$a_1 < a_3 < a_4 < a_2,$$

což je (2.24) pro $k = 1$. Předpokládejme, že (2.24) platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$

Z této nerovnosti dále plyne

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < \frac{a_{2k+2} + a_{2k+3}}{2} = a_{2k+4}.$$

Konečně z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ dostaneme

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2},$$

a tedy

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$

Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.24) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Z (2.24) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \le a_n \le a_2$, takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B.$$

Ze vztahu

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

vyplývá, že

$$B = \frac{A + B}{2},$$

a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
&a_3 - a_2 = a_1 - a_3,\\
&a_4 - a_3 = a_2 - a_4,\\
&\dots\\
&a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-3} - a_{n-1},\\
&a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n,\\
&a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

a tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočtěte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0,1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0,1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0,1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0,1]$ právě jeden kořen, a to c,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0,c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c,1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \cdots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \cdots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32), Příkladu 2.4.5, a Definicie 2.4.6 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.51 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

Tedy jest

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Díky Příkladu 2.4.5, Definici 2.4.6 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$

Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

♣

2.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

2.6.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, platí

$$1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

2.6.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j} \leq \frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \leq b_n$. Tedy

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0.$$

♣

KAPITOLA 3

Číselné řady

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii, ekonomii a dalších vědách, se často setkáváme s posloupnostmi, které vznikají následujícím způsobem. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nová posloupnost má následující členy: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$, tj. m-tý člen nové posloupnosti je součtem prvních m členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tato situace nastává tak často, že stojí za to těmto speciálním posloupnostem věnovat zvláštní kapitolu.

Při vyšetřování konvergence posloupností vzniklých uvedeným způsobem se snažíme sečíst nekonečně mnoho reálných čísel. Tato operace ovšem vyžaduje přesnou definici a pravidla pro korektní zacházení s nekonečnými součty.

3.1. Základní pojmy

3.1.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**, případně zkráceně **řadou**, přičemž číslo a_n je **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položíme-li pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

nazýváme číslo s_m **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1.2. Definice. **Součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní.

Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m\to\infty} s_m = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

3.1.3. Poznámka. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.4. Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje (osciluje).} \end{cases}$$

3.1.5. Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v Poznámce 2.3.40. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v Poznámce 2.3.40). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje **řadu**, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde

$$s_m = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m,$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jejich případné zobecnění pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je většinou zcela přímočaré.

3.1.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje (osciluje). ♣

3.1.7. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.8. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Jestliže $q \neq 1$, pak podle Příkladu 1.5.7 platí $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Předpokládejme, že $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje.

Nyní předpokládejme, že $|q| \geq 1$. Jestliže $q > 1$, pak z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. Jestliže $q = 1$, pak $s_n = n + 1$, a tedy $\lim s_n = \infty$, takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje. Jestliže $q = -1$, pak řada diverguje podle Příkladu 3.1.6. Předpokládejme konečně, že $q < -1$. Položme $a = |q|$. Potom

$$s_n = \begin{cases} \frac{1+a^n}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \frac{1-a^n}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $\limsup s_n = \infty$ a $\liminf s_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že neexistuje $\lim s_n$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. ♣

3.1.9. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}.$$

Řešení. Pro $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, platí

$$\sum_{n=k}^{m} q^n = q^k \sum_{n=0}^{m-k} q^n = q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} q^n = \lim_{m\to\infty} q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q} = \frac{q^k}{1-q}.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.1.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je roven 1.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Podle Příkladu 2.6.26 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

♣

3.1.11. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a její součet je ∞.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ uvedené řady je zřejmě rostoucí. Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) vyplývá, že existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A. Navíc platí $A = \sup\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Dokážeme, že $\{s_n\}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Definici 2.4.25). K tomu stačí nalézt $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňující

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0 \colon |s_n - s_m| \geq \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0$ a $m = 2n_0$. Pak $m, n \geq n_0$ a platí

$$|s_n - s_m| = s_{2n_0} - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k}.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž

$$|s_n - s_m| > n_0 \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{s_n\}$ tedy nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Odtud a z Věty 2.4.26 vyplývá, že posloupnost $\{s_n\}$ nemá vlastní limitu, takže $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$. ♣

3.1.12. Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

3.1.13. Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. V takovém případě je pro nás otázka konvergence řady velice důležitá.

3.1.14. Pro nekonečné řady platí tvrzení obdobné Větě 2.3.17, tedy že změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet). Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.15. Věta (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Podle 3.1.14 existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle Věty 2.2.36 tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ■

3.1.16. Opačná implikace v tvrzení Věty 3.1.15 neplatí. Platí například $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.11 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní.

3.1.17. V některých případech lze použít Větu 3.1.15 k odvození divergence řady. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje. Věta 3.1.15 nám tak poskytuje jiné řešení Příkladu 3.1.6.

3.1.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^{m} a_k = s_m - s_{n-1}$. Výrok (3.1) tedy platí právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

To podle Věty 2.4.26 nastává právě tehdy, když posloupnost $\{s_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, tedy právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Odtud plyne tvrzení. ■

3.1.19. Není těžké si rozmyslet, že výrok (3.1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C \in \mathbb{R},\ C > 0\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < C\varepsilon.$$

3.1.20. Věta. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nechť je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) pak dostaneme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m\to\infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty}(s_m + t_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} s_m + \lim_{m\to\infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\end{aligned}$$

■

3.1.21. Důsledek (linearita konvergentních řad)**.** Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.1.22. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergentní.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku 3.1.21 také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. ■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležité speciální případy nekonečných číselných řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady se vyznačují určitými specifickými vlastnostmi, které můžeme při práci s nimi (například při vyšetřování jejich konvergence či divergence) využít.

3.2.1. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů shora omezená.

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Zároveň je podle předpokladu shora omezená, a tedy je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle Definice 3.1.2 je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{s_m\}$ je podle Definice 3.1.2 konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. ■

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající, protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. Dokážeme, že posloupnost $\{s_n\}$ je shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $s_n \leq s_{n_0} + t_n$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_n\}$ shora omezená. Proto je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Protože posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a shora omezená, je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení bezprostředně plyne z již dokázaného tvrzení (a). ■

3.2.3. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Z Příkladu 3.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy i řada$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.4. Poznámka. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{\pi^2}{6}$, k důkazu tohoto tvrzení jsou však potřeba pokročilejší pasáže matematické analýzy.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $A \in (0, \infty)$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) Pokud $A = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Pokud $A = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K tomuto ε nalezneme podle definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}. \tag{3.2}$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Z první nerovnosti v (3.2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A} a_n$. Podle Důsledku 3.1.21 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A} a_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Potom z druhé nerovnosti v (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2} b_n$. Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Položme $K = 1$. Podle definice nevlastní limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle Příkladu 3.2.3 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.5(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+100}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Potom platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Z Příkladu 3.1.11 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní. Podle Věty 3.2.5(c) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. ♣

Základním nástrojem pro zkoumání konvergence řad s nezápornými členy je srovnávací kritérium, případně limitní srovnávací kritérium (Věty 3.2.2 a 3.2.5). Pro jejich používání však potřebujeme dostatečně rozsáhlou škálu řad, o nichž již víme, zda jsou konvergentní či divergentní. Takovou informaci zatím máme k dispozici pouze pro geometrickou řadu (Příklad 3.1.8). Využijeme ji nyní k odvození dvou velmi užitečných kritérií, totiž Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria.

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pakení pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0,1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A,1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n};\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z již dokázaného tvrzení (a).

(c) Podle Věty 2.4.13 platí $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, a tedy tvrzení bezprostředně plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Podle Věty 2.4.20 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Povýšením této nerovnosti na n_k dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. Podle Věty 2.2.32 tedy neplatí ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Není tudíž splněna nutná podmínka konvergence řady, a tedy podle Věty 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení bezprostředně plyne z (d) a Věty 2.4.13. ■

3.2.9. Poznámka. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není možné rozhodnout na základě Věty 3.2.8. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní a řada $\sum b_n$ je konvergentní.

3.2.10. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Podle Příkladu 2.2.52 platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Odtud a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti (Věta 2.2.36) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 3.2.8(c) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí výrok

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3.3}$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.3).

Podle Příkladu 3.1.8 a Důsledku 3.1.21 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle 3.1.14 je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak podle definice limes superior existují $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení nyní plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak podle definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1. \tag{3.4}$$

Dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0}. \tag{3.5}$$

Pro $n = n_0$ je toto tvrzení zřejmé. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$, pak podle (3.4) platí

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \geq a_n \geq a_{n_0}.$$

Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.5). Řada má podle předpokladu kladné členy, a tedy $a_{n_0} > 0$. To znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.15 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.12. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Označme $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Řešení. Řada zřejmě diverguje pro $k = 1$. Předpokládejme, že $k \geq 2$. Platí $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navíc pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\dots(kn+k)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})\dots(k+\frac{k}{n})}. \tag{3.6}$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostáváme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 3.2.11 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.2.13. Poznámka. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme rozhodnout na základě Věty 3.2.11. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní a řada $\sum b_n$ je konvergentní.

3.2.14. Poznámka. V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.11 upozorněme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n-1}, & n \text{ je-li } n \text{ liché}, \\ 2^{-n+1}, & n \text{ je-li } n \text{ sudé}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq 2^{-n+1}$, a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2, & \text{je-li } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{8}, & \text{je-li } n \text{ sudé}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

takže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

3.2.15. Příklad. Nechť $a > 0$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Řada tedy konverguje podle Věty 3.2.11(c). ♣

3.2.16. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.10 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že je-li splněna premisa tvrzení (c), nebo (d) Věty 3.2.11, pak je též splněna premisa tvrzení po řadě (c), nabo (e) Věty 3.2.8. Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být v některých případech podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

$\Leftarrow$ Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$. Potom $t_k \leq A$, a tedy platí

$$\begin{aligned} s_m &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A. \end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Věty 3.2.1.

$\Rightarrow$ Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom $s_m \leq B$ a navíc platí

$$\begin{aligned} s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_j \geq a_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = \frac{t_k}{2}, \end{aligned}$$

takže $t_k \leq 2B$. To znamená, že posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená, a tedy podle Věty 3.2.1 řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. ■

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.11), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.3). V následující větě uvedeme charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Věta je důležitou aplikací kondenzačního kritéria.

3.2.18. Věta. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Je-li $\alpha \leq 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$, takže není splněna podmínka $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.15 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in (0, \infty)$. Z definice výrazu n^α (odstavec 1.7.17) a vlastností funkcí exp a log (odstavce 1.7.15 a 1.7.16) plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.8 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ a $b_n = n^{-\frac{7}{6}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a $b_n > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{7}{6} > 1$. Navíc platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1+n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-\frac{1}{3}}}{1+n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Podle Věty 3.2.5 tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost splňující $\lim a_n = 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergentní.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud, z předpokladu věty a Věty 2.4.1 plyne, že $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = 0$. Potom tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $k \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.22) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Protože ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \le s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \le s_{2k} \le s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Větě 2.3.23 (viz též Poznámku 2.3.24) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí a $\lim(-a_n) = 0$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-a_n)$ podle již dokázaného konverguje. Podle Důsledku 3.1.21 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a navíc platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 3.3.1 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní. ♣

3.3.3. Předpoklad monotonie ve Větě 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché.} \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.11 je $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení 1.5.2.

3.3.4. Lemma (Abelova[1] parciální sumace). Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{3.7}$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{3.8}$$

[1]Niels Henrik Abel (1802–1829)

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \cdots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + \sigma_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (a).

(b) Podobně jako v důkazu tvrzení (a) platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \cdots + (s_m - s_{m-1}) b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + s_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (b). ■

3.3.5. Věta (Abelovo a Dirichletovo[2] kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí. Předpokládejme, že je splněna podmínka (A). potom existuje $K \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq K$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, takže můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$. Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ a $m \geq n$ a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Potom pro každé $k \in \{n, \dots, m\}$ platí $|\sigma_k| < \varepsilon$. Podle Lemmatu 3.3.4(a) máme

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| = \left|\left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1})\right) + \sigma_m b_m\right|.$$

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, takže $b_j - b_{j+1} \geq 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.11) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1})\right) + \sigma_m b_m\right| &\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1})\right) + |\sigma_m||b_m| \\ &\leq \varepsilon\left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1})\right) + \varepsilon|b_m| = \varepsilon((b_n - b_m) + |b_m|) \\ &\leq \varepsilon\left(|b_n| + 2|b_m|\right) \leq 3K\varepsilon.\end{aligned}$$

Kombinací odhadů dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.18 konvergentní.

Nyní předpokládejme, že platí podmínka (D). Potom jsou členy posloupnosti $\{b_n\}$ nezáporné. Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_n| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $n \geq n_0$ a $m \geq n$. Z Lemmatu 3.3.4(b) plyne

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|-s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m\right| \\ &\leq M b_n + \sum_{j=n}^{m} M(b_j - b_{j+1}) + M b_m \\ &= M b_n + M\,(b_n - b_m) + M b_m \\ &= 2M b_n < 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.18 konvergentní.

Je-li posloupnost $\{b_n\}$ neklesající, lze důkaz provést obdobně, nebo lze již dokázané tvrzení použít pro posloupnost $\{-b_n\}$. ■

3.3.6. Poznámka. Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je speciálním případem Věty 3.3.5(D), protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (vizte Příklad 3.1.6).

3.3.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx) = \cos(k - \tfrac{1}{2})x - \cos(k + \tfrac{1}{2})x,$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\cos(k-\tfrac{1}{2})x-\cos(k+\tfrac{1}{2})x\bigr)\\ &= \cos(1-\tfrac{1}{2})x-\cos(n+\tfrac{1}{2})x\\ &= \cos\tfrac{1}{2}x-\cos(n+\tfrac{1}{2})x,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

Jestliže $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. Jestliže $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak ze vzorce (3.9) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{\left|\cos(\frac{1}{2}x)-\cos(n+\frac{1}{2})x\right|}{\left|2\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \le \frac{1}{\left|\sin(\frac{1}{2}x)\right|},$$

a tedy opět má řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx) = \sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x.$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\bigr)\\ &= -\sin(1-\tfrac{1}{2})x+\sin(n+\tfrac{1}{2})x\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(\tfrac{1}{2}x).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Jestliže $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}1$ zřejmě nemá omezenou posloupnost částečných součtů. Jestliže $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak ze vztahu (3.11) plyne, že

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right| \le \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(\frac{1}{2}x)\right|}{\left|2\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \le \frac{1}{\left|\sin(\frac{1}{2}x)\right|},$$

a tedy opět má řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ omezená. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a splňuje $\lim b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ konverguje. ♣

3.3.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Jestliže $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, pak lze konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 3.3.9. Jestliže $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos nx = 1$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11. ♣

3.4. Absolutní konvergence číselných řad

3.4.1. Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Poznámka. Řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Důkaz. Podle Věty 3.1.18 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí $\sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Podle Věty 3.1.18 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Potom zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_n \leq \sigma_n$. Odtud, z definice součtu řady a Věty 2.2.44 plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

3.4.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (vizte Příklad 3.2.3), je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní. ♣

3.4.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 3.3.1.

Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 3.2.18. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. ♣

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.6. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tvrzení (e) lze dokázat obdobně. ■

3.4.7. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.11(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.11(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

3.4.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

Řešení. Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, tj. zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Pro vyšetření neabsolutní konvergence použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}. \tag{3.12}$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)+1 \geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (3.12). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje.

Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.9. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n}.$$

Tedy, kdyby konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.10 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1-\cos 2n}{n} + \frac{\cos 2n}{n}.$$

Kdyby tedy konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by podle Věty 3.1.22 i harmonická řada. To by však byl spor s Příkladem 3.1.11. ♣

3.4.10. Věta (Toeplitz). Nechť $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

(a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
(c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| < \infty$.

Nechť $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \le C \cdot \sup\{|a_k|\,;\ k \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Nyní navíc předpokládejme, že $\lim a_k = 0$. Zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \ge k_0\colon\ |a_k| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n| &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big|\end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má pevný konečný počet sčítanců a lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.13)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}|\varepsilon \le C\varepsilon.\end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.14 máme

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n| \le \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k\Big| + \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \le C\varepsilon$$

pro libovolné kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim b_n = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k\to\infty}(a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ∎

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty.

3.4.11. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \leq n, \\ 0, & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). ∎

Z následujícího příkladu vyplývá, že tvrzení Věty 3.4.11 nelze obrátit.

3.4.12. Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(-1)^n}{n}$. Odtud plyne tvrzení. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel $a_1, \dots, a_n$, pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců $a_1, \dots, a_n$. Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, n\}$ na sebe, pak platí $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada. Je-li $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

3.5.2. Uvažujme například bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n-1, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots \end{aligned}$$

Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a;\ a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f\bigl(\{1, \dots, n\}\bigr) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

3.5.4. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum_{n=n_0}^\infty a_n\right| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ a s její součet. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^\infty$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje. Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je tudíž konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

■

3.5.5. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{m} \left|a_{\pi(j)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud podle Věty 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Pro důkaz druhé části tvrzení označme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n, & t_n &= a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n, & t &= \lim_{n\to\infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemmatu 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \geq n$, a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{3.15}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{3.16}$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Pak podle (3.16) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N};\ i > m\}$ a podle (3.15) je $B \subset \{\pi(j);\ j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned}|s_p - t_p| &= \Big|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{p} a_{\pi(j)}\Big| = \Big|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_{\pi(j)}\Big| \le \sum_{i\in A} |a_i| + \sum_{j\in B} \big|a_{\pi(j)}\big| \\ &\le \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} \big|a_{\pi(j)}\big| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p\to\infty}(s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.23 plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{pokud } n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-1, & \text{pokud } n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k, & \text{pokud } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \qquad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \qquad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots,$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \big(a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{3.17}$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \tag{3.18}$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \tag{3.19}$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.17) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = s \in (0, \infty)$. Nyní snadno podle (3.18) a (3.19) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = s$. Podle Věty 2.3.23 obdržíme $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady. ♣

Následující věta ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu je pro neabsolutně konvergentní řady typické.

3.5.7. Věta (Riemann)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-,\ (-x)^+ = x^-,\ (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují, a jsou buď konečné nebo rovné ∞. Označme tyto součty po řadě s_+ a s_-. Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Důsledku 3.1.21 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ■

3.5.10. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.11. Lemma. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Nechť $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Potom platí

$$\lim_{j\to\infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha.$$

Důkaz. Uvažujme nejprve případ, kdy $\alpha < \beta$. Podle Věty 2.3.32(a) existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha_j < \beta_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$. Tedy pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $\min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha_j$, z čehož okamžitě plyne, že $\lim \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, máme dáno, pak podle definice limity existují $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_1$, platí $\alpha_j \in B(\alpha, \varepsilon)$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_2$, platí $\beta_j \in B(\beta, \varepsilon)$. Pro přirozená čísla $j \geq \max\{j_1, j_2\}$ pak dostáváme $\min\{\alpha_j, \beta_j\} \in B(\alpha, \varepsilon) = B(\beta, \varepsilon)$. ∎

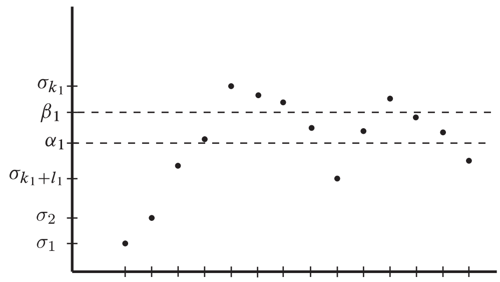
Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

3.5.12. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ platí $\liminf \sigma_n = \alpha$ a $\limsup \sigma_n = \beta$.

Důkaz. Nalezneme posloupnosti reálných čísel $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N};\ a_n \geq 0\} \qquad \text{a} \qquad M = \{n \in \mathbb{N};\ a_n < 0\}.$$

Technické provedení důkazu Věty 3.5.12 je poměrně obtížné, ale základní myšlenka je jednoduchá. Množiny P a M rozdělí množinu $\mathbb{N}$ na dvě disjunktní podmnožiny. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(k_1)$ z množiny P, kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1+1) < \pi(k_1+2) < \cdots < \pi(k_1+l_1)$ z množiny M, kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \ldots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M, přičemž každý vybereme právě jednou. Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



Obrázek 1.

Zřejmě $\mathbb{N} = P \cup M$ a $P \cap M = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a M jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina M je konečná.

Podle Věty 1.6.19 nalezneme bijekci ρ množiny $\mathbb{N}$ na P a bijekci τ množiny $\mathbb{N}$ na M. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme podle Lemmatu 3.5.3 $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, m\} \cap P \subset \{\rho(1), \dots, \rho(n)\}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\rho(k)} \geq \sum_{k=1}^{m} a_k^+.$$

Odtud, z Věty 2.2.44(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\rho(k)} = \infty. \tag{3.20}$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)} = -\infty. \tag{3.21}$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)} \geq \beta_j, \tag{3.22}$$

(b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \leq \alpha_j. \tag{3.23}$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.20). Nyní s pomocí (3.21) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{\tau(k)} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.20) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.21) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{\tau(k)} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno.

Konstrukce bijekce π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \tag{3.24}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = \big(k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}\big] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = \big(k_j + l_{j-1}, k_j + l_j\big] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.24) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} \rho(n - l_{j-1}), & \text{pokud } n \in A_j, \\ \tau(n - k_j), & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Surjektivita π. Přímo z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \rho\big((k_{j-1}, k_j] \cap \mathbb{N}\big) \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \tau\big((l_{j-1}, l_j] \cap \mathbb{N}\big). \tag{3.25}$$

Zobrazení π je tedy na, neboť podle předchozího platí

$$\pi(\mathbb{N}) = \rho(\mathbb{N}) \cup \tau(\mathbb{N}) = P \cup M = \mathbb{N}.$$

Injektivita π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}$, $\pi|_{B_j}$ prostá, neboť τ a ρ jsou prostá zobrazení. Dále máme $\pi\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \cap \pi\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = P \cap M = \emptyset$ a navíc podle (3.25) pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n-tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_{j-1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \tag{3.26}$$

Je-li $j \in \mathbb{N}$, pak platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. Předpokládejme, že nastává první případ. Potom $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmínce minimality v (b), platí $\sigma_{k_j+l_j-1} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j+l_j-1} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \beta_j$ podle (3.22). Odtud plyne $\sigma_{k_j+l_j-1} \geq \min\{\alpha_j, \beta_j\}$, a tedy

$$\begin{aligned}\alpha_j \geq \sigma_{k_j+l_j} &= \sigma_{k_j+l_j-1} + a_{\pi(k_j+l_j)} \\ &\geq \min\{\alpha_j, \beta_j\} + a_{\pi(k_j+l_j)}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Podle Lemmatu 3.5.11 platí $\lim_{j\to\infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.15). Užitím Lemmatu 3.5.10 obdržíme $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) plyne $\lim_{j\to\infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.27) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) snadno dostaneme

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \tag{3.28}$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.20) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^{n} a_{\rho(i-l_{j-1})} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{\rho(i-l_{j-1})}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{n} a_{\tau(i-k_j)} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{\tau(i-k_j)} = \sigma_{k_j+l_j},\end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{\tau(i-k_j)}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \tag{3.29}$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.28) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0\colon \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \tag{3.30}$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.29) a (3.30) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ■

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.12.

Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.12 existuje bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.13 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ■

3.6. Součin řad

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} a_i b_j . \tag{3.31}$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.31) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Obrázek 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách“ a dostáváme tak novou řadu, jejíž součet (pokud existuje) můžeme chápat jako součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Právě uvedená možnost násobení řad není jediná, patří však mezi důležitější. Její formální definice následuje.

3.6.1. Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$
\begin{aligned}
A_k &= \sum_{j=1}^{k} a_j, & A &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j, & \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|,\\
B_k &= \sum_{j=1}^{k} b_j, & B &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j, & \beta_k &= B_k - B,\\
c_k &= \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, & C_k &= \sum_{j=1}^{k} c_j.
\end{aligned}
$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$
\begin{aligned}
C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1)\\
&= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1\\
&= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1\\
&= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1)\\
&= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1)\\
&= A_k B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1)\\
&= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \left|\sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right|\\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right| \left|\beta_j\right|\\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right|\\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon\tilde{A}.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Podle Věty 3.1.15 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.32 také pro každé $j \in \{1, \dots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Díky 2.3.30 dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{3.34}$$

Díky Větě 2.4.14, (3.33) a (3.34) pak platí $\limsup |\gamma_k| \le \varepsilon \tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty 2.2.24 dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.32) pak dostáváme z Věty 2.2.36 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}| \, |b_i| \right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ∎

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.8.13) dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \le \frac{(k+1-i)+i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1.15). ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole 8 (vizte Větu 8.3.5).

3.6.5. Věta (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right).$$

3.7. Zobecněné řady

Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

3.7.2. Definice. Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(x,\varepsilon).$$

V takovémto případě pak píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Pokud je konvergentní zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, nazveme zobecněnou řadu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **absolutně konvergentní**.

3.7.3. Poznámka. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada" často psát jen „řada".

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu zobecněné řady)**.** Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1 \colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(x,\varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2 \colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(y,\varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha\in F_1\cup F_2} x_\alpha \in B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ■

3.7.5. Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

3.7.6. Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in B\bigl(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \varepsilon\bigr)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je obdobou Věty 3.1.20 pro zobecněné řady.

3.7.7. Věta (linearita zobecněného součtu)**.** Nechť řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ mají součet.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

(b) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

(a) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \left|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left|\sum_{\alpha \in F'} c x_\alpha - c x\right| = |c| \left|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = c x$.

Případ $x = -\infty, c < 0$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'} c x_\alpha > -c \frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě.

(b) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1\colon \left|\sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2\colon \left|\sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha - y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left|\sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)\right| \leq \left|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha \in F'} y_\alpha - y\right| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nalezneme konečnou množinu $F_1 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1\colon \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \tag{3.35}$$

Dále nalezneme konečnou množinu $F_2 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left| \sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha - y \right| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha > y - 1. \tag{3.36}$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme díky (3.35) a (3.36) nerovnost

$$\sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme. ■

3.7.8. Věta (vlastnosti zobecněného součtu)**.** Pro zobecněnou řadu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ platí následující tvrzení.

(a) Jsou-li čísla x_α, $\alpha \in I$, nezáporná, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha ;\ F \in \mathcal{F}(I) \right\}. \tag{3.37}$$

(b) Zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.38}$$

(c) Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. V tomto případě pak platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.39}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha ;\ F \in \mathcal{F}(I) \right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I) \colon \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \le s. \tag{3.40}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.40) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.38) plyne z Věty 3.7.7(b), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I}x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I;\ x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I;\ x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha\in I}x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha\in I}x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha\in P}x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha\in M}x_\alpha. \tag{3.41}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} = \left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\right\}, \tag{3.42}$$

$$\left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} = \left\{-\sum_{\alpha\in F}x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\right\}, \tag{3.43}$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^+ &= \sup\left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\right\} && \text{(podle (3.42))} \\
&= \sum_{\alpha\in P}x_\alpha = p, \\
\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^- &= \sup\left\{\sum_{\alpha\in F}x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{\alpha\in F}-x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\right\} && \text{(podle (3.43))} \\
&= \sum_{\alpha\in M}-x_\alpha && \text{(podle již dokázané části (a))} \\
&= -\sum_{\alpha\in M}x_\alpha = m. && \text{(podle Věty 3.7.7(a))}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Nechť $F \subset I$ je konečná. Z (3.41) plyne

$$\sup\left\{\sum_{\alpha\in G}x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(P \setminus F)\right\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_1}x_\alpha > -\sum_{\alpha\in F}x_\alpha + 1.$$

Z (3.41) dále plyne

$$\inf\left\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(M \setminus F)\right\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy nalezli $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha > 1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 3.7.7.

Rovnost (3.39) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.7, neboť $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-, \alpha \in I$. ■

Z Věty 3.7.8(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.9. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady)**.** Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a nechť platí $y_\alpha \le x_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.8(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Odtud pomocí Věty 3.7.8(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ■

3.7.10. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady)**.** Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.8(c) řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.8(b) i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha|$ a $0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.9 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.8(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. ■

3.7.11. Věta (přerovnání zobecněné řady)**.** Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.12. Věta. Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I;\ x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.10. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$I_n = \left\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha\in F} 1 = n \sum_{\alpha\in F} \frac{1}{n} \leq n \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \leq ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.6.19(b) množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.13. Poznámka. Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.12 plyne, že pro pro každé $c \in \mathbb{R}, c > 0$, je množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.15 pro konvergentní zobecněné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z Definice 3.7.2. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.14. Věta (zobecněný součet na $\mathbb{N}$)**.** Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.

(a) Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.10 konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolutně. Podle Věty 3.7.8(a) to znamená, že

$$\sup\left\{\sum_{n\in F} |x_n|;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{m} |x_n|;\ m \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ je konvergentní, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

$\Leftarrow$ Platí

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{m} |x_n|;\ m \in \mathbb{N}\right\} < \infty,$$

a tedy

$$\sup\left\{\sum_{n\in F} |x_n|;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} < \infty.$$

Podle Věty 3.7.8(a) je řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní podle Věty 3.7.10.

(b) Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní. Potom podle již dokázaného tvrzení (a) je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní. Označme $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dokážeme rovnost $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku konvergence řady (Věta 3.1.18). Můžeme tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left|s - \sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{i=n_0}^{n} |x_i| < \varepsilon.$$

Položme nyní $F = \{1, \dots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná množina obsahující F. Označme $F'' = \{i \in F';\ i > n_0\}$. Pak pro F' máme odhad

$$\begin{aligned}
\left|s - \sum_{i\in F'} x_i\right| &= \left|s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i - \sum_{i\in F''} x_i\right| \leq \left|s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \left|\sum_{i\in F''} x_i\right| \\
&\leq \left|s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \sum_{i\in F''} |x_i| \\
&\leq \left|s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \sum_{i=n_0+1}^{\max F'} |x_i| < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$.

Nyní předpokládejme, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{n\in F'} x_n > K.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i > K$. Tím jsme ukázali, že částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergují k ∞.

Konečně je-li $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$, pak díky Větě 3.7.7(a) platí $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) = \infty$, a tedy víme z předešlého, že $\sum_{n=1}^{\infty}(-x_n) = \infty$. Z Věty 3.1.20(a) plyne $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$. ■

3.7.15. Obrácená implikace v tvrzení Věty 3.7.14(b) neplatí. Přesněji, konvergentní řada nemusí mít zobecněný součet. Stačí uvažovat libovolnou neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.14(b). Pomocí Riemannovy věty (Věta 3.5.7) bychom nalezli bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq s$. Podle Věty 3.7.11 ale platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.14(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad)**.** Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i zobecněná řada $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\beta\in J} y_\beta\right).$$

Důkaz. Označme

$$x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \qquad y = \sum_{\beta\in J} y_\beta$$

a

$$A = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|, \qquad B = \sum_{\beta\in J} |y_\beta|.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1\colon \left|\sum_{\alpha\in F_1'} |x_\alpha| - A\right| < \varepsilon \ \wedge\ \left|\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha - x\right| < \varepsilon, \tag{3.44}$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(J), F_2' \supset F_2\colon \left|\sum_{\beta\in F_2'} |y_\beta| - B\right| < \varepsilon \ \wedge\ \left|\sum_{\alpha\in F_2} y_\beta - y\right| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Položme $F = F_1 \times F_2$. Zvolme konečnou množinu $F' \subset I \times J$ takovou, že $F \subset F'$. Nalezneme konečné množiny $F_1' \subset I$ a $F_2' \subset J$, takové, že $F' \subset F_1' \times F_2'$. Platí

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2} y_\beta,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - xy\right| &= \left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} x_\alpha y_\beta + \sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2} y_\beta - xy\right| \\ &\le \left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} x_\alpha y_\beta\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2} y_\beta - xy\right|.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Odhadněme nejprve první člen. Máme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} x_\alpha y_\beta\right| &\le \sum_{(\alpha,\beta)\in F'\setminus(F_1\times F_2)} |x_\alpha y_\beta| \\ &\le \sum_{\alpha\in F_1'\setminus F_1,\, \beta\in F_2'} |x_\alpha y_\beta| + \sum_{\alpha\in F_1',\, \beta\in F_2'\setminus F_2} |x_\alpha y_\beta| \\ &= \sum_{\alpha\in F_1'\setminus F_1} |x_\alpha| \sum_{\beta\in F_2'} |y_\beta| + \sum_{\alpha\in F_1'} |x_\alpha| \sum_{\beta\in F_2'\setminus F_2} |y_\beta| \\ &\le \varepsilon B + A\varepsilon.\end{aligned}$$

Nyní odhadneme druhý člen na pravé straně (3.46). Platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2} y_\beta - xy\right| &\le \left|\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta\in F_2} y_\beta - y\right) + \left(\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha - x\right) \cdot y\right| \\ &\le \sum_{\alpha\in F_1} |x_\alpha| \cdot \left|\sum_{\beta\in F_2} y_\beta - y\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha - x\right| \cdot |y| \\ &\le A\varepsilon + \varepsilon\,|y|\,.\end{aligned}$$

Tedy celkem

$$\left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - xy\right| \le \varepsilon B + A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon\,|y| = \varepsilon(2A + B + |y|).$$

Odtud plyne tvrzení. ∎

3.7.17. Věta (asociativita zobecněného součtu)**.** Nechť J je množina a $\{I_\beta;\ \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$. Nechť $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ pro $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\beta\in J} y_\beta$.

Důkaz. Zvolme $\beta \in J$. Podle Věty 3.7.10 je řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$ konvergentní. Pomocí (3.37) odhadneme

$$0 \le \sum_{\alpha\in I_\beta} |x_\alpha| \le \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| < \infty.$$

Odtud plyne, že i řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} |x_\alpha|$ konverguje. Tedy dle Věty 3.7.10 řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Čísla y_β, $\beta \in J$, jsou tedy dobře definována.

Označme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{\beta\in J} y_\beta = x$. Je-li $I = \emptyset$, pak pro každé $\beta \in J$ platí $I_\beta = \emptyset$, takže $y_\beta = 0$. Potom máme

$$\sum_{\beta\in J} y_\beta = \sum_{\beta\in J} 0 = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0.$$

Nechť $I \neq \emptyset$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou neprázdnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.47}$$

Označme $G = \{\beta \in J;\ F \cap I_\beta \neq \emptyset\}$. Množina G je konečná, neboť systém $\{I_\beta;\ \beta \in J\}$ je disjunktní a množina F je konečná. Nechť $G' \in \mathcal{F}(J)$, $G' \supset G$. Počet prvků G' označme n. Pro každé $\beta \in G'$ nalezneme konečnou množinu $F_\beta \subset I_\beta$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I_\beta), F' \supset F_\beta\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - y_\beta\right| < \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3.48}$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{\beta\in G'} F_\beta$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup_{\beta\in G'} I_\beta$, neboť $F \subset \bigcup_{\beta\in G} I_\beta \subset \bigcup_{\beta\in G'} I_\beta$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\beta\in G'} y_\beta - x\right| &\le \left|\sum_{\beta\in G'} y_\beta - \sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha\right| + \left|\sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha - x\right| \\
&\le \left|\sum_{\beta\in G'} \Big(y_\beta - \sum_{\alpha\in F^*\cap I_\beta} x_\alpha\Big)\right| + \left|\sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha - x\right| \\
&\le \sum_{\beta\in G'} \left|y_\beta - \sum_{\alpha\in F^*\cap I_\beta} x_\alpha\right| + \left|\sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha - x\right|.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.47)

$$\left|\sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $\beta \in G'$ platí $F_\beta \subset F^* \cap I_\beta$, a proto podle (3.48) platí

$$\left|y_\beta - \sum_{\alpha\in F^*\cap I_\beta} x_\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.49) pak plyne

$$\left|\sum_{\beta\in G'} y_\beta - x\right| < n\cdot\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.7.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněné řady)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0\ \exists F\in\mathcal{F}(I)\ \forall F'\in\mathcal{F}(I), F'\cap F=\emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \varepsilon. \tag{3.50}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x\in\mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F\subset I$ takovou, že pro každou konečnou množinu $F''\subset I$ obsahující F platí $|\sum_{\alpha\in F''} x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro konečnou množinu $F'\subset I$ disjunktní s F pak platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| = \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right|\\ &\le \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x\right| + \left|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

tedy podmínka (3.50) je splněna.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ splňuje podmínku (3.50). Nechť $n\in\mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.50) pro $\varepsilon=\frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n\subset I$ takovou, že

$$\forall F'\in\mathcal{F}(I),\ F'\cap F_n=\emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}. \tag{3.51}$$

Označme $y_n=\sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha$, $n\in\mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n,m\in\mathbb{N}$ platí

$$|y_m-y_n| = \left|\sum_{\alpha\in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right|.$$

Protože $F_m\setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n, dostáváme podle (3.51) odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m,n\in\mathbb{N}$ máme $|y_m-y_n| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. K němu nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro každá $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n_0$, $n\ge n_0$, platí

$$|y_m-y_n| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \le \frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.26 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $F' \subset I$ je konečná množina obsahující F_{n_0}. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\right| &= \left|\sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha - x\right| \\ &\leq \left|\sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\right| \\ &= \left|y_{n_0} - x\right| + \left|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\right|.\end{aligned}$$

Podle (3.51) platí

$$\left|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\right| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.19. Příklad. Dokažte, že $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} = \infty$.

Řešení. Protože řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1, \dots, 2j\} \times \{j+1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m) \in I_j} \frac{1}{n^2+m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2+m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Potom množiny I_{2^j}, $j \in \mathbb{N}$, jsou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^{k} I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(vizte definici zobecněné řady)}\\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(disjunktnost } I_{2^j},\ j\in\mathbb{N})\\ &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty. && \text{(vizte (3.52))}\end{aligned}$$

♣

3.7.20. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Položme

$$N_k = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \max\{m,n\} = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k-1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{m,n\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}.$$

Nechť $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Nalezneme $p \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{k=1}^{p} N_k$, a dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in F} \frac{1}{n^3+m^3} &\leq \sum_{(n,m)\in\bigcup_{k=1}^{p} N_k} \frac{1}{n^3+m^3} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3}\\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}.\end{aligned}$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Z (3.37) tedy máme

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3} < \infty.$$

♣

3.7.21. Příklad. Nechť Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Dokažte, že $\sum_{q\in Q} q = \infty$.

Řešení. Protože racionálních čísel větších jak $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q;\ q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle Poznámky 3.7.13. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q\in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.8(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

3.8.1. Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Jestliže $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(c) Jestliže $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Řešení. (a) Nalezneme $q \in (1, \infty)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq q,$$

a tedy

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geq (q-1)a_{n+1}.$$

Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - na_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} (ka_k - (k+1)a_{k+1}) \geq (q-1) \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$

To ale znamená, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{n+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Protože je řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{k+1} a_{n_0}$ divergentní, ze srovnávacího kritéria (vizte Větu 3.2.2) plyne, že řada $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{k+1}$ je divergentní, a tedy je divergentní i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(c) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (b). ♣

3.8.2. Příklad. Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Předpokládejme, že řada $\sum b_n$ je konvergentní. Dokažte, že pak je konvergentní i řada $\sum a_n$.

Dokažte pomocí tohoto tvrzení d'Alambertovo kritérium 3.2.11(c), (d).

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak dle předpokladu platí

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n_0}} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \\ &\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}.\end{aligned}$$

Dostáváme tak $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$. Konverguje-li tedy řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum a_n$.

Předpokládejme nyní, že řada $\sum a_n$ má kladné členy a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q \in [0, 1)$. Díky Větě 2.2.44 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum q^n$ konverguje (vizte Příklad 3.1.8). Podle výše dokázaného tvrzení řada $\sum a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.18. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m\colon \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{2}. \tag{3.53}$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim \left(1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}\right) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.53). ♣

3.8.4. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Dokažte, že existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0.$$

♣

3.8.5. Příklad. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k : c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \leq n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Nechť $\{s_n\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$. Pak platí $b_n \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}$. Pak pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{n_l} &= \sum_{n=1}^{n_l} b_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \leq \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ je omezená a posloupnost $\{s_n\}$ je rostoucí, a tedy je i posloupnost $\{s_n\}$ omezená. Odtud plyne, že řada $\sum b_n$ je konvergentní. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti zadaných řad.

3.8.6. Příklad. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Položme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

♣

3.8.7. Příklad. Dokažte, že platí

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ a $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Podle Definice 2.4.6 potom platí $e = \lim a_n$. Dokážeme nejprve, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$. Pro $n = 1$ zřejmě platí $a_1 = s_1 = 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.5) plyne, že

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1,$$

a tedy

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Nyní dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq \lim a_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí, a proto stačí toto tvrzení dokázat pouze pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) = 1.$$

Tedy z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44), že $s_n \leq \lim a_k$. Celkem jsme tedy dokázali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n \leq \lim a_k$. Protože $\lim_{k \to \infty} a_k = e$, dostaneme z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) rovnost $\lim_{n \to \infty} s_n = e$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.7

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \cdots (k+i)} < \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i}.$$

Podle Příkladu 3.1.9 máme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Z Definice 2.4.6 plyne, že číslo e je kladné. Předpokládejme, že e je racionální, tedy $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $q \cdot k!$ a dostaneme

$$q \cdot k! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < p \cdot k! < q \cdot k! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = q \cdot k! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}.$$

Pak zřejmě platí $m \in \mathbb{N}$ a navíc

$$m < p \cdot k! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ odtud dostáváme $p \cdot k! \in (m, m+1)$. To je ale spor, protože $m \in \mathbb{N}$ a $p \cdot k! \in \mathbb{N}$. ♣

3.8.2. Číselné rozvoje.

3.8.9. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a $P = \{0, \dots, p-1\}$. Nechť $\mathcal{P}$ je množina všech posloupností $\{a_n\}$, kde $a_n \in P$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \geq n \colon a_n \neq p - 1.$$

Definujme zobrazení $\varphi \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Dokažte, že zobrazení φ je dobře definované a jde o bijekci $\mathcal{P}$ na $[0, 1)$.

Řešení. Povšimněme si nejprve, že zobrazení φ je dobře definované zobrazení do $[0, 1]$ díky odhadu

$$\varphi(\{a_n\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Nyní si uvědomme, že pro posloupnosti a, b výše popsaného tvaru platí

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \frac{1}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \varphi(b).\end{aligned}$$

Obráceně, nechť $\varphi(a) = \varphi(b)$ pro dvě různé posloupnosti $a, b \in P^{\mathbb{N}}$. Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $b_k < a_k$. Nechť dále existuje $l > k$ takové, že $b_l < p - 1$. Pak máme

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \\ &< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k} \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\ &\leq \varphi(a),\end{aligned}$$

což je spor s předpokladem $\varphi(a) = \varphi(b)$. Tedy $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = p - 1$ a

$$\varphi(b) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k}.$$

Protože

$$\begin{aligned}\varphi(b) = \varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\ &\geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_{k+1}}{p^k} \\ &= \varphi(b),\end{aligned}$$

máme

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0 \quad \text{a} \quad a_k = b_k + 1.$$

K důkazu toho, že φ je bijekce, stačí ověřit, že φ je surjekce $\mathcal{P}$ na $(0, 1]$. Nechť $x \in (0, 1]$ je dáno. Induktivně definujeme posloupnost $\{a_n\}$ takto: Položme

$$a_1 = \max\{i \in P;\ \frac{i}{p} < x\}.$$

Máme-li čísla $a_1, \dots, a_n$ již nalezena, definujme

$$a_{n+1} = \max\{i \in P;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{i}{p^{n+1}} < x\}.$$

Povšimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}}. \tag{3.54}$$

Z definice posloupnosti $\{a_n\}$ totiž platí první nerovnost v (3.54). Abychom ověřili nerovnost druhou, předpokládejme, že

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pokud $a_{n+1} < p - 1$, vede tato nerovnost okamžitě ke sporu s definicí a_{n+1}. Pokud $a_{n+1} = p - 1$, pak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^n}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_n + 1}{p^n}.\end{aligned}$$

Z definice čísla a_n dostaneme $a_n = p - 1$. Induktivně pak obdržíme

$$a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = p - 1.$$

Proto

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{p-1}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}} = \frac{p-1}{p} \frac{\frac{1}{p^n} - 1}{\frac{1}{p} - 1} + \frac{1}{p^n} = 1,$$

což je spor. Tedy (3.54) platí.

Z těchto nerovností vidíme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy pomocí Věty 2.2.44 máme

$$\varphi(\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy φ je zobrazení na. ♣

3.8.10. Definice. Zápis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1a_2a_3\dots$ se nazývá p**-adickým rozvojem čísla** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

3.8.11. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $x \in [0,1]$ má p-adický rozvoj $0.a_1a_2a_3\dots$. Ten nazveme **periodickým**, pokud existují přirozená čísla $k \geq 0$, $r > 0$ taková, že pro $n > k$ platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že x má periodický rozvoj právě tehdy, když je racionální.

Řešení. Nechť nejprve rozvoj $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ je periodický, tj. existují $k, r \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+r} = a_n$ pro $n > k$. Potom ale díky absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ lze použít Větu 3.7.17 a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{p^{3r}} \cdots\right) \\ &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}}, \end{aligned}$$

což je racionální číslo.

Nechť je nyní číslo $x \in [0,1]$ racionální. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in (0,1)$, tj. $x = \frac{u}{v}$, kde $u, v \in \mathbb{N}$ a $u < v$. Nechť $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ je p-adický rozvoj x. Jsou-li všechna a_n od jistého místa rovna 0 nebo jsou od jistého místa rovna $p-1$, je zřejmě rozvoj x periodický. Předpokládejme tedy, že tomu tak není, tj. $\{a_n\} \in \mathcal{P}$ (viz Příklad 3.8.9) a $\{a_n\}$ nekončí opakováním cifry $p-1$. Označme $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$0 \leq x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k}.$$

Tedy

$$0 \leq p^k(x - s_k) < 1.$$

Dále máme

$$p^k(x - s_k) = p^k\frac{u}{v} - p^k s_k = \frac{c_k}{v}, \tag{3.55}$$

kde c_k je celé číslo. Protože $0 \leq p^k(x - s_k) < 1$, je $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$. Tedy pro každé $k \in \{1, \dots, v+1\}$ platí $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$.

Proto existují indexy $k, l \in \{1, \dots, v+1\}$, $k < l$, takové, že $c_k = c_l$. Položme $r = l - k$, pak $c_k = c_{k+r}$. Z (3.55) máme

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{v} &= p^k(x - s_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k}}{p^j}, \\ \frac{c_{k+r}}{v} &= p^{k+r}(x - s_{k+r}) = \sum_{n=k+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k+r}}{p^j}. \end{aligned}$$

Máme tedy dva rozvoje čísla $\frac{c_k}{v}$ nekončící cifrou $p-1$, a tedy se dle Příkladu 3.8.9 musí rovnat. Proto pro $n > k$ platí $a_n = a_{n+r}$ a x je periodické. ♣

3.8.3. Řady s obecnými členy.

3.8.12. Příklad. Nechť $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pro $k = 0$ zřejmě platí $\sum_{i=0}^{0}(-1)^i a_{n+i} = a_n$, a tedy

$$0 \leq \sum_{i=0}^{0} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Předpokládejme nyní, že uvedené tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k+1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n. \tag{3.56}$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{n+1+i} \leq a_{n+1}. \tag{3.57}$$

Potom díky (3.57) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \geq a_n - a_{n+1} \geq 0 \\ \leq a_n \end{cases}, \tag{3.58}$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ♣

3.8.13 (alternativní důkaz Věty 3.3.1)**.** Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (3.1). Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < \varepsilon. \tag{3.59}$$

Vezměme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n \leq m$. Pak z Příkladu 3.8.12 a (3.59) plyne

$$\left|\sum_{i=n}^{m} (-1)^i a_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i}\right| = \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v původním důkazu Věty 3.3.1.

3.8.14. Příklad. Nechť řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ omezenou posloupnost částečných součtů.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Řešení. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$ a $|t_n| \leq M$.

(a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} ca_k\right| = |cs_n| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů dokázána.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right| \leq |s_n| + |t_n| \leq 2M,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.15. Příklad. Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum b_k = \sum a_n$.

Řešení. Nechť $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Platí

$$t_m = \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j = \sum_{j=1}^{n_{m+1}-1} a_j = s_{n_{m+1}-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, existuje vlastní limita $a = \lim_{m\to\infty} s_m$. Z Věty 2.2.32 a (3.60) pak dostáváme

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} s_{n_{m+1}-1} = a.$$

Řada $\sum b_k$ tedy konverguje. ♣

3.8.16. Příklad. Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum b_k$ konverguje.

Řešení. Nechť $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Podle Příkladu 3.8.15 stačí dokázat, že řada $\sum a_n$ konverguje, konverguje-li řada $\sum b_k$. Označme $b = \lim_{m\to\infty} t_m$. Jelikož má řada $\sum a_n$ nezáporné členy, existuje $a = \lim_{m\to\infty} s_m$. Z rovnosti (3.60) pak plyne

$$\lim_{m\to\infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{m\to\infty} t_m = b,$$

tj. posloupnost $\{s_m\}$ má konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{m+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.22) a řada $\sum a_n$ konverguje. ♣

3.8.17. Příklad. Nalezněte divergentní řadu $\sum a_n$ a rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $n_1 = 1$ a řada $\sum b_k$ konverguje, kde $b_k = \sum_{n_k \le j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.15). ♣

3.8.4. Nekonečné součiny.

3.8.18. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečným součinem**. Pokud existuje limita $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu. Je-li tato hodnota reálné číslo, pak říkáme, že uvedený nekonečný součin **konverguje**.

3.8.19. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. $\Leftarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \ge \prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \ge 1 + \sum_{n=1}^{k} a_n \ge \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \le x$ (vizte 1.7.16) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\log\Big(\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\Big) = \sum_{n=1}^{k} \log(1 + a_n) \le \sum_{n=1}^{k} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \le \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.20. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n-té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{p_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_n}\Big)^k \Big)$$

je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k \Big).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}, l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla z množiny $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}, j \leq n_0\}$ v mocnině nejvýše n_0. Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_n}\Big)^k \Big) \geq \prod_{n=1}^{n_0} \Big(\sum_{k=0}^{n_0} \Big(\frac{1}{p_n}\Big)^k \Big) \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

3.8.5. Miscelanea.

3.8.21. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}. \tag{3.61}$$

Řešení. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Podle 1.7.16 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost $\log(1 + x) \leq x$. Dosadíme-li $x = \frac{1}{k}$, dostaneme ihned druhou nerovnost v (3.61). Dosadíme-li $x = -\frac{1}{k+1}$, pak je předpoklad $x > -1$ splněn, a tedy platí

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1},$$

to jest

$$-\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Odtud a z vlastností logaritmu (1.7.16) dostáváme

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1},$$

což je první nerovnost v (3.61). ♣

3.8.22. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \log n \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Sečtením nerovností v (3.61) pro hodnoty $k \in \{1, \dots, n-1\}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Z vlastností logaritmické funkce (1.7.16) ale vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}\right) = \log n.$$

Odtud vyplývají obě dokazované nerovnosti. ♣

3.8.23. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le 0$$

podle první nerovnosti v (3.61). Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy nerostoucí. Dále platí podle Příkladu 3.8.22

$$a_n \ge 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log n \ge 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. Z Důsledku 2.4.2 tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

3.8.24. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\big) - \log n\Big).$$

Z Příkladu 3.8.23 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.[3] Tato konstanta je přibližně rovna $0,577$ a není známo, zda je racionální.

3.8.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

[3] Lorenzo Mascheroni (1750–1800)

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Potom platí

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy podle věty o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) platí

$$\begin{aligned}\lim b_n &= \lim \left(a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n\right)\\ &= \lim \left(a_{2n} - a_n + \log\left(\frac{2n}{n}\right)\right) = \gamma - \gamma + \log 2\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

♣

3.8.26. Příklad. Ukažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$. (Definice relace $\approx$ je uvedena v Definici 1.6.1(a).)

Řešení. Označme $\mathcal{Z}$ množinu všech posloupností, jejichž členy jsou prvky $\{0, 1\}$. Pak platí $\mathcal{Z} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (vizte Příklad A.0.33). Pro $z \in \mathcal{Z}$ definujme $\varphi\colon \mathcal{Z} \to [0, 1]$ předpisem

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Dokážeme, že φ je prosté. Nechť $z, z' \in \mathcal{Z}$, $z \neq z'$. Nalezneme nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $z(n) \neq z'(n)$. Můžeme předpokládat, že $z(n) = 1$ a $z'(n) = 0$. Pak

$$\begin{aligned}\varphi(z') &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z'(k)}{3^k}\\ &\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z(k)}{3^k}\\ &= \varphi(z).\end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{Z} \preceq [0, 1] \preceq \mathbb{R}$.

Nyní dokážeme, že platí $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Podle Příkladu 1.6.20 platí $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$, a tedy podle Příkladu **??** stačí ověřit, že platí $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ předpisem

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q};\ q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že zobrazení ψ je prosté. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}$, přičemž $x \neq y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x < y$. Podle Věty 1.5.29

existuje racionální číslo r splňující $x < r < y$. To znamená, že $r \in \psi(y) \setminus \psi(x)$, a tedy $\psi(x) \neq \psi(y)$. Odtud plyne, že ψ je prosté, a tudíž $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Dokazované tvrzení vyplývá z Cantorovy-Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5). ♣

3.8.27. Příklad. Dokažte, že platí $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ předpisem $\varphi(x) = [x, 0]$. Potom φ je zřejmě prosté. Odtud plyne, že $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$. Nyní definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ předpisem

$$\psi(x, y) = \{[p, q] \in \mathbb{Q}^2;\ (p < x) \wedge (q < y)\}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Nechť $[x, y], [x', y'] \in \mathbb{R}^2$, $[x, y] \neq [x', y']$. Pak platí buď $x \neq x'$ nebo $y \neq y'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \neq x'$, a dále že $x < x'$. Podle Věty 1.5.29 nalezneme racionální číslo r splňující $x < r < x'$. Potom pro každé $q \in \mathbb{Q}$, $q < \min\{y, y'\}$, platí $[r, q] \in \psi(x', y) \setminus \psi(x, y)$, takže ψ je prosté. Podle Věty 1.6.19(c) a Příkladu 1.6.20 platí $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$, a tedy

$$\mathbb{R}^2 \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Protože $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dle Příkladu 3.8.26, plyne tvrzení z Cantorovy-Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5). ♣

3.8.28. Příklad. Ukažte, že Cauchyův součin divergentních řad $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ je konvergentní.

Řešení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost členů řady $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $\{b_n\}$ je posloupnost členů řady $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$. Označme dále $\{c_n\}$ posloupnost členů Cauchyova součinu obou řad. Potom platí $c_1 = -2$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, platí

$$\begin{aligned} c_k &= (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) = a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení. ♣

3.8.29. Příklad. Nechť Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že existují bijekce π a σ množiny $\mathbb{N}$ na Q takové, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ reálných čísel z intervalu $[0, 1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} < 2^{-(k+1)}$. Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l\colon P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q\in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q\in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1}^{n_k+l} \le \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} \le 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 3.\end{aligned}$$

Konstrukce σ. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma\colon \mathbb{N} \to Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^{m} q_k^{2k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.9. Početní příklady k číselným řadám

3.9.1. Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Spočteme $\lim \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n+3}{(n^4+1)^6}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, platí

$$2(\sqrt[n]{n})^2 \le \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \le \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2$$

a

$$\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n^{24}} \le \sqrt[n]{(n^4+1)^6} \le \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6}(\sqrt[n]{n})^{24}.$$

Odtud vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, platí

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2^6}(\sqrt[n]{n})^{22}} = \frac{2(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{2^6}(\sqrt[n]{n})^{24}} \le \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} \le \frac{2\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{n}} = 2\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Podle věty o dvou strážnících, Příkladů 2.2.52 a 2.2.53 a věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} = 2.$$

Protože $2 > 1$, zadaná řada diverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že se zadaná řada bude chovat podobně jako řada s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.11, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. Pomocí Příkladu 2.2.53 dostaneme

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$, Zadaná řada konverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada má kladné členy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^{\alpha}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Ta podle Věty 3.2.18 konverguje právě tehdy, když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě tehdy, když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n \log^2 n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Příkladu 3.2.3 a linearity konvergentních řad (Důsledek 3.1.21). Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Výraz $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$ je dobře definován a je kladný pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$a_n = \frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)\log^2 n}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, položme $b_n = \frac{1}{n \log^2 n}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Podle Příkladu 3.9.5 řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. Tedy

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)^2 = 0.$$

Protože $0 < 1$, zadaná řada konverguje podle d'Alembertova podílového kritéria. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$.

Řešení. Obor hodnot funkce kosinus je interval $[-1,1]$ a pro všechna $t \in [-1,1]$ platí

$$0 \leq \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \leq 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Zadaná řada má tedy nezáporné členy. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \leq \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Podle Příkladu 3.1.8 řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ konverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$. Podle Příkladu 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} \\ &= (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}) \frac{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{(n^2+5)-(n^2+1)}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{4}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}. \end{aligned}$$

Řada má tedy kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{5}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}} = \frac{4}{3}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle Věty 3.2.18, a proto konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{k\to\infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Položme $n_0 = k_0^3$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{(\sqrt[3]{n})^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}]+1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{(2[\sqrt[3]{n}])^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6,$$

a tedy

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Položme $a = \sqrt{n^2+3}$ a $b = \sqrt[3]{n^3+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \frac{(n^2+3)^3 - (n^3+1)^2}{a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5} \\ &= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5}. \end{aligned}$$

Protože $\lim(9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26) = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je a_n nezáporné. Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Protože $\frac{3}{2} \in (0, \infty)$ a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11, zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Podle Raabeova kritéria (Příklad 3.8.1) tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.13. Příklad. Nechť $a, b, d \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou kladné a platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+(n+1)d}{a+(n+1)d} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{b-a}{a+(n+1)d} = \frac{b-a}{d}.$$

Jestliže $b - a > d$, pak zadaná řada konverguje podle Raabeova kritéria. Jestliže $b - a < d$, pak zadaná řada dle stejného kritéria diverguje. Jestliže $b = a + d$, pak platí

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)(a+(n+1)d)} = \frac{a}{a+(n+1)d} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{a}{d}.$$

Protože $\frac{a}{d} \in (0, \infty)$, zadaná řada v tomto případě diverguje podle Věty 3.2.5. ♣

3.9.2. Řady s obecnými členy.

3.9.14. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Navíc podle Věty 3.2.18 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, a tedy zadaná řada nekonverguje absolutně. ♣

3.9.15. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx+\alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx+\alpha)$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladů 3.3.7 a 3.3.8. Dále podle 1.7.18 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\sin(nx+\alpha) &= \sin nx \cos\alpha + \cos nx \sin\alpha,\\ \cos(nx+\alpha) &= \cos nx \cos\alpha - \sin nx \sin\alpha.\end{aligned}$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení plynou pomocí Příkladu 3.8.14. ♣

3.9.16. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(-1)^{[\sqrt{n}]}\right| \le 1 \quad \text{a} \quad 0 \le \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)} \le \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \le \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}. \tag{3.62}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní podle Věty 3.2.18. Z nerovnosti (3.62) a srovnávacího kritéria tedy vyplývá, že zadaná řada je absolutně konvergentní. ♣

3.9.17. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Podle 1.7.18 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \sin nx = \sin n(x+\pi) \quad \text{a} \quad (-1)^n \cos nx = \cos n(x+\pi).$$

Tvrzení tedy plyne z Příkladu 3.9.15. ♣

3.9.18. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konvergentní.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a konverguje k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria. ♣

3.9.19. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konvergentní.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Příkladu 3.9.18. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$$

a

$$\frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ je tedy omezená a rostoucí. Podle Abelova kriteria je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.20. Příklad. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4}) \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right) \frac{n^2+n}{n^2+2}$$

konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Položme

$$a_n = \cos(nx + \frac{\pi}{4}), \quad b_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n, \quad c_n = \frac{n^2+n}{n^2+2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n},$$

a tedy $\lim b_n = 0$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost $b_{n+1} \leq b_n$ platí právě tehdy, když

$$\sqrt{(n+1)^2+\sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$\sqrt{(n+1)^2+\sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n,$$

$$(n+1)^2 + \sqrt{n+1} \leq n^2 + \sqrt{n} + 1 + 2\sqrt{n^2+\sqrt{n}},$$

$$2n + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n^2+\sqrt{n}},$$

$$4n^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 4n^2 + 4\sqrt{n},$$

a konečně

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 4. \tag{3.63}$$

Protože

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2,$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (3.63), a tedy $b_{n+1} \leq b_n$.

Podle Příkladu 3.9.15 má $\sum a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Podle Dirichletova kritéria je tedy řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n)$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n)$.

Protože $\lim c_n = 1$, je posloupnost $\{c_n\}$ omezená. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $c_n \geq c_{n+1}$ právě tehdy, když

$$\frac{n^2+n}{n^2+2} \geq \frac{(n+1)^2+(n+1)}{(n+1)^2+2}.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$(n^2+2n+3)(n^2+n) \geq (n^2+2)(n^2+3n+2),$$

$$n^4+3n^3+5n^2+3n \geq n^4+3n^3+4n^2+6n+4,$$

$$n^2 \geq 3n+4,$$

a konečně

$$1 \geq \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti zřejmě konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tato nerovnost platí. Pro tato n tedy máme $c_n \geq c_{n+1}$, tj. $\{c_n\}$ je od indexu n_0 nerostoucí. Proto podle Abelova kritéria konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

Nechť nyní $x \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Posloupnost $\{b_n\}$ má nezáporné členy a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{1}{2}.$$

Řada $\sum b_n$ proto diverguje podle limitního srovnávacího kritéria a Věty 3.2.18.

Protože $\lim c_n = 1$ a $\{c_n\}$ je od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ neklesající, je i posloupnost $\{\frac{1}{c_n}\}$ omezená a monotónní. Pokud by konvergovala řada $\sum b_n c_n$, pak by podle Abelova kritéria konvergovala i řada $\sum b_n = \sum b_n c_n \frac{1}{c_n}$, která však diverguje. Proto řada $\sum b_n c_n$ diverguje. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a platí $\lim \frac{1}{\log n} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n-1}$. Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverguje, plyne ze srovnávacího kritéria, že diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Zadaná řady tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$.

Řešení. Označme $\{a_n\} = \{(\sqrt[n]{3}-1)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a platí $\lim a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.53. Řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. Podle Věty 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[n]{3}-1 &= (\sqrt[n]{3}-1)\cdot \frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} \\ &= \frac{3-1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} = \frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} \geq \frac{2}{3n}. \end{aligned}$$

Pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n}.$$

Poslední řada je divergentní, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right|$ diverguje podle srovnávacího kritéria. ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy první řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Obdobně lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^n \frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Zbývá vyšetřit případy $x = 1$ a $x = -1$. Položme $x = -1$. Pak obdržíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Položme $x = 1$. Potom dostaneme dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, která konverguje podle Leibnizovy věty. Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když $x \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označme $a_n = \binom{2n}{n} x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} |x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!} |x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x| = 4|x| \, .
\end{aligned}$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$. Zbývá vyřešit případy $x = \frac{1}{4}$ a $x = -\frac{1}{4}$.

Položme $b_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $b_1 = \frac{1}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} b_n. \tag{3.64}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že

$$\frac{1}{2n} \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{3.65}$$

Je zřejmé, že pro $n = 1$ obě nerovnosti v (3.65) platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} b_n \begin{cases} \geq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n+2} \\ \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \end{cases}.$$

Z (3.64) vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Z (3.65) a věty o dvou strážnících plyne, že $\lim b_n = 0$. Podle Leibnizovy věty tedy dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$.

Z (3.65) a srovnávacího kritéria dále plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ je divergentní.

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin 2n| \geq \sin^2 2n = \frac{1}{2}(1 - \cos(4n)) \geq 0,$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}. \tag{3.66}$$

Podle Dirichletova kritéria a Příkladu 3.3.8 konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ konverguje. Potom díky linearitě konvergentních řad (Důsledek 3.1.21) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což je spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje. Tato řada má nezáporné členy. Podle srovnávacího kritéria a (3.66) tedy diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, označme $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Z Příkladu 3.3.8 plyne, že řada $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}_{n=3}^{\infty}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right| \geq \cos^2\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(n\frac{\pi}{2})).$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}\right| &\geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1+\cos(n\frac{\pi}{2})}{2\log(\log n)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2\log(\log n)} - \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}\right). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\log n \leq n-1$. Protože funkce log je rostoucí, plyne odtud, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\log(\log n) \leq \log(n-1)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2\log(\log n)} \geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2n} = \infty,$$

takže řada $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2\log(\log n)}$ diverguje. Řada $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria. Z linearity konvergentních řad tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2\log(\log n)} - \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}\right)$$

diverguje. Podle (3.67) a srovnávacího kritéria tedy zadaná řada konverguje neabsolutně. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg} n$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \operatorname{arctg} n$. Posloupnost $\{b_n\}$ je rostoucí a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Zadaná řada tedy konverguje podle Abelova kritéria.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg} n\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje. Zadaná řada tedy není absolutně konvergentní. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{\sin n}{n+10\sin n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, a $b_n = \frac{\sin n}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme řadu $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$. Ta je podle Příkladu 3.3.9 konvergentní a přitom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{-10(\sin n)^2}{n(n+10\sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n-10)}.$$

Označme $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$. Potom má řada $\sum c_n$ nezáporné členy, platí $\lim c_n n^2 = 10$ a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Příkladu 3.2.3. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum c_n$. Podle srovnávacího kritéria je tudíž i řada $\sum |a_n - b_n|$ konvergentní. Podle Věty 3.4.3 odtud plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$\left| \frac{\sin n}{n+10\sin n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}.$$

Řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)}$ konverguje. To lze ověřit podobně, jako jsme dokázali konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí $\frac{1}{n+10\sin n} \geq \frac{1}{n+10}$, takže podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10\sin n)}$ diverguje. Z linearity konvergentních řad tedy vyplývá, že $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}$ diverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž diverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n+10\sin n} \right|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.31. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Z Příkladu 3.9.15 víme, že řada $\sum \sin(2n+1)$ má omezené částečné součty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(-1)^n \sin(2n+1) = (-1)^n \sin(2n)\cos(1) + (-1)^n \cos(2n)\sin(1).$$

Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum (-1)^n \sin(2n+1)$ omezenou posloupnost částečných součtů. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2n+(-1)^n n} = \frac{2n-(-1)^n n}{3n^2}.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(2n+1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n} \right).$$

Posloupnost $\{\frac{2}{3n}\}$ je klesající a platí $\lim \frac{2}{3n} = 0$. Řada $\sum \frac{2\sin(2n+1)}{3n}$ tudíž konverguje podle Dirichletova kritéria. Podobně lze ověřit konvergenci řady $\sum \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n}$. Odtud vyplývá, že řada $\sum \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n}$ konverguje. Protože posloupnost $\{\operatorname{arctg}(n^2)\}$ je rostoucí a omezená, zadaná řada konverguje podle Abelova kritéria. ♣

KAPITOLA 4

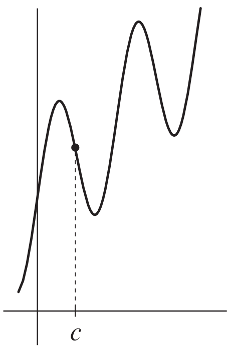
Limita a spojitost funkce

4.1. Definice a základní vlastnosti

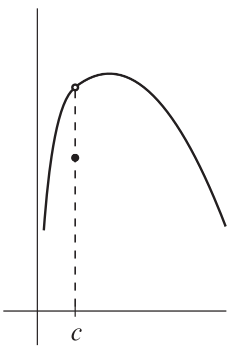
4.1.1. Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

V této kapitole budeme psát stručněji jen **funkce**. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

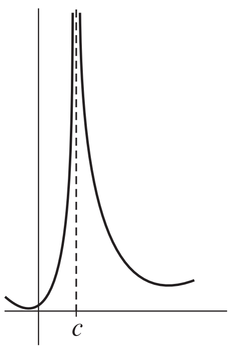
Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c. Na prvém obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c, blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c. Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c. Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázkům pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



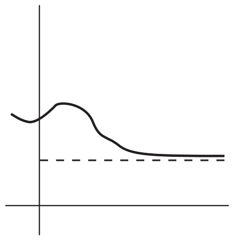
Obrázek 1.



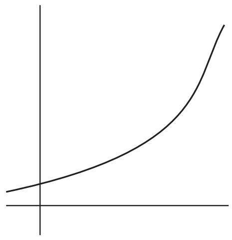
Obrázek 2.



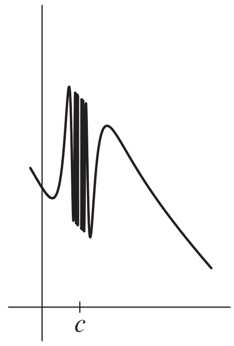
Obrázek 3.



Obrázek 4.



Obrázek 5.



Obrázek 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c. Přitom si ale nebudeme všímat funkční hodnoty v bodě c, ale pouze samotného faktu „blížení se". Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.2. Definice. Připomeňme, že v Definici 2.3.14 jsem definovali pojem okolí pro body z $\mathbb{R}^*$. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Prstencové okolí bodu** c definujeme jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Prstencové okolí bodu ∞ (respektive $-\infty$) definujeme takto

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}).$$

4.1.3. Poznámky. (a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c, \varepsilon_1) \subset B(c, \varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněte si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset.$$

V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{(|c_2|+2)}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \leq c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{1/(|c_2| + 2)} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1, \varepsilon)$, $y \in B(c_2, \varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.4. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon). \tag{4.1}$$

4.1.5. Věta (jednoznačnost limity)**.** Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně existuje $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon_1) \cap B(A_2, \varepsilon_2) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.6. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

4.1.7. Poznámky. (a) Jestliže $\lim_{x \to c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c. V bodě c funkce nemusí být vůbec definována.

(b) Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \textbf{ve vlastním bodě}\text{, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}, \end{cases} \\ \textbf{v nevlastním bodě}\text{, tj. } c = \pm\infty \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

Uvědomme si, že pro $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to c} f(x) = A$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Obdobně platí $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \colon x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.8. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_0)$ platí $f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Nyní položíme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $x \in P(c, \delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A, \varepsilon)$. ■

4.1.9. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x \to c} x = c$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(c, \varepsilon)$ platí $x \in P(c, \delta) = P(c, \varepsilon) \subset B(c, \varepsilon)$. ■

4.1.10. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu volme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(\infty, \delta)$ platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0, \varepsilon)$. ■

4.1.11. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Důkaz. Ukážeme, že formule (4.1) je splněna pro funkci $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $c = 0$ a $A = \infty$. Zvolme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

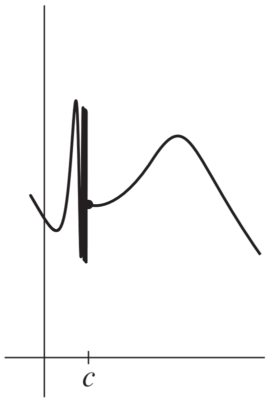
$$\forall x \in P(0, \delta) \colon \frac{1}{x^2} \in B(\infty, \varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0, \delta) \colon \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ■

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.12. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B_+(c,\varepsilon) = [c, c+\varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B_-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P_+(c,\varepsilon) = (c, c+\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P_-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c)$.

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B_-(\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B_+(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P_-(\infty,\varepsilon) = B_-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P_+(-\infty,\varepsilon) = B_+(-\infty,\varepsilon)$.

4.1.13. Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.14. Poznámka. Obdobně jako ve Větě 4.1.5 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x\to c-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x\to c+} f(x)$.

4.1.15. Věta. Funkce f má limitu v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají. Potom navíc platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

neboť $P_+(c,\delta) \subset P(c,\delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x\to c-} f(x) = A$ dokážeme obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta_1)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c,\delta_2)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom $P(c,\delta) \subset P(c,\delta_1) \cup P(c,\delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $f(x) \in B(A,\varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. ∎

Nyní dokážeme jednoduchý, ale užitečný princip, který je obdobou Věty 2.2.24 pro funkce. Nejprve zformulujeme pomocné tvrzení.

4.1.16. Lemma. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí ekvivalence

$$y \in B(0, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |y| \in B(0, \varepsilon).$$

Důkaz. Nechť $y \in \mathbb{R}$. Potom $y \in B(0, \varepsilon)$ právě tehdy, když $-\varepsilon < y < \varepsilon$, což zřejmě platí právě tehdy, když $-\varepsilon < -y < \varepsilon$. Odtud a z definice absolutní hodnoty reálného čísla plyne tvrzení. ■

4.1.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu c. Potom platí:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

právě tehdy, když

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Z definice limity plyne, že $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když platí (4.1) pro speciální volbu $A = 0$. Dle Lemmatu 4.1.16 ovšem $f(x) \in B(0, \varepsilon)$ platí právě tehdy, když $|f(x)| \in B(0, \varepsilon)$. Tedy $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon |f(x)| \in B(0, \varepsilon),$$

což podle Definice 4.1.4 znamená, že $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$. ■

4.1.18. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x \to c_-} f(x) = f(c)$).

4.1.19. Poznámka. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

(iii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \colon |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Porovnejte poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.20. Příklady. (a) Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tuto funkci nazýváme **signum** a značíme ji sign. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sign} x = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to 0_-} \operatorname{sign} x = -1.$$

Funkce sign je tedy v bodě 0 nespojitá.

(b) Afinní funkce $f: x \mapsto ax + b$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Udělejme to podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x - c) < f(c) + a\delta.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, plyne z předchozí nerovnosti, že pro každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

4.2.1. Věta (vlastní limita a omezenost)**.** Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje $P(c, \delta)$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, 1),$$

neboli $f(P(c, \delta)) \subset (A - 1, A + 1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c, \delta)$. ■

4.2.2. Věta (aritmetika limit funkcí)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$,
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$,
(c) $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$,

pokud jsou pravé strany definovány.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

(1) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(2) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \{-\infty, \infty\}$,
(3) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(4) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$,
(5) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(6) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$.

(1) Naším cílem je dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Z definice limity plyne, že ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{|B|}{2}, B + \frac{|B|}{2})$, a tedy $|g(x)| > \frac{|B|}{2} > 0$, takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c,\eta)$. Pro $x \in P(c,\eta)$ odhadujme

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - g(x)A| \\
&= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\
&\leq \frac{1}{|g(x)|\,|B|}(|B|\,|f(x) - A| + |A|\,|B - g(x)|) \\
&\leq M(|f(x) - A| + |g(x) - B|),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $M = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2}\right\}$. Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z předpokladů věty plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4.5}$$

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.6}$$

Potom pro $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$ plyne platnost (4.3) z (4.4), (4.5) a (4.6).

(2) Podle Věty 4.2.1 existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, a kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \in P(c,\delta_1)\colon |f(x)| < K. \tag{4.7}$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ať už předpokládáme $B = \infty$ nebo $B = -\infty$, můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ díky (4.7) a (4.8) dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že pro $A \in \mathbb{R}$ a B nevlastní je limita rovna 0.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon g(x) < 2B. \tag{4.9}$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)–(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka. ■

4.2.3. Příklad. Následující příklady demonstrují, že bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.2 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci.

Uvažujme například $f(x) = x$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -x$, ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = 0$.

Poněkud odlišný příklad je následující. Vezměme $f(x) = x \sin x$ a $g(x) = (x+1)\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, i když $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Potíž tkví v tom, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ není definován na žádném okolí ∞.

4.2.4. Poznámka. Věta 4.2.2 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.5. Věta (spojitost a aritmetické operace)**.** Nechť f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plynou okamžitě z Věty 4.2.2. ■

4.2.6. Příklad. Víme již, že funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.20(b)). Podle předcházející věty jsou tedy funkce $x^2, x^3, x^4, \dots$ spojité v každém bodě $\mathbb{R}$. Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Výraz „$\frac{A}{0}$“ není definován, nicméně platí tato věta.

4.2.7. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \infty$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{A}{2}, A + \frac{A}{2})$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{A}{2(|L|+1)}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A/2}{A/(2(|L|+1))} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme opět $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$

takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{1/(|L|+1)} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.8. Poznámka. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to c_+} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c_+} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P_+(c,\eta)$, pak $\lim_{x\to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

4.2.9. Věta (o srovnání)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \le g(x).$$

Nechť existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(c) (o dvou strážnících) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon\ f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$ a $B = \lim_{x\to c} g(x)$. Podle Poznámky 4.1.3(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon\ f(x) \in B(A,\varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon\ g(x) \in B(B,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle Poznámky 4.1.3(c) pro každé $x \in B(c,\delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Tuto část tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon\ f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c,\delta) \cap P(c,\eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \ge f(y)$, což je spor.

(c) Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in P(c, \delta_1)$ platí

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, potom máme

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x \to c} h(x) = A$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x \to c} h(x) = \infty$.

Případ $A = -\infty$ lze dokázat obdobně. ■

4.2.10. Příklad. Nechť $h(x) = x \cos x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in P(0, 1),$$

a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.9(c) tedy plyne $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.11. Poznámka. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) \neq 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je různá od nuly na $B(c, \delta)$. Toto tvrzení plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme nulovou funkci.

4.2.12. Poznámka. V kapitole o posloupnostech jsme ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.33 a 2.3.34). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uveďme formulaci věty pro limitu rovnou ∞.

4.2.13. Věta. Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x)$. Dále předpokládejme, že $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a rovná se ∞.

4.2.14. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Jelikož

$$\frac{x^2 + \sin x}{x} \geq \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty),$$

a

$$\lim_{x \to \infty} x - \frac{1}{x} = \infty,$$

platí též z Věty 4.2.13
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=\infty.$$
♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí tvrzení (c) z Věty 4.2.9.

4.2.15. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c,\eta)$. Potom $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = 0$.

Další věta dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.16. Věta (Heine)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že
$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$
K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon x_n \in B(c,\delta).$$
Potom máme také
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon x_n \in P(c,\delta),$$
a tedy
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon f(x_n) \in B(A,\varepsilon).$$
(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \exists x \in P(a,\delta)\colon \neg(f(x) \in B(A,\varepsilon)).$$
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c,\frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ■

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uveďme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

4.2.18. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c,\delta) \colon f(x) \in B(f(c),\varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c,\delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(f(c),\varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in B(a,\delta) \colon \neg(f(x) \in B(f(c),\varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$. Pak máme $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii). ∎

Větu 4.2.16 lze často použít k důkazu neexistence limity.

4.2.19. Příklad. Ukážeme, že neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^{[x]}$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]} = A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

Věta 4.2.2 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.20. Věta (limita složené funkce)**.** Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Předpokládejme dále, že je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \neq D$,
(S) funkce f je spojitá v bodě D.

Potom platí
$$\lim_{x\to c}(f\circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Předpokládejme, že je splněna podmínka (P). Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K tomuto ε existuje $\psi > 0$ takové, že
$$\forall y \in P(D,\psi)\colon\ f(y) \in B(A,\varepsilon),$$
neboť $\lim_{y\to D} f(y) = A$. K nalezenému ψ je možné najít $\delta' > 0$ takové, že
$$\forall x \in P(c,\delta')\colon\ g(x) \in B(D,\psi),$$
neboť $\lim_{x\to c} g(x) = D$. Položme $\delta = \min\{\delta',\eta\}$. Pro $x \in P(c,\delta)$ platí $g(x) \in B(D,\psi)\setminus\{D\}$, neboli $g(x) \in P(D,\psi)$. Odtud dostáváme $f(g(x)) \in B(A,\varepsilon)$. Tím je důkaz věty ve verzi s podmínkou (P) proveden.

Nyní předpokládejme, že je splněna podmínka (S). Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\psi > 0$ takové, že pro každé $y \in P(D,\psi)$ platí $f(y) \in B(A,\varepsilon)$. Protože je f spojitá v bodě D, máme $f(D) = A$. Proto pro každé $y \in B(D,\psi)$ platí $f(y) \in B(A,\varepsilon)$. K číslu ψ existuje nyní $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí $g(x) \in B(D,\psi)$. Dohromady tedy máme, že pro $x \in P(c,\delta)$ platí $f(g(x)) \in B(A,\varepsilon)$. Tím je důkaz proveden. ■

4.2.21. Příklad. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f = |\operatorname{sign}|$, $g = 0$, $c = 0$, $D = 0$ a $A = 1$, pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.22. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f\circ g$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty 4.2.20. ■

4.2.23. Příklad. Nechť funkce f je spojitá v bodě 0. Potom je $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$.

Řešení. Platí $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.10) a $\lim_{y\to 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.20 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Bez důkazu uveďme jednu z nich.

4.2.24. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $D \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c_-} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D_+} f(y) = A$. Dále nechť existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P_-(c,\eta)$ platí $g(x) > D$. Potom platí
$$\lim_{x\to c_-}(f\circ g)(x) = A.$$

4.2.25. Věta (limita monotónní funkce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f monotónní na intervalu (a,b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:

- Je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

- Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf f((a, b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro a $a \in \mathbb{R}$. Důkazy ostatních případů lze provést obdobně. Označme $m = \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima plyne, že existuje $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Z definice množiny $f((a, b))$ plyne, že $y = f(x')$ pro nějaké $x' \in (a, b)$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a, x') \colon f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a, b))$, je

$$\forall x \in (a, b) \colon m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Na intervalu (a, x') tedy platí:

$$\forall x \in (a, x') \colon m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (v našem případě to bylo $\delta = x' - a$) takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) \colon f(x) \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon),$$

tj. $\lim_{x \to a_+} f(x) = m$. ■

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Spojitost funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.2. Věta. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f \colon J \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá na J,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$ a $\lim x_n = c \in J$, platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J, potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.18) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J, pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvkem J, plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.3. Věta. Nechť I, J jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Nechť $f(I) \subset J$. Pak $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Použijme Větu 4.3.2. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v I konvergující k bodu $x \in I$. Dle Věty 4.3.2(ii) použité pro funkci f platí $\lim f(x_n) = f(x)$. Opětovným použití tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g, dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(x))$. Proto $\lim (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.2. ■

4.3.4. Věta (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b];\ f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná (neboť $a \in M$) a shora omezená (číslo b je horní závora M), je tedy $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Kdyby $f(\xi) > C$, pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ.

Kdyby $f(\xi) < C$, pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M \subset [a, \xi]$, což je opět spor. ■

4.3.5. Poznámka. Věta analogicky platí v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a, b)$, v nichž je $f(\xi) = C$. Bolzanova věta o nabývání mezihodnot ale tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.6. Věta (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** Nechť J je interval. Nechť funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Ověříme, že množina $f(J)$ splňuje předpoklad Lemmatu 1.5.23. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak existují $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.4 a za ní následující poznámky musí f v jistém bodě nabývat hodnoty z, takže $z \in f(J)$. Podle Lemmatu 1.5.23 je tedy množina $f(J)$ intervalem. ■

4.3.7. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

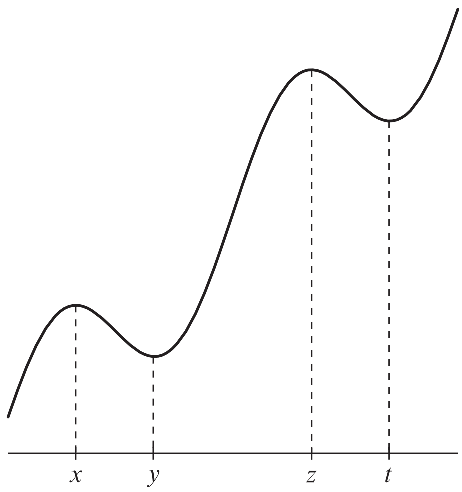
• Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M, jestliže platí
$$\forall y \in M\colon f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in M\colon f(y) \ge f(x)).$$
Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **minima**) funkce f na množině M.

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že
$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \ge f(x)).$$
Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že
$$\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) < f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) > f(x)).$$
Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Symbol $\max_M f$ (respektive $\min_M f$) označuje největší (respektive nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

• Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



Obrázek 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minimum.

4.3.8. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce (bez udání množiny), budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.9. Věta (existence extrémů)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty a své nejmenší hodnoty.

Důkaz. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.36 existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ taková, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.7 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^*. Podle Věty 2.2.44 leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Podle Věty 4.2.18 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 platí

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Nechť tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak platí $g(x) \leq g(x_*)$ kdykoliv $x \in [a, b]$. To znamená, že $f(x) \geq f(x_*)$ pro každé $x \in [a, b]$, a f nabývá svého minima na $[a, b]$ v bodě x_*. Tím je věta dokázána. ∎

4.3.10. Příklad. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nenabývá na intervalu $(0, 1)$ extrému. Stejně tak funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0, 1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nemá na $[0, 1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.9 vynechat.

4.3.11. Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ maxima v bodě x^* a minima v bodě x_*. Platí tedy $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ pro každé $x \in [a, b]$, takže množina $f([a, b])$ je omezená. ∎

4.3.12. Hledání extrémů funkce na nějaké množině patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.9 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že alespoň jeden bod maxima (respektive minima) existuje (za předpokladů věty). V dalším se naučíme, jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme (např. podle Věty 4.3.9), že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Na závěr tohoto oddílu se budeme zabývat vztahem spojitosti k inverznímu zobrazení. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.6). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(J) \to J$. Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **funkci inverzní**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.13. Věta (spojitost inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.6 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým koncovým bodem J, neboť f je rostoucí na J. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ a položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = f^{-1}([y_0, y_0 + \delta)) = [x_0, x_1) \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Analogicky bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým koncovým bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ■

4.3.14. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $\mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0, \infty)$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $[0, \infty)$.

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém $P(x, \delta)$. Definujeme pak **limes superior** a **limes inferior** funkce f v bodě x jako

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0} \sup f(P(x, \delta)),$$
$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0} \inf f(P(x, \delta)).$$

Obdobně definujeme limes superior a inferior v bodě x zleva či zprava. Platí následující tvrzení.

(a) Máme $\liminf_{y\to x} f(y) \le \limsup_{y\to x} f(y)$.

(b) Limita $\lim_{y\to x} f(y)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$. V tomto případě pak platí

$$\lim_{y\to x} f(y) = \limsup_{y\to x} f(y) \ (= \liminf_{y\to x} f(y)). \tag{4.11}$$

(c) Platí $\limsup_{y\to x}(-f(y)) = -\liminf_{y\to x} f(y)$.

Řešení. K důkazu tvrzení (a) si stačí uvědomit, že pro každá $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná platí

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovností (kde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$)

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Dokažme nyní druhé tvrzení. Předpokládejme existenci limity $A = \lim_{y\to x} f(y)$ a označme $a = \liminf_{y\to x} f(y)$, $b = \limsup_{y\to x} f(y)$. Je-li $a < b$, pak platí

$$\forall\delta > 0\colon\ \inf f(P(x,\delta)) \le a < b \le \sup f(P(x,\delta)). \tag{4.12}$$

Zvolme $a', b' \in \mathbb{R}$ splňující $a < a' < b' < b$ a dále pak $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pro které množina $B(A,\varepsilon)$ neprotíná alespoň jeden z intervalů $(-\infty, a')$ a (b', ∞). Z definice limity existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$. Pro toto δ však platnost (4.12) znamená neprázdnost množiny

$$f(P(x,\delta)) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) \subset B(A,\varepsilon) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) = \emptyset.$$

Tento spor tedy dává $a = b$.

V důkazu obrácené implikace označme

$$A = \limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

a uvažme nejprve případ $A = \infty$. Pak pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že $\inf f(P(x,\delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$ a $\lim_{y\to x} f(y) = \infty$.

Obdobně bychom dokázali $\lim_{y\to x} f(y) = -\infty$ v případě $A = -\infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(x,\delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostáváme

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$, což dává $\lim_{y\to x} f(y) = A$.

Důkaz této implikace též ověřil platnost rovnosti (4.11).

Přistupme k důkazu tvrzení (c). To však snadno plyne z následujících identit

$$\sup\{-x;\ x \in A\} = -\inf\{x;\ x \in A\}, \quad \inf\{-x;\ x \in A\} = -\sup\{x;\ x \in A\}$$

platných pro každou neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, protože pak dostáváme

$$\begin{aligned} \limsup_{y\to x} -f(y) &= \inf_{\delta>0} \sup(-f)(P(x,\delta)) = \inf_{\delta>0}(-\inf f(P(x,\delta))) \\ &= -\sup_{\delta>0} \inf f(P(x,\delta)) = -\liminf_{y\to x} f(P(x,\delta)). \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.2. Příklad. Je-li $x \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(x, \delta)$, platí

$$\liminf_{y \to x} (f(y) + g(y)) \geq \liminf_{y \to x} f(y) + \liminf_{y \to x} g(y),$$
$$\limsup_{y \to x} (f(y) + g(y)) \leq \limsup_{y \to x} f(y) + \limsup_{y \to x} g(y),$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost, důkaz první je obdobný. Označme

$$b_1 = \limsup_{y \to x} f(y) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{y \to x} g(y).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a nechť $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b_1', b_2' \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b_1'$, $b_2 < b_2'$ a $b_1' + b_2' < b'$. Z definice nyní existují $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná splňující

$$\sup f(P(x, \delta_1)) < b_1' \quad \text{a} \quad \sup g(P(x, \delta_2)) < b_2'.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.7.6 dostáváme

$$\begin{aligned} \sup(f + g)(P(x, \delta)) &\leq \sup f(P(x, \delta)) + \sup g(P(x, \delta)) \\ &\leq \sup f(P(x, \delta_1)) + \sup g(P(x, \delta_2)) \\ &< b_1' + b_2' < b'. \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{y \to x} (f + g)(y) = \inf_{\delta > 0} \sup(f + g)(P(x, \delta)) < b'.$$

Jelikož bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{y \to x} (f + g)(y) \leq b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.3. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom je množina

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je f neklesající. Má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.25. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{y \to x_-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \to x_+} f(y),$$

a tedy

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x_-} f(y) < \lim_{y \to x_+} f(y)\}.$$

Pro každé $x \in D$ označme $a_x = \lim_{y \to x_-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y \to x_+} f(y)$. Máme-li $x, y \in D$, $x < y$, pak

$$a_x < b_x \leq a_y < b_y.$$

Tedy je systém otevřených intervalů

$$\{(a_x, b_x);\ x \in D\}$$

disjunktní, a proto spočetný dle Příkladu 1.6.21. Tedy je i množina D spočetná. ♣

4.4.4. Příklad. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zjevně stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \colon f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$M_n = \{x \in M;\ \delta_x > \frac{1}{n}\}$$

a uvědomme si, že pro různé body x, y z M_n platí

$$(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}) = \emptyset. \tag{4.13}$$

Uvažujeme-li totiž bod z v eventuálním průniku, platí pak

$$|x - y| \le |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

což znamená, že

$$y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{a} \quad x \in (y - \delta_y, y + \delta_y).$$

Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je zřejmý spor. Tím je ověřena platnost (4.13).

Systém intervalů

$$\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n});\ x \in M_n\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.6.21.

Tedy i množina

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

je spočetná podle Věty 1.6.19(c). ♣

4.4.5. Příklad. Nechť f je reálná funkce. Jestliže f není spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, ale existuje její vlastní limita v x, potom říkáme, že f má v x **odstranitelnou nespojitost**. Neexistuje-li vlastní limita f v bodě x, pak říkáme, že bod x je bodem **neodstranitelné nespojitosti** funkce f. Body neodstranitelné nespojitosti klasifikujeme dále takto. Existují-li vlastní ale různé jednostranné limity v bodě x, pak říkáme, že x je bodem **nespojitosti prvního druhu**. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že x je bodem **nespojitosti druhého druhu**.

Dokažte, že platí:

(a) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f$ má v x odstranitelnou nespojitost$\}$ je spočetná.
(b) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f$ má v x neodstranitelnou nespojitost 1. druhu$\}$ je spočetná.

Řešení. (a) Stačí dokázat, že množiny

$$O = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x} f(y) < f(x)\} \quad \text{a} \quad P = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x} f(y) < f(x)\}$$

jsou spočetné. Provedeme důkaz pouze pro množinu O, protože pro množinu P je důkaz obdobný. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y\to x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak množina $O = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} O_r$, kde $O_r = \{x \in O;\ r_x = r\}$, je sjednocením spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina O_r je spočetná. Vezměme tedy pevné $r \in \mathbb{Q}$ a pro každé $x \in O_r$ zvolme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall y \in P(x, \delta_x)\colon\ f(y) < r.$$

Systém intervalů $\mathcal{J} = \{(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x);\ x \in O_r\}$ je disjunktní. Pokud totiž $x, y \in O_r, x \neq y$, a $(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) \neq \emptyset$ a $\delta_x \le \delta_y$, potom $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \le \delta_y$. Tedy $f(x) < r$ díky volbě δ_y a zároveň $f(x) > r_x = r$, což je spor. Systém $\mathcal{J}$ je tedy spočetný dle Příkladu 1.6.21, a proto je i množina O_r spočetná.

(b) Stačí dokázat, že množiny

$$N = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x-} f(y) < \lim_{y\to x+} f(y)\},$$
$$M = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x-} f(y) > \lim_{y\to x+} f(y)\}$$

jsou spočetné. Důkaz provedeme pouze pro množinu N. Důkaz pro M je obdobný. Pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující

$$\lim_{y\to x-} f(y) < r_x < \lim_{y\to x+} f(y)$$

a rozložíme N jako $N = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r$, kde $N_r = \{x \in N;\ r_x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Vezmeme nyní $r \in \mathbb{Q}$ pevné a pro každé $x \in N_r$ zvolme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall y \in P_-(x, \delta_x)\colon\ f(y) < r,$$
$$\forall y \in P_+(x, \delta_x)\colon\ f(y) > r.$$

Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r$, $x < y$, pak zjevně

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$

Tedy i

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$

Opět je tedy systém $\{(x-\delta_x, x+\delta_x);\ x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N_r je spočetná. Odtud plyne spočetnost N. ♣

4.4.6. Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak má funkce f v každém reálném čísle bod neodstranitelné nespojitosti 2. druhu.

Řešení. Máme-li $x \in \mathbb{R}$ dáno, v každém jeho levém či pravém okolí existuje racionální i iracionální číslo. Tedy dle definice funkce f limita zprava ani zleva v bodě x neexistuje. ♣

4.4.7. Příklad. Dokažte následující variantu Heineovy věty 4.2.17:

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Řešení. Implikace (i) $\implies$ (ii) platí dle Heineovy věty 4.2.17. Dokažme tedy obrácenou implikaci. Předpokládejme, že f je definována na nějakém okolí $P_-(c,\eta)$. Nechť $\lim_{x\to c-} f(x) \neq A$. Tedy platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P_-(c,\delta)\colon\ f(x) \notin B(A,\varepsilon). \tag{4.14}$$

Induktivně nyní zkonstruujme rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ konvergující k c takto: V prvním kroce položme $\delta_1 = \eta$. Dle (4.14) existuje $x_1 \in P_-(c,\delta_1)$ takové, že $f(x_1) \notin B(A,\varepsilon)$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ splňující $f(x_i) \notin B(A,\varepsilon)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $x_{n+1} \notin P_-(c,\delta_{n+1})$. Použitím (4.14) obdržíme $x_{n+1} \in P_-(c,\delta_{n+1})$ splňující $f(x_{n+1}) \notin B(A,\varepsilon)$. Zjevně pak platí $x_n < x_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsem tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ takovou, že $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k A, ale $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ (to platí díky tomu, že $x_n \in P_-(c, \frac{1}{n})$). Důkaz je tímto ukončen. ♣

4.4.8. Příklad. Ukažte, že nekonstantní periodická spojitá funkce má nejmenší kladnou periodu (tzv. *fundamentální periodu*). Najděte nekonstantní periodickou funkci bez fundamentální periody.

Řešení. Předpokládejme, že T_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou kladné periody funkce f konvergující k 0. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, stejně jako $\varepsilon \in (0,\infty)$. Ze spojitosti f v bodě x najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta)\colon\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Pak alespoň jedno číslo tvaru $kT_{n_0}, k \in \mathbb{Z}$, protíná interval $x - \delta, x + \delta)$. Tedy

$$|f(x) - f(0)| = \left|f(x) - f(kT_{n_0})\right| < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní.

Uvažujme nyní Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak je každé racionální číslo periodou funkce f, a tedy f nemá fundamentální periodu. ♣

4.4.9. Příklad. Sestrojte funkci $f : [0,1] \to [0,1]$ takovou, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset [0,1]$ platí $f(I) = [0,1]$.

Řešení. Každé číslo $x \in [0,1]$ si vyjádříme v desetinném rozvoji jako

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots.$$

(Pro číslo $x = 0.a_1\dots a_n00\dots$, kde $a_n \neq 0$, uvažujeme desetinný rozvoj tvaru $x = 0.a_1\dots(a_n - 1)99\dots$.)

Řekneme, že x splňuje podmínku periodicity pro $n \in \mathbb{N}$, pokud číslo $0.a_1a_3a_5\dots$ je racionální a jeho desetinný rozvoj se periodicky opakuje počínaje číslem a_{2n-1}. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ nesplňuje podmínku periodicity pro žádné} n \in \mathbb{N}, \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}, & \text{pokud } x \text{ splňuje podmínku periodicity pro } n. \end{cases}$$

Ukažme, že f má požadovanou vlastnost. Nechť tedy $I \subset [0,1]$ je nedegenerovaný interval. Vezmeme $n \in \mathbb{N}$ a cifry $a_1,\dots,a_{2n-2}$ takové, že $a_{2n-3} \notin \{0,1\}$ a

$$[0.a_1a_2\dots a_{2n-2}0, 0.a_1a_2\dots a_{2n-2}1] \subset I.$$

Nechť

$$y = 0.b_1b_2b_3\dots \in [0,1]$$

je dáno. Definujme číslo $x \in I$ pomocí dalších cifer v jeho rozvoji, konkrétně

$$a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots = a_{4n-5} = 0, \quad a_{4n-3} = 1$$

a nechť další liché cifry x jsou definovány opakováním této sekvence. Na sudé pozice od $2n$ počínaje položme cifry čísla y, tj.

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\dots.$$

Pak $x \in I$, splňuje podmínku periodicity pro n, a tedy

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3\dots.$$

♣

4.4.10. Příklad. Nalezněte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která není na žádném nedegenerovaném intervalu v $\mathbb{R}$ monotónní.

Řešení. Nechť $f_1(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a nechť dále f_1 je dodefinována na $\mathbb{R}$ periodicky s periodou 1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, položíme

$$f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak je f_n 4^{-n+1}-periodická spojitá funkce na $\mathbb{R}$, jejíž maximální hodnota je $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. Nechť

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Pak f je dobře definovaná, neboť pro každé x je suma v (4.15) absolutně konvergentní. Dále je f spojitá.

Mějme totiž $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dány. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{4^{m-1}} < \varepsilon$. Dále nechť $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ je takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}\ \forall y \in B(x, \delta)\colon\ |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |f_i(x)| + |f_i(y)| \\ &\le m\frac{\varepsilon}{m} + 2 \cdot 4^{-m+1} \\ &\le 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Nyní ukážeme, že není na žádném nedegenerovaném intervalu monotónní. K tomuto účelu odvodíme následující fakt:

Je-li $a = k4^{-m}$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ a $h_m = 4^{-2m-1}$, pak

$$f(a + h_m) - f(a) > 0 \quad a \quad f(a - h_m) - f(a) > 0.$$

Máme-li totiž a a h_m jako výše, pak $f_n(a) = 0$ pro $n > m$. Dále platí

$$\forall n > 2m + 1\colon\ f_n(a + h_m) = 0, \quad \forall n \in \{m + 1, \dots, 2m + 1\}\colon\ f_n(a + h_m) = h_m.$$

Nakonec si povšimneme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a, h \in \mathbb{R}\colon |f_n(a + h) - f_n(a)| \le |h|.$$

Dohromady proto máme

$$\begin{aligned} f(a + h_m) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} (f_i(a + h_m) - f_i(a)) + \sum_{i=m+1}^{2m+1} f_i(a + h_m) \\ &\ge -mh_m + (m + 1)h_m \\ &= h_m > 0 \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že

$$f(a - h_m) - f(a) \ge h_m > 0.$$

Mějme nyní libovolný nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože čísla tvaru $\{k4^{-m};\ k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ protínají každý otevřený interval, lze vybrat $k \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro a a h_m jako výše máme $a, a+h_m, a-h_m \in I$. Z přecházejících výpočtů pak máme

$$f(a-h_m) > f(a), \quad f(a+h_m) > f(a).$$

Funkce f proto není monotónní na I. ♣

4.4.11. Příklad. Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Najděte neklesající funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D.

Řešení. Očíslujeme množinu D jako $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Zjevně je f dobře definovaná (pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ absolutně konvergentní) a neklesající (neboť všechny funkce f_n jsou neklesající). Ukažme, že f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Pro takovéto x a dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in B(x, \delta)$ a $n \in \{1, \dots, n_0\}$ platí

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

(všechny funkce f_n jsou spojité v x). Pak pro $y \in B(x, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2 \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Na druhou stranu, nechť $m \in \mathbb{N}$ je pevné. Ukážeme, že f není spojitá v x_m. Všimneme si, že funkce $\sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n$ je též neklesající, a tedy má jednostranné limity ve všech bodech $\mathbb{R}$. Proto platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(x_m)-} f(x) &= \lim_{x\to(x_m)-} \frac{1}{2^m} f_m(x) + \lim_{x\to(x_m)-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x)\\ &= 0 + \lim_{x\to(x_m)-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x)\\ &\leq \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x_m)\\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x_m)\\ &= f(x_m).\end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m. ♣

4.4.12. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě a. Ukažte, že funkce

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{a}$$
$$\min\{f, g\} = \min\{f(x), g(x)\},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, jsou též spojité v a.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$, je $|f|$ spojitá v a podle Příkladů 4.2.6 a **??**.

Dále platí

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \quad \text{a}\\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},\end{aligned}$$

z čehož použitím první části důkazu plnou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.13. Příklad. Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce splňující $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$.
(ii) Platí $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

Řešení. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) a Věty 4.2.2 pak dostáváme

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = A.$$

Nechť nyní $A = 0$. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že pro $y \in P(0, \delta)$ platí $\left|\frac{\sin y}{y}\right| < 2$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je takové, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $|f(x)| < \delta$ a $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ máme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Protože pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Ukázali jsem tedy i v tomto případě, že $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

(ii) $\implies$ (i) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$ a $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. (V opačném případě by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim x_n = a$, $f(x_n) = 0$ a $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z Věty 4.2.16 pak plyne

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{\sin f(x_n)}{x_n} = A,$$

což by byl spor.) Můžeme tedy použít Větu 4.2.20 k odvození rovnosti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)}\right) = A.$$

Je-li $A = 0$, pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ splňující $\left|\frac{y}{\sin y}\right| < 2$ pro $y \in P(0, \delta)$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je zvoleno tak, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < \varepsilon$ a $|f(x)| < \delta$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ platí, že $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\sin f(x) = 0$. Máme tedy

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases} \qquad x \in P(a, \eta).$$

Jelikož pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

4.4.14. Příklad. Nechť φ je rostoucí spojitá funkce na $[1, \infty)$ splňující $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ a f je nekonstatní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(\varphi(x))$ neexistuje.

Řešení. Díky předpokladu je $\varphi\colon [1, \infty) \to [\varphi(1), \infty)$ bijekce. Nechť $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou body splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$ a nechť $p > 0$ je perioda f. Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_1 + kp, x_2 + kp \in [\varphi(1), \infty)$. Pak body $x_n = \varphi^{-1}(x_1 + (k+n)p)$ a $y_n = \varphi^{-1}(x_2 +$

$(k+n)p)$, $n \in \mathbb{N}$, ukazují na neexistenci limity $f \circ \varphi$ v nekonečnu, neboť $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, ale přitom

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(x_n) = f(x_1), \quad \lim_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(y_n) = f(x_2).$$

♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1. Příklad. Nechť

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Spočítejte limity

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 1} f(x).$$

Řešení. Z Příkladu 4.2.6 víme, že funkce $x^2 + 2x - 3$ i $x^2 - 1$ jsou spojité, a proto

$$\lim_{x\to 0} x^2 + 2x - 3 = -3, \quad \lim_{x\to 0} x^2 - 1 = -1.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x\to 0}(x^2 - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Při výpočtu druhé limity takto postupovat nemůžeme, neboť

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 2x - 3 = 0, \quad \lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0.$$

Jelikož výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.2. Označme však

$$g(x) = \frac{x+3}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Pak

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Speciálně tedy platí, že

$$f(x) = g(x), \quad x \in P(1, 2).$$

Proto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x),$$

pokud jedna strana existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí metody popsané v první část výpočtu. Tedy

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

♣

4.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Řešení. Vezměme nejprve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pevné a vyjádřeme funkci $x^n - 2x + 1$ jako

$$\begin{aligned} x^n - 2x + 1 &= (x^n - x) - (x - 1) = x(x^{n-1} - 1) - (x - 1) \\ &= x(x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)\big(x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - 1\big). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.1 výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)\big(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\big)}{(x - 1)\,(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\big(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\big)}{(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1)} \\ &= \frac{99 - 1}{49 - 1} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$$

Řešení. Zajímá nás chování polynomů v zadané limitě pro x jdoucí do nekonečna. V čitateli i jmenovateli máme polynom 50 stupně, u něhož je v nekonečnu převládající člen x^{50}. Rozšíříme tedy zlomek v limitě výrazem $\frac{1}{x^{50}}$ a dostaneme

$$\frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20}(3 + \frac{2}{x})^{30}}{(2 + \frac{1}{x})^{50}}.$$

Podle Příkladu 4.1.10 platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Tedy z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 máme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} 2 - \frac{3}{x} &= 2, \\ \lim_{x\to\infty} 3 + \frac{2}{x} &= 3, \\ \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x} &= 2. \end{aligned}$$

Dále je funkce $y \mapsto y^n$, $y \in \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (viz Příklad 4.2.6), a tedy máme opět z Věty 4.2.2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20}(3 + \frac{2}{x})^{30}}{(2 + \frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}.$$

♣

4.5.4. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}.$$

Řešení. Vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} &= \frac{(x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1)}{x-1} \\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \cdots + \frac{x^n-1}{x-1}.\end{aligned}$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^j - 1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1) = j.\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 tady máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.8.5 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme jako

$$\begin{aligned}(1+mx)^n - (1+nx)^m &= \left(1 + \binom{n}{1}(mx) + \binom{n}{2}(mx)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(mx)^n\right) \\ &\quad - \left(1 + \binom{m}{1}(nx) + \binom{m}{2}(nx)^2 + \cdots + \binom{m}{m}(nx)^m\right).\end{aligned}$$

Protože

$$\binom{n}{1} m = nm = mn = \binom{m}{1} n,$$

máme

$$\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \left(\binom{n}{2} m^2 - \binom{m}{2} n^2\right) + P(x),$$

kde $P(x)$ je polynom bez absolutního členu. Z Věty 4.2.2 a Příkladu 4.2.6 tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\left(\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2\right)+P(x)\right)\\ &= \binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2+P(0)\\ &= \binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2.\end{aligned}$$

♣

4.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right),$$

kde $m,n\in\mathbb{N}$.

Řešení. Racionální funkci v zadané limitě upravíme na

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} &= \frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x)^2(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\ &= \frac{m(1+\cdots+x^{n-1})-n(1+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\ &= \frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}&m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)\\ &= m\sum_{j=1}^{n-1}(x^j-1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^j-1)\\ &= (x-1)\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Z (4.17) tedy máme

$$\begin{aligned}&\frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{1-x}\\ &= -\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pomocí (4.18) dostáváme z (4.16) díky Větě 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right) &= \lim_{x\to 1} -\frac{m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\dots+1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\dots+1)}{(1+\dots+x^{m-1})(1+\dots+x^{n-1})}\\
&= -\frac{m\sum_{j=1}^{n-1} j - n\sum_{j=1}^{m-1} j}{mn}\\
&= -\frac{\frac{1}{2}m(n-1)n-\frac{1}{2}n(m-1)m}{mn}\\
&= \frac{1}{2}(m-n).
\end{aligned}$$

♣

4.5.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\,\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{(x+13)-4(x+1)}{x^2-9}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}$$

Funkce

$$g(x)=\frac{-3}{x+3}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}},\qquad x\in(2,\infty),$$

je spojitá na intervalu $I=(2,\infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x\mapsto x+13$, $x\mapsto x+1$ jsou spojité na I dle Příkladu 4.2.6. Vzhledem k Příkladu **??** a Větě 4.3.3 jsou i funkce $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ spojité na I. Dále jsou funkce $x\mapsto x+3$, $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ nenulové na I, a tedy je g, jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.5.

Proto máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{x+3}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{-3}{6}\,\frac{1}{\sqrt{16}+2\sqrt{4}}\\
&= \frac{-1}{16}.
\end{aligned}$$

♣

4.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} \\
&= \frac{1+x-(1-x)}{1+x-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}.
\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 a Příkladu **??** máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

♣

4.5.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2},$$

Řešení. Upravme nejprve výraz v čitateli zadané funkce. Použijeme vzorec pro $a^6 - b^6$, kde $a = \sqrt{x+2}$ a $b = \sqrt[3]{x+20}$. Označíme-li

$$g(x) = a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5,$$

pak

$$\lim_{x\to 7} g(x) = 6 \cdot 3^5 \tag{4.19}$$

a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20} &= \frac{(\sqrt{x+2})^6 - (\sqrt[3]{x+20})^6}{g(x)} \\
&= \frac{(x+2)^3-(x+20)^2}{g(x)} \\
&= \frac{x^3+5x^2-28x-392}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Polynom $x^3 + 5x^2 - 28x - 392$ má číslo 7 za kořen, a tedy ho lze vyjádřit ve tvaru $(x-7)P(x)$, kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Standardním algoritmem Příkladu **??** dostaneme

$$x^3 + 5x^2 - 28x - 392 = (x-7)(x^2+12x+56). \tag{4.20}$$

Jmenovatele $\sqrt[4]{x+9}-2$ upravíme pomocí vzorce a^4-b^4 na

$$\sqrt[4]{x+9}-2=\frac{(x+9)-2^4}{h(x)}=\frac{x-7}{h(x)},$$

kde $a=\sqrt[4]{x+9}$, $b=2$ a

$$h(x)=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Pak

$$\lim_{x\to 7} h(x)=4\cdot 2^3. \tag{4.21}$$

Kombinací (4.19), (4.20) a (4.21) dostaneme pomocí Věty 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}&=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{x-7}\\&=\frac{(7^2+12\cdot 7+56)(4\cdot 2^3)}{6\cdot 3^5}\\&=\frac{189\cdot 4\cdot 2^3}{6\cdot 3^5}.\end{aligned}$$

♣

4.5.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Řešení. Označme $a=\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}$ a $b=\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}$. Pak

$$\begin{aligned}a-b&=\frac{a^{12}-b^{12}}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}=\frac{(1+\frac{x}{3})^4-(1+\frac{x}{4})^3}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\\&=\frac{1}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{x}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k\right)\\&=\frac{1}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right),\end{aligned}$$

kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Dále

$$1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\frac{1-(1-\frac{x}{2})}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Tedy

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{11}(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}})^{11-j}(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}})^{j}} \cdot \left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right)\cdot\frac{2\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{x}.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 a spojitosti odmocniny (Příklad **??**) dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{2\cdot 2\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)}{12} = \frac{1}{3}.$$

♣

4.5.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Řešení. Odhadneme, že převládající výraz čitatele i jmenovatele zadané funkce je $\sqrt{x}$. Proto provedeme úpravu

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}.$$

Nyní již snadno odvodíme pomocí Věty 4.2.2 a Příkladu **??**, že

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1.$$

♣

4.5.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Postupně upravíme výraz $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ na

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x} &= \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\\ &= \frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}\\ &= \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

♣

4.5.13. Příklad. Nechť reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}-ax-b=0.$$

Najděte a a b.

Řešení. Všimněme si, že $\lim_{x\to-\infty} x^2-x+1=\infty$, tedy je funkce $\sqrt{x^2-x+1}$ dobře definovaná na nějakém okolí $P_+(-\infty,\delta)$. Uvažujme v dalším tuto funkci na $P_+(-\infty,\delta)$. Dle předpokladu máme

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}+a+\frac{b}{x}\right)=a.$$

Jelikož $x=-\sqrt{x^2}$ pro x záporné, dostáváme

$$\begin{aligned}a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1.\end{aligned}$$

Dále platí z předpokladu

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)+b=b,$$

tedy

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-1-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}.$$

Řešení. Protože $[x] \le x < [x]+1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme odhady

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \le \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]} \le \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1} \tag{4.22}$$

platné pro každé reálné číslo $x > 1$. Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1}.$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3} = \frac{1}{2} \tag{4.23}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \tag{4.24}$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}, \quad x \in (1,\infty),$$

dostáváme z (4.22) nerovnosti

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \quad x \in (1,\infty).$$

Díky Větě 4.2.9(c) tak z (4.23) a (4.24) plyne

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

neexistuje.

Řešení. Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je rovno $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ konvergující k ∞, a proto z Heineovy věty 4.2.17 plyne

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ neexistuje. ♣

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
3. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173–188.
4. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
5. B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 2005.
6. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
7. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623–630.
8. P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer 1978.
9. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
10. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
11. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
12. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
13. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
14. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
15. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65–69.
16. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
17. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
18. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.
19. L. Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*, Matfyzpress, 2007.