DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

1. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$.

2. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[1, 1/2]$,
c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.

4. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností $\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A$?

5. Nalezněte všechna maximální řešení rovnic:

- $y' = y^2$,
- $y' = |y|$,
- $y' = \sqrt{1 - y^2}$,
- $(y')^2 = y^2$,
- $xy' = 1 + y^2$.

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

6. $y' - \frac{1}{x+1}y = -\frac{1}{100}$

7. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$

8. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \frac{1}{\cos x}$

9. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

10. $y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$

11. $y' + xy = x$

12. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin x$

13. $y' - y = xe^x$

14. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$

15. $y' - y = \sin x$

16. $y' = y + xe^x \sin 2x$

17. $y' + \frac{x+1}{x}y = 1$

18. $(x - 1)y' = x^2 - y$

19. $y' + 2y = \cos x$

20. $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \sin x$

21. $xy' - y = x^2$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

22. $y'' + 4y' + 4y = 0$

23. $y'' - 3y' + 2y = 0$

24. $y'' - 6y' + 13y = 0$

25. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

26. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

27. $y'' + y = 4x \cos x$

28. $7y'' - y' = 14x$

29. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$

30. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$ **31.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x+1}$

VÝSLEDKY

1.

$$y(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_1)\right)^5} & x \in (-\infty, c_1) \\ 0 & x \in [c_1, c_2] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_2)\right)^5} & x \in (c_2, \infty) \end{cases}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, c_1 < c_2;$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5}, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

2. a) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalech $(0, 1/c)$, $(1/c, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$, na intervalech $(-\infty, 1/c)$, $(1/c, 0)$, $(0, \infty)$ pro $c < 0$; $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c = 0$; $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

b) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalu $(0, \infty)$

c) $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$; $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$ a $(0, \infty)$ pro $c < 0$.

3. a) $y(x) = \operatorname{tg}(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c)$ na intervalech

$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c| < \pi/2$,

$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$,

$\left(\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$.

b) $y(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $\left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}\right)$.

6. $y(x) = -\frac{1}{100}(x+1)\log|x+1| + a(x+1)$, $x \in (-\infty, -1)$ nebo $x \in (-1, \infty)$ **7.** $y(x) = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ **8.** $y(x) = \sin x + a\cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **9.** $y(x) = x^2e^{-x} + ae^{-x}\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}$ **10.** $y(x) = 1 + 2x\log|2x+1| + \log|2x+1| + a(2x+1)$, $x \in (-\infty, -1/2)$ nebo $x \in (-1/2, \infty)$ **11.** $y(x) = 1 + ae^{-x^2/2}$, $x \in \mathbf{R}$ **12.** $y(x) = -x\cos(x) + ax$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ **13.** $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + ae^x$, $x \in \mathbf{R}$ **14.** $y(x) = e^{\operatorname{tg} x} + ae^{-\operatorname{tg} x}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **15.** $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + ae^x$, $x \in \mathbf{R}$ **16.** $y(x) = -e^x x\cos^2 x + \frac{1}{2}e^x\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}xe^x + ae^x$, $x \in \mathbf{R}$ **17.** $y(x) = \frac{x-1}{x} + a\frac{1}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ **18.** $y(x) = \frac{1}{3}\frac{x^3}{x-1} + a\frac{1}{x-1}$, $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, \infty)$ **19.** $y(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + ae^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **20.** $y(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + a\operatorname{tg} x$, $x \in (0, \pi/2) + k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ **21.** $y(x) = x^2 + ax$, $x \in \mathbf{R}$ **22.** $y(x) = ae^{-2x} + bxe^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **23.** $y(x) = ae^x + be^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **24.** $y(x) = ae^{3x}\sin 2x + be^{3x}\cos 2x$, $x \in \mathbf{R}$ **25.** $y(x) = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2e^{-3x} + a + be^{-3x}$, $x \in \mathbf{R}$ **26.** $y(x) = -e^x\operatorname{arctg}(e^{-x}) + e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x) + ae^x + be^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$ **27.** $y(x) = x^2\sin x + x\cos x + a\sin x + b\cos x$, $x \in \mathbf{R}$ **28.** $y(x) = -7x^2 - 98x + a + be^{x/7}$, $x \in \mathbf{R}$ **29.** $y(x) = -\frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x + ae^x\sin x + be^x\cos x$, $x \in \mathbf{R}$ **30.** $y(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{2x} + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$ **31.** $y(x) = -\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)e^x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^x\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}xe^x\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + ae^x + bxe^x$, $x \in \mathbf{R}$