Matematická analýza 2

LS 2019-20

Miroslav Zelený

6. Taylorův polynom (dokončení)
7. Číselné řady
8. Primitivní funkce
9. Určitý integrál
10. Obyčejné diferenciální rovnice

6. Taylorův polynom (dokončení)

6.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

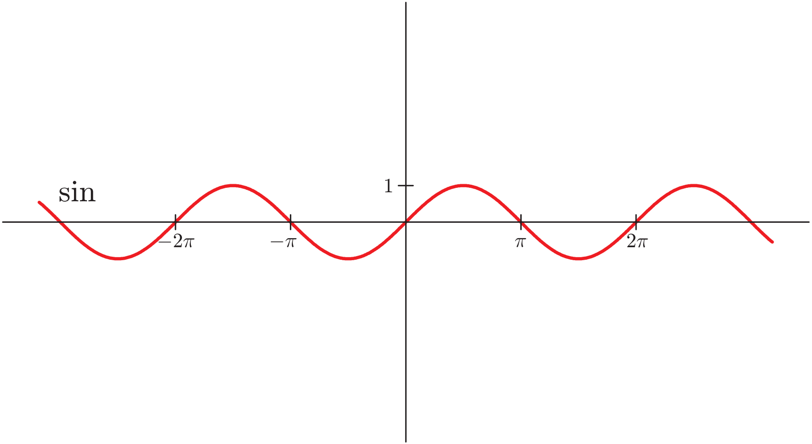
Lemma 6.1

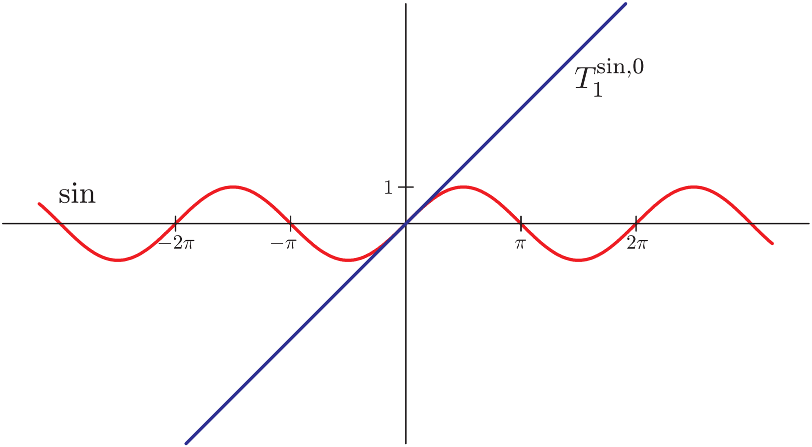
Nechť Q je polynom, st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak Q je nulový polynom.*

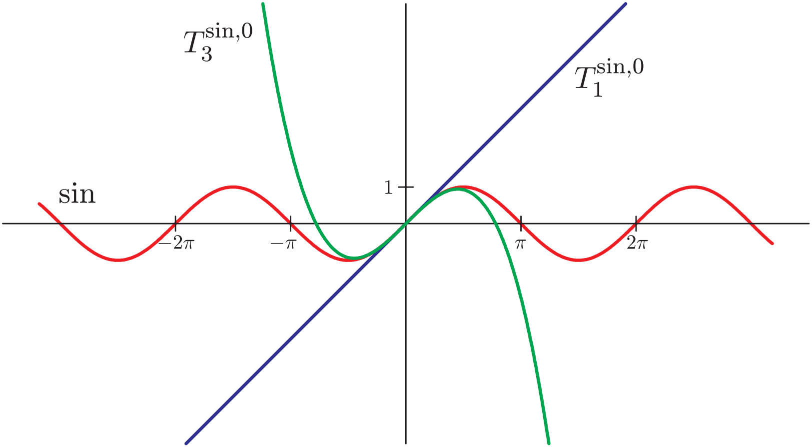
Věta 6.2 (Peanův tvar zbytku)

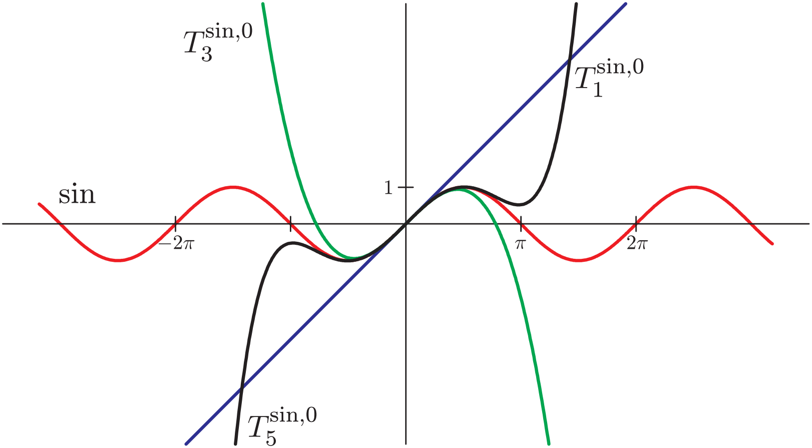
Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ *a* P *je polynom stupně nejvýše* n*. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

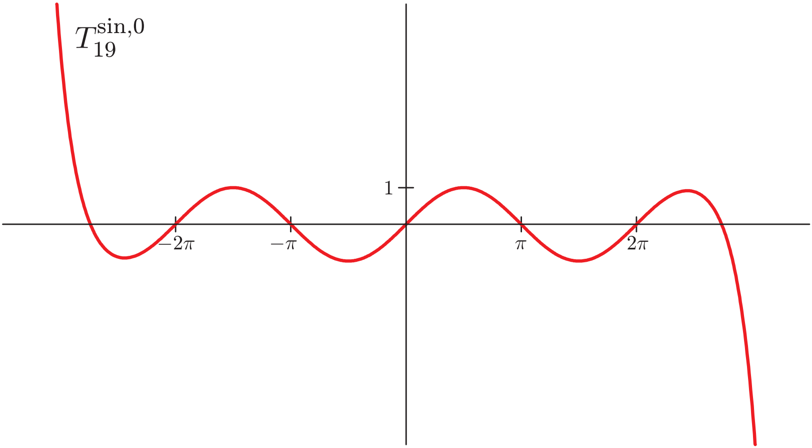

sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π


$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π


$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π



$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
π
2π
$T_5^{\sin,0}$


$T_{19}^{\sin,0}$
1
-2π
$-\pi$
π
2π

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$*, která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$*, která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f *jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje* $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f *jsou jako ve Větě* 6.3. *Pak existuje* $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku)

Nechť a, x, f *jsou jako ve Větě* 6.3. *Pak existuje* $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

6.2 Symbol malé o

Definice

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^{\star}$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Edmund Landau (1877–1938)

Věta 6.6

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \quad a \quad f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \ \ a\ \ f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)),\ x \to a.$$

(iii) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Věta 6.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že*

$$\forall x \in P(a,\delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$, $x \to a$.

7. Číselné řady

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m***-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m***-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat *n***-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

7. Číselné řady

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Věta 7.2

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

(ii) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje.*

(iii) *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$$
$$\forall m \in \mathbf{N}, m > n \colon \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

Věta 7.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$*. Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 7.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta 7.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť* $c \in (0,\infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) *Nechť* $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 7.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

(v) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 7.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 7.7 (kondenzační kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*.*

Věta 7.7 (kondenzační kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*.*

Věta 7.8

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$*. Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$*.*

Věta 7.9 (Leibniz)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní posloupnost, která konverguje k* 0*. Pak řada řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

7.4 Absolutní konvergence

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Věta 7.10

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Definice

Nechť $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. **Přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

Definice

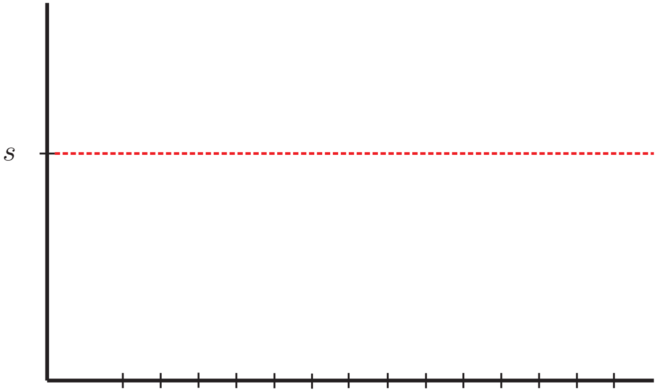
Nechť $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. **Přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

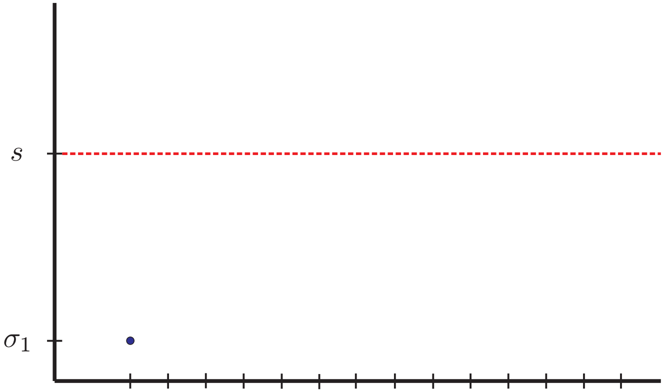
Věta 7.11

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

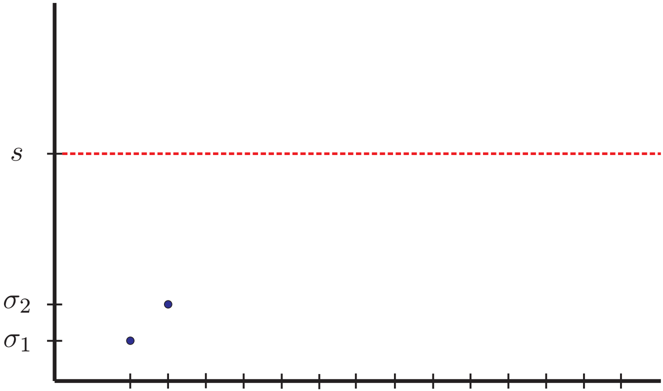
Věta 7.12 (Riemann)

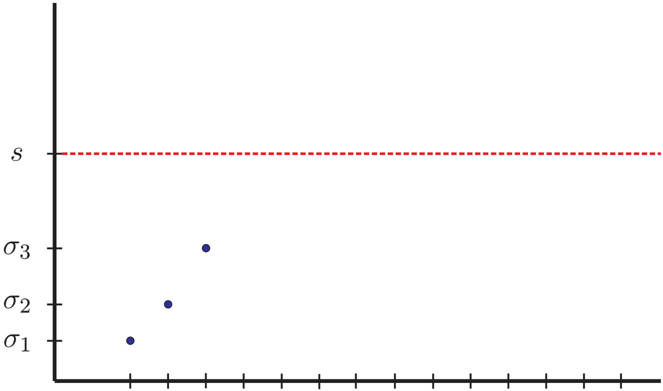
Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je neabsolutně konvergentní. Pak pro libovolné* $s \in \mathbf{R}^\star$ *existuje bijekce* $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *taková, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.

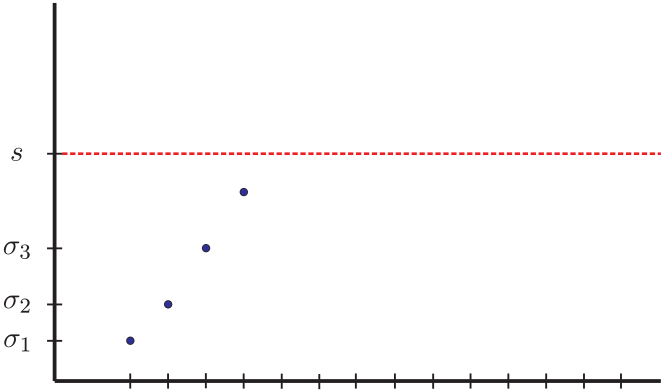

s

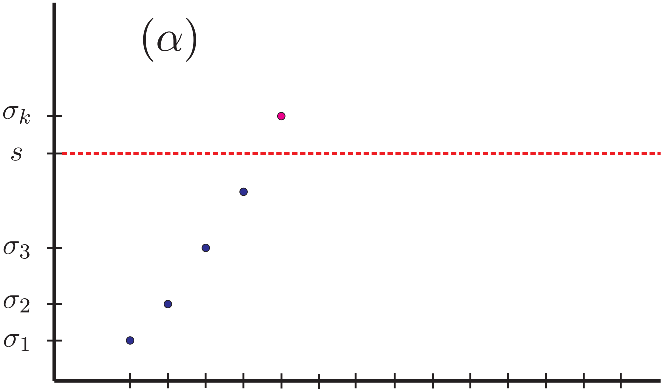


s
σ_1

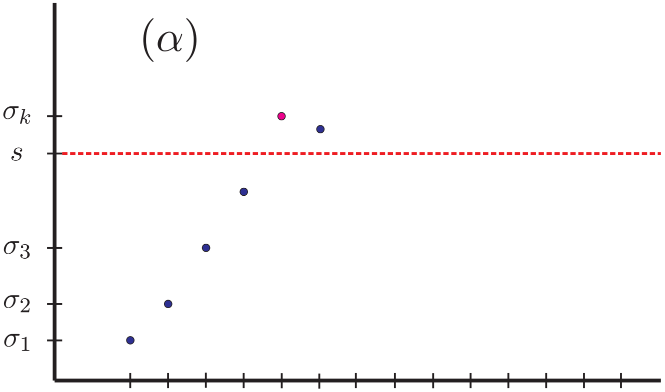

s
σ_2
σ_1

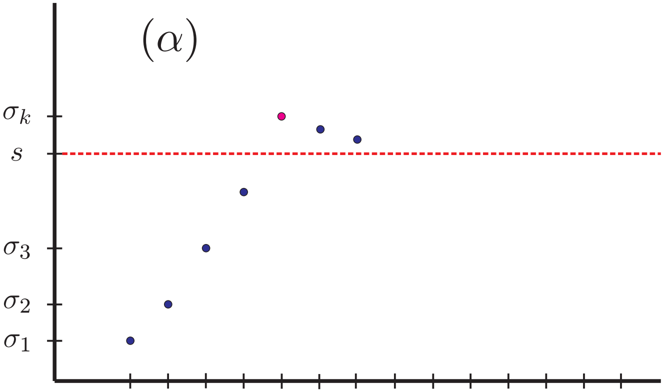

s
σ_3
σ_2
σ_1


s
σ_3
σ_2
σ_1

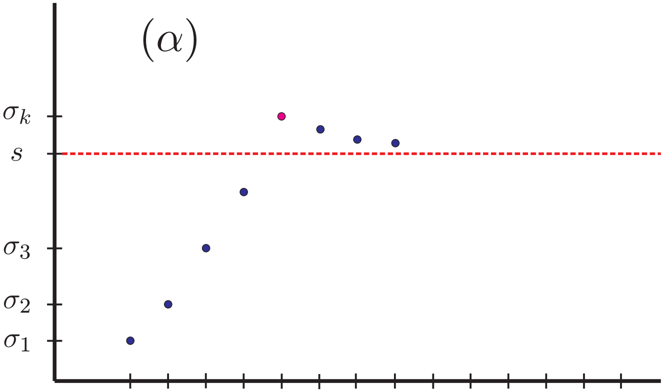


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1

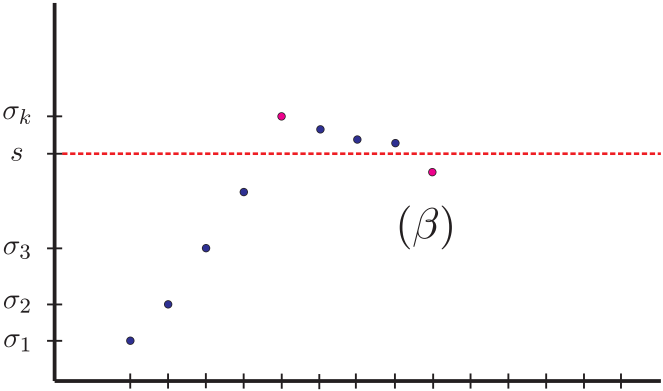

(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1

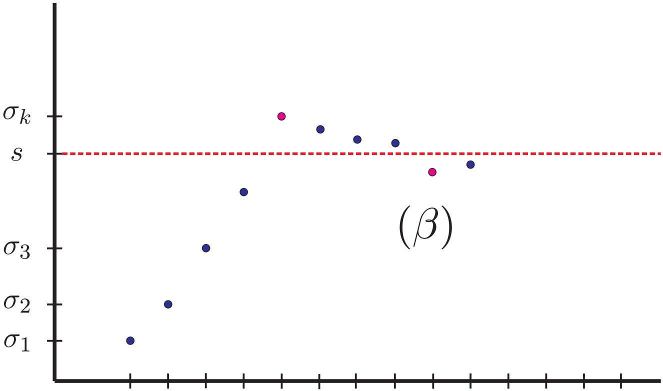


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1

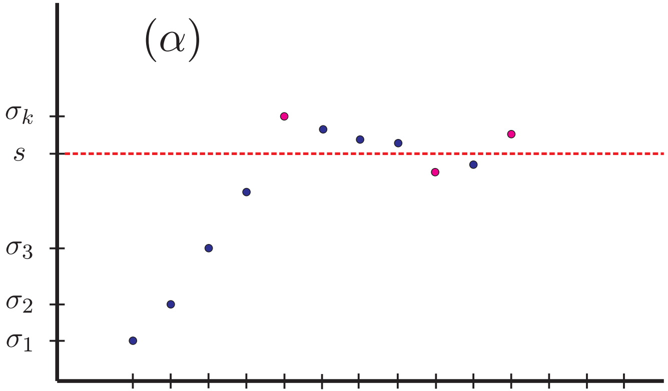


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1

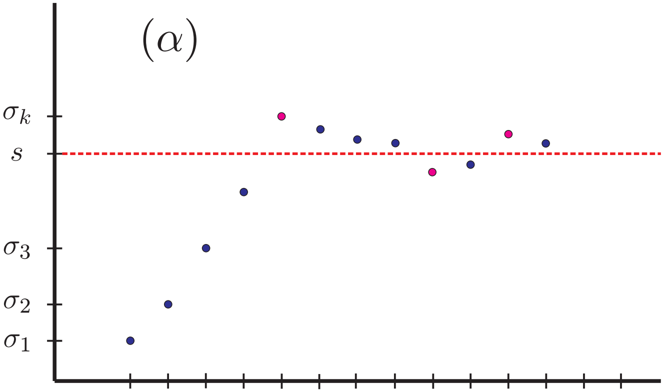

σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1
(β)



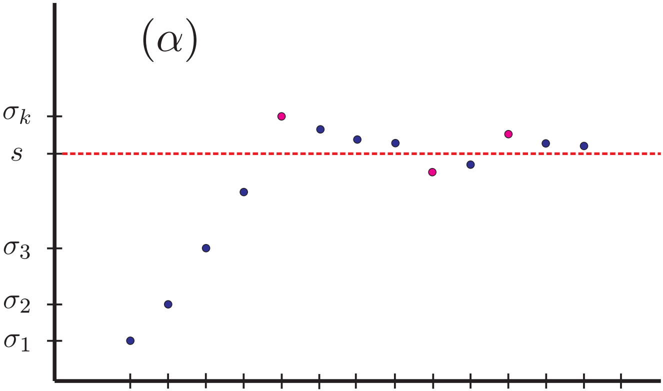
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1
(β)

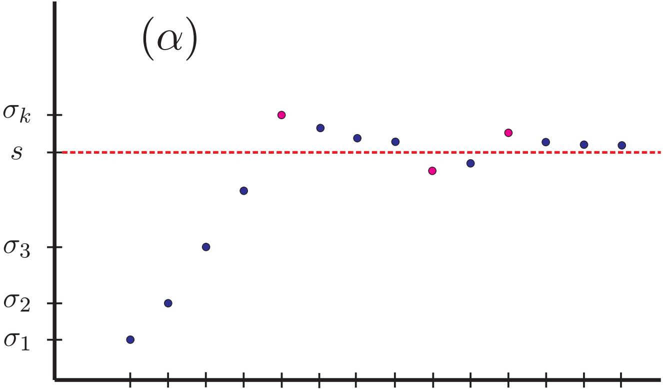


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1

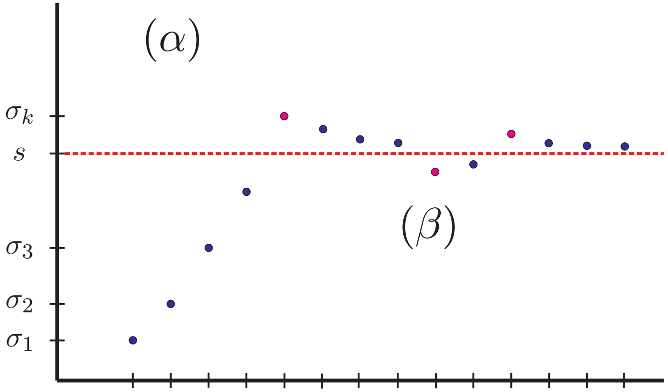


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1


(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1



(α)
σ_k
s
σ_3
σ_2
σ_1



(α)
σ_k
s
(β)
σ_3
σ_2
σ_1

7.4 Součin řad

$$a_1 b_1$$

7.4 Součin řad

$$a_1 b_1 \quad a_1 b_2$$

7.4 Součin řad

$$a_1 b_1 \quad a_1 b_2 \quad a_1 b_3$$

7.4 Součin řad

$$a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4$$

7.4 Součin řad

$$a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4 \qquad \cdot$$

7.4 Součin řad

$$a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4 \quad \cdot \quad \cdot$$

7.4 Součin řad

$$a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_2b_1 & & & & & &
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2b_1 & a_2b_2 & & & & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & & & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & & & & & &
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_3b_1 & a_3b_2 & & & & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & & & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & & &
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & & \end{array}$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet &
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \color{red}{a_2b_4} & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & \color{red}{a_3b_3} & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & \color{red}{a_4b_2} & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

7.4 Součin řad

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \bullet & \bullet & \color{red}{\bullet} \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \bullet & \color{red}{\bullet} & \bullet \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & \color{red}{a_4b_4} & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

Definice

Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\Big).$$

Definice

Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\Big).$$

Věta 7.13 (Mertens)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\Big).$$

Věta 7.14 (Abel)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ *jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\Big).$$

7.5 Posloupnosti a řady s komplexními členy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z \in \mathbf{C}$. Řekneme, že posloupnost komplexních čísel **konverguje** k $z \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - z| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim a_n = z$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m*-**tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m***-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat *n***-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbf{C}$).

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbf{C}$). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbf{C}$). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet komplexní číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

Věta 7.15

Je-li řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.

Definice

Komplexní exponenciální funkcí rozumíme funkci $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definovanou předpisem

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbf{C}.$$

8. Primitivni funkce

8.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k** f **na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

8.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I**, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1

Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Důkaz.

Definujme funkci $H\colon I \to \mathbf{R}$ předpisem

$$H(x) = F(x) - G(x), x \in I.$$

Důkaz.

Definujme funkci $H\colon I \to \mathbf{R}$ předpisem

$$H(x) = F(x) - G(x), x \in I.$$

Potom

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro každé $x \in I$.

Důkaz.

Definujme funkci $H\colon I \to \mathbf{R}$ předpisem

$$H(x) = F(x) - G(x), x \in I.$$

Potom

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro každé $x \in I$.
Podle Věty 5.9 je tedy H konstantní na I. $\square$

Označení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Označení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

Označení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak **integrálu** $\int$,

Označení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak **integrálu** $\int$, **integrand** $f(x)$

Označení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak **integrálu** $\int$, **integrand** $f(x)$ a symbol $\mathrm{d}x$ označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Tabulkové integrály

$$\int x^n \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0;\ x \in (-\infty, 0)$$

nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n < -1$

Tabulkové integrály

$$\int x^n \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \ x \in \mathbf{R} \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0;\ x \in (-\infty, 0)$$

nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n < -1$

$$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \ x \in (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

Tabulkové integrály

$$\int x^n \, dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0;\ x \in (-\infty, 0)$$

nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n < -1$

$$\int x^\alpha \, dx \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \overset{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty)$$

Tabulkové integrály

$$\int x^n \, dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \;\; x \in \mathbf{R} \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z},\, n \geq 0;\, x \in (-\infty, 0)$$

nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n < -1$

$$\int x^\alpha \, dx \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \;\; x \in (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \overset{c}{=} \log|x|, \;\; x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty)$$

$$\int e^x \, dx \overset{c}{=} e^x, \;\; x \in \mathbf{R}$$

Tabulkové integrály

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Tabulkové integrály

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Tabulkové integrály

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), \, k \in \mathbf{Z}$$

Tabulkové integrály

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), \, k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), \, k \in \mathbf{Z}$$

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1, 1)$$

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arccos x, \quad x \in (-1,1)$$

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arccos x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arccos x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arccotg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Důkaz uvedeme později.

Věta 8.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Věta 8.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Důkaz.

Podle věty o aritmetice derivací platí

$$\big(\alpha F(x) + \beta G(x)\big)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. $\square$

Věta 8.4 (integrace per partes)

Nechť I je otevřený interval a f je spojitá na I, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx, \quad x \in I.$$

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I,

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I.

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I.

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo,

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$,

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf.

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z věty o aritmetice derivací máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z věty o aritmetice derivací máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \overset{c}{=} GF - H.$$

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z věty o aritmetice derivací máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Obě množiny tedy obsahují funkci $GF - H$,

Důkaz.

Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z věty o aritmetice derivací máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \overset{c}{=} GF - H.$$

Obě množiny tedy obsahují funkci $GF - H$, a proto se rovnají. $\square$

Věta 8.5 (Darboux)

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom f zobrazuje každý interval $J \subset I$ opět na interval.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.

Nechť F je primitivní k funkci f na I.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.
Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.
Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$.
Předpokládejme, že $x_1 < x_2$.

Důkaz.

Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 3.10.
Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.
Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$.
Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Protože funkce H nabývá na intervalu $[x_1, x_2]$ minima (Věta 3.13), můžeme ho označit jako x_0.

Pokračování důkazu.

Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta)\colon\ H(x) < H(x_1).$$

Pokračování důkazu.

Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta)\colon \; H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$.

Pokračování důkazu.

Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta)\colon\ H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$.Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Pokračování důkazu.

Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta)\colon\ H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$.Obdobně odvodíme z faktu
$H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.
Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$,

Pokračování důkazu.

Jelikož
$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$
existuje $\delta > 0$ takové, že
$$\forall x \in P^+(x_1, \delta)\colon\ H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$.Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.
Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a proto platí $H'(x_0) = 0$ (Věta 5.5). Odtud $f(x_0) = z$. $\square$

Věta 8.6 (první věta o substituci)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, *F je primitivní funkce k f na* (a, b), $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ *a pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$ *existuje vlastní* $\varphi'(t)$. *Potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz.

Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.3) platí

$$(F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

Důkaz.

Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.3) platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Věta 8.7 (druhá věta o substituci)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$, *pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$ *existuje* $\varphi'(t)$ *vlastní a nenulová a* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Nechť* f *je funkce definovaná na intervalu* (a, b) *a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β),

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β).

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1} : (a, b) \to (\alpha, \beta)$.

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))'$$

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\end{aligned}$$

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1} \colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}
(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\
&= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Důkaz.

Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}
(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\
&= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta 5.3) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta 5.4). $\square$

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f.

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f.

Poznámka

Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem.

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$. Integrand je potom hledanou funkcí f.

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$. Integrand je potom hledanou funkcí f. Platí totiž

$$f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$$

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$. Integrand je potom hledanou funkcí f. Platí totiž

$$f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = g\big(\varphi^{-1}(\varphi(t))\big)\cdot(\varphi^{-1})'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Poznámka

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$. Integrand je potom hledanou funkcí f. Platí totiž

$$f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)=g\big(\varphi^{-1}(\varphi(t))\big)\cdot(\varphi^{-1})'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=g(t),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.4).

Poznámka

Věta 8.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci.

Poznámka

Věta 8.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci.
Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Poznámka

Věta 8.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci.
Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí.

Poznámka

Věta 8.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci.
Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí.
Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2}, důkaz však není snadný.

8.2 Integrace racionálních funkcí

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět reálnou funkci, která je podílem dvou polynomů, přičemž polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

8.2 Integrace racionálních funkcí

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět reálnou funkci, která je podílem dvou polynomů, přičemž polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Příklad

Nechť $n \in \mathbf{N}$. Určete primitivní funkci k $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbf{R}$.

Řešení úlohy

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

Řešení úlohy

Označme $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

$$I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

Řešení úlohy

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

$$I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n)\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení úlohy

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

$$I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení úlohy

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

$$I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$$

Řešení úlohy

Označme $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ a počítejme podle věty o integraci per partes:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Pokračování řešení úlohy

Odtud vypočteme

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Pokračování řešení úlohy

Odtud vypočteme

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Protože $I_1 \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$, umožní nám tento rekurentní vzorec určit I_n pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Pokračování řešení úlohy

Odtud vypočteme

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Protože $I_1 \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$, umožní nám tento rekurentní vzorec určit I_n pro každé $n \in \mathbf{N}$. Například

$$\begin{aligned} I_2 &\overset{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x, \\ I_3 &\overset{c}{=} \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Pokračování řešení úlohy

Odtud vypočteme

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Protože $I_1 \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$, umožní nám tento rekurentní vzorec určit I_n pro každé $n \in \mathbf{N}$. Například

$$I_2 \overset{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x,$$

$$I_3 \overset{c}{=} \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x.$$

Věta 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s* ***reálnými*** *koeficienty.*

Věta 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s **reálnými** koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

Věta 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s **reálnými** koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

- $$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$

Věta 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s* ***reálnými*** *koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

- $$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$
- *žádné dva z polynomů* $x - x_1, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

Věta 8.8

*Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s **reálnými** koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že*

- $$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$
- *žádné dva z polynomů $x - x_1, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
- *polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \ldots, p_k$

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$.

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$.

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \ldots, p_k$ a $z_1, \ldots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x - z_1)^{q_1}(x - \overline{z_1})^{q_1} \cdots \\ \cdots (x - z_l)^{q_l}(x - \overline{z_l})^{q_l}.$$

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \ldots, p_k$ a $z_1, \ldots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x - z_1)^{q_1}(x - \overline{z_1})^{q_1} \cdots \\ \cdots (x - z_l)^{q_l}(x - \overline{z_l})^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 + (-z_i - \overline{z_i})x + z_i\overline{z_i}$.

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x - z_1)^{q_1}(x - \overline{z_1})^{q_1} \cdots \\ \cdots (x - z_l)^{q_l}(x - \overline{z_l})^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 + (-z_i - \overline{z_i})x + z_i\overline{z_i}$. Obě čísla $-z_i - \overline{z_i}$, $z_i\overline{z_i}$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \overline{z_i}$ a $\beta_i = z_i\overline{z_i}$.

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x - z_1)^{q_1} (x - \overline{z_1})^{q_1} \cdots \\ \cdots (x - z_l)^{q_l} (x - \overline{z_l})^{q_l}. \end{aligned}$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 + (-z_i - \overline{z_i})x + z_i\overline{z_i}$. Obě čísla $-z_i - \overline{z_i}$, $z_i\overline{z_i}$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \overline{z_i}$ a $\beta_i = z_i\overline{z_i}$. $\square$

Věta 8.9 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$

Věta 8.9 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 8.8.

Věta 8.9 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 8.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$,

Věta 8.9 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 8.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots, B_1^l$, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

Věta 8.9 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots \\ \cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 8.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
&\qquad + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\
&\qquad + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}, \\
&\quad x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots \\
& \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
& + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\
& + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}, \\
& x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}.
\end{aligned}
$$

Bez důkazu.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R. Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q, resp. P/Q, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R. Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q, resp. P/Q, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty.

Integrace racionální funkce

Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R. Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q, resp. P/Q, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Integrace parciálního zlomku prvního typu

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Integrace parciálního zlomku druhého typu

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

Integrace parciálního zlomku druhého typu

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, dx + \\ + \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, dx.$$

Integrace parciálního zlomku druhého typu

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x + \\ + \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x.$$

Integrace parciálního zlomku druhého typu

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x + \\ + \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} \, \mathrm{d}x.$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\left((x+\alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4\right)^q} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen.

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný.

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+t^2)^q}.$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si již ukázali.

Příklad

Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}.$$

Řešení

Nejprve určíme definiční obor funkce f.

Řešení

Nejprve určíme definiční obor funkce f. Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Řešení

Nejprve určíme definiční obor funkce f. Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Řešení

Nejprve určíme definiční obor funkce f. Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce f je spojitá na celém D_f.

Řešení

Nejprve určíme definiční obor funkce f. Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce f je spojitá na celém D_f. Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$.

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)}$$

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2}$$

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{E}{x-1}$$

Řešení

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x+3}. \qquad (1)$$

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) +$$

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+(Cx + D)(x - 1)(x + 3) +$$

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3)+$$

$$+(Cx + D)(x - 1)(x + 3)+$$

$$+E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3)$$

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3)+$$

$$+(Cx + D)(x - 1)(x + 3)+$$

$$+E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1), \qquad (2)$$

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+(Cx + D)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1), \qquad (2)$$

který platí pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Řešení

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+(Cx + D)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1), \qquad (2)$$

který platí pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na **R**, a proto výše uvedený vztah (2) platí pro každé $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5:\, 0 = A + E + F,$$

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5 : 0 = A + E + F,$$

$$x^4 : 0 = 4A + B + 7E + 3F,$$

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5 : 0 = A + E + F,$$

$$x^4 : 0 = 4A + B + 7E + 3F,$$

$$x^3 : 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F,$$

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5: 0 = A + E + F,$$

$$x^4: 0 = 4A + B + 7E + 3F,$$

$$x^3: 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F,$$

$$x^2: 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E,$$

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5 : 0 = A + E + F,$$

$$x^4 : 0 = 4A + B + 7E + 3F,$$

$$x^3 : 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F,$$

$$x^2 : 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E,$$

$$x^1 : 1 = -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F,$$

Řešení

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5: 0 = A + E + F,$$

$$x^4: 0 = 4A + B + 7E + 3F,$$

$$x^3: 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F,$$

$$x^2: 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E,$$

$$x^1: 1 = -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F,$$

$$x^0: 0 = -6B - 3D + 12E - 4F.$$

Řešení

b) Dosadíme do (2) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých.

Řešení

b) Dosadíme do (2) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0

Řešení

b) Dosadíme do (2) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla -3 a 1).

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme.

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$.

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a).

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$.

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (1), který má tedy tvar

Řešení

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (1), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

Řešení

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1), \; x \in \mathbf{R},$$

Řešení

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1),\ \ x \in \mathbf{R},$$

Řešení

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x-1|,\ \ x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty),$$

Řešení

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x-1|,\ \ x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty),$$

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x+3|,\ \ x \in (-\infty, -3) \text{ a } x \in (-3, \infty).$$

Řešení

Na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2)+\frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2}+$$
$$+\frac{1}{100}\log|x-1|+\frac{3}{100}\log|x+3|+c, \quad \text{kde } c\in\mathbf{R}.$$

8.3 Trigonometrické substituce

8.3 Trigonometrické substituce

Definice

Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u, v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{0, \ldots, n\}$.

8.3 Trigonometrické substituce

Definice

Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u, v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Definice

Řekneme, že R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = -R(x, y)$.

Definice

Řekneme, že R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = -R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichá v druhé proměnné**.

Definice

Řekneme, že R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = -R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichá v druhé proměnné**. Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$.

Definice

Řekneme, že R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = -R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichá v druhé proměnné**. Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$.

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval.

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I,$$

přičemž integrand je definován na intervalu I.

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I,$$

přičemž integrand je definován na intervalu I. Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé proměnné, lze užít substituci $\sin t = x$.

(a) Je-li R lichá ve druhé proměnné, lze užít substituci $\sin t = x$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 8.6 pro funkci $\varphi\colon I \to \mathbf{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné.

(b) Je-li R lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(b) Je-li R lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(b) Je-li R lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\mathrm{tg}\, t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\mathrm{tg}(t/2) = x$.

Příklad

Spočtěte

$$\int \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\,\mathrm{d}t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Řešení

Označme integrand jako g.

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci.

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá.

Řešení

Označme integrand jako g. Funkce g je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv z trigonometrických substitucí.

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$.

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \mathrm{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$\cos t$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \mathrm{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$\sin t$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \mathrm{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \mathrm{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}}$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \mathrm{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$\mathrm{d}t$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Při určení $\mathrm{d}x$ jsme použili rovnost $t = 2 \operatorname{arctg} x$.

Řešení

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4+(1-x^2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4+(1-x^2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle.

Řešení

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4} \cdot \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4 \int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4 + (1-x^2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $t \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4+(1-x^2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $t \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

Řešení

Substituce $x = \sin t$.

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$,

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} \,\mathrm{d}u$$

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2 + 1} \,\mathrm{d}u$$

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2 + 1} \,\mathrm{d}u \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2u-1),$$

kde $u \in \mathbf{R}$.

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2 + 1} \,\mathrm{d}u \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2u-1),$$

kde $u \in \mathbf{R}$. Dostáváme tedy

$$\int g(t) \,\mathrm{d}t$$

Řešení

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} \, \mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} \, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2 + 1} \, \mathrm{d}u \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2u - 1),$$

kde $u \in \mathbf{R}$. Dostáváme tedy

$$\int g(t) \, \mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 t - 1), \; t \in \mathbf{R}.$$

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$.

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$,

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$ (je totiž na $\mathbf{R}$ spojitá).

Řešení

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$ (je totiž na $\mathbf{R}$ spojitá).

Řešení

Pokusme se shrnout:

Řešení

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$.

Řešení

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f.

Řešení

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f. Obdobná situace je při užití substituce $x = \operatorname{tg}(t/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající.

Řešení

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f. Obdobná situace je při užití substituce $x = \operatorname{tg}(t/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí.

Řešení

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f. Obdobná situace je při užití substituce $x = \operatorname{tg}(t/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí. Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu.

Příklad

Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$.

Řešení

Integrand, který označíme g, je spojitá funkce na celém $\mathbf{R}$, a má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci.

Řešení

Integrand, který označíme g, je spojitá funkce na celém $\mathbf{R}$, a má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u, v) = \frac{1}{1 + u^2},$$

potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a R je sudá.

Řešení

Integrand, který označíme g, je spojitá funkce na celém $\mathbf{R}$, a má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u, v) = \frac{1}{1+u^2},$$

potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a R je sudá. Lze tedy užít substituci $x = \operatorname{tg} t$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1 + x^2},$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky.

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x),\ x \in \mathbf{R}$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Řešení

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x),\ x \in \mathbf{R}$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t),\ t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} t\right)$,

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$.

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$,

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $c_k \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta.

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $c_k \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi -} G(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi +} G(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1},$$

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $c_k \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi -} G(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi +} G(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $c_k \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi -} G(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2} + k\pi +} G(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Řešení

Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

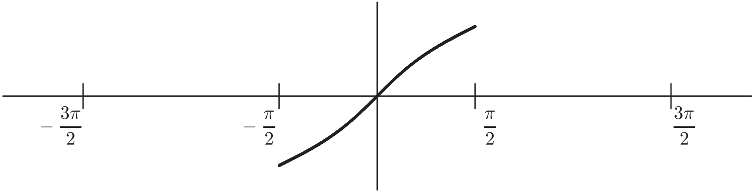
$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \\ & \end{cases}$$

Řešení

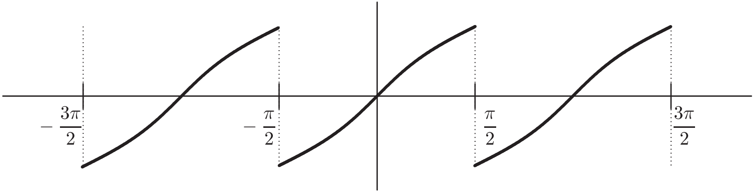
Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

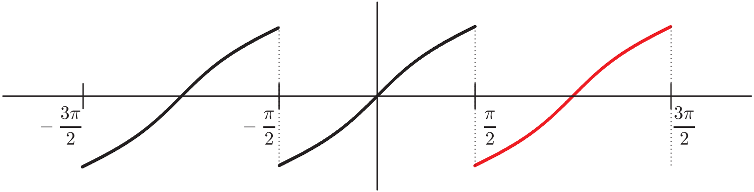
Řešení



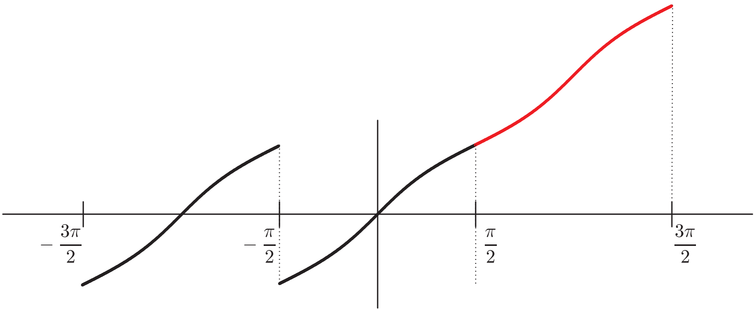
Řešení



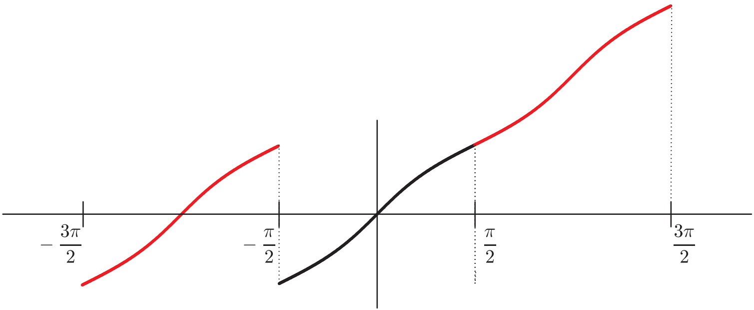
Řešení



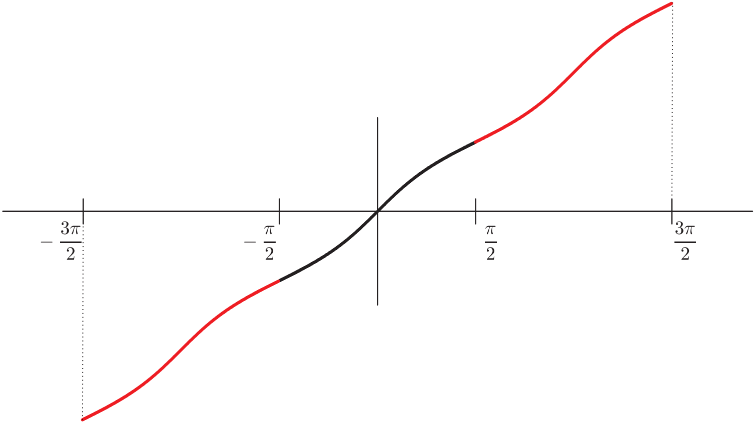
Řešení



Řešení



Řešení



8.4 Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) \mathrm{d}t$

8.4 Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) \mathrm{d}t$

Při integraci funkce $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$, kde $q \in \mathbf{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$,

8.4 Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) \mathrm{d}t$

Při integraci funkce $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$, kde $q \in \mathbf{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

8.4 Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) \mathrm{d}t$

Při integraci funkce $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$, kde $q \in \mathbf{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

Příklad

Spočtěte

$$\int \frac{t-1}{t\left(\sqrt{t}+\sqrt[3]{t^2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý,

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.
V předpisu funkce g se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$.

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.
V předpisu funkce g se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$.
Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6.

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.
V předpisu funkce g se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$.
Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $x = t^{1/6}$, $t \in (0, \infty)$. Odtud odvodíme $\mathrm{d}x = \frac{1}{6} t^{-5/6}\,\mathrm{d}t$, a tedy $\mathrm{d}t = 6x^5\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.
V předpisu funkce g se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$.
Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $x = t^{1/6}$, $t \in (0, \infty)$. Odtud odvodíme $\mathrm{d}x = \frac{1}{6} t^{-5/6}\,\mathrm{d}t$, a tedy $\mathrm{d}t = 6x^5\,\mathrm{d}x$. Na intervalu $(0, \infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{x^6 - 1}{x^6(x^3 + x^4)} \cdot 6x^5\,\mathrm{d}x = 6 \int \frac{x^6 - 1}{x^5 + x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

Řešení

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$(x^6 - 1) : (x^5 + x^4) = x - 1 + \frac{x^4 - 1}{x^4(x + 1)}$$

Řešení

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$(x^6 - 1) : (x^5 + x^4) = x - 1 + \frac{x^4 - 1}{x^4(x+1)}$$

$$= x - 1 + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4(x+1)}$$

Řešení

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$(x^6 - 1) : (x^5 + x^4) = x - 1 + \frac{x^4 - 1}{x^4(x+1)}$$

$$= x - 1 + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4(x+1)}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

Řešení

Nyní již můžeme integrovat

$$6 \int \frac{x^6 - 1}{x^5 + x^4} \, \mathrm{d}x$$

Řešení

Nyní již můžeme integrovat

$$6\int \frac{x^6-1}{x^5+x^4}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} 3x^2-6x+6\log x+6\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3},\ \ x\in(0,\infty).$$

Řešení

Nyní již můžeme integrovat

$$6\int \frac{x^6-1}{x^5+x^4}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} 3x^2-6x+6\log x+6\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3},\ \ x\in(0,\infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí ke g na $(0,\infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{t}-6\sqrt[6]{t}+\log t+6\frac{1}{\sqrt[6]{t}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{t}}+2\frac{1}{\sqrt{t}}+c,$$

kde $c\in\mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\,\mathrm{d}t$

Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2+bt+c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce.

Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\right) \mathrm{d}t$

Také integraci funkce $R\left(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\right)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R\left(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\right).$$

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\,\mathrm{d}t$

Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí
$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t - \alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí
$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$
a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2. Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I, která bude primitivní ke g na I.

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen,

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$,

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$.

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}.

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}. Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x - b)^2}$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$.

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g.

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g. Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2,

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)}$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I, který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

Příklad

Spočtěte $\int \frac{1}{t+\sqrt{t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t.$

Řešení

Integrand označíme g.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém **R**, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém $\mathbf{R}$, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém **R**, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x-2)(2x-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky
a dostaneme

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)} \, \mathrm{d}x$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{c}{=} x + 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|2x-1|$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{c}{=} x + 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|2x-1|$$

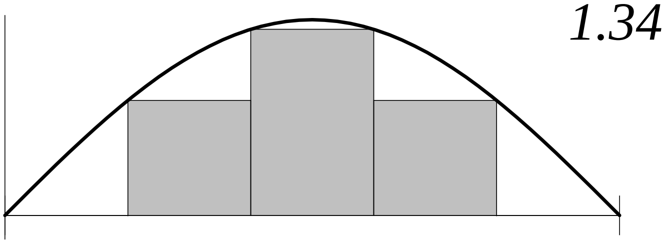
na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 8.6 má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

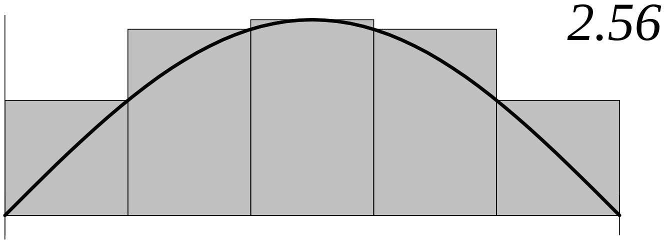
$$\sqrt{t^2+t+1} - t + 2\log\left|\sqrt{t^2+t+1} - t - 2\right| \\ - \frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{t^2+t+1} - 2t - 1\right| + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

9. Určitý integrál

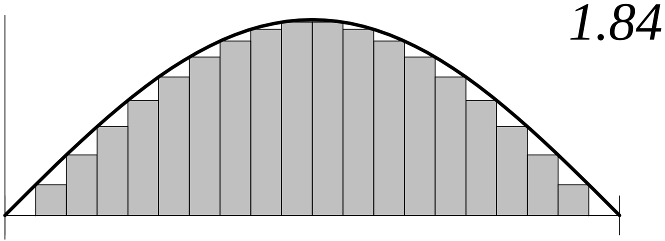
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



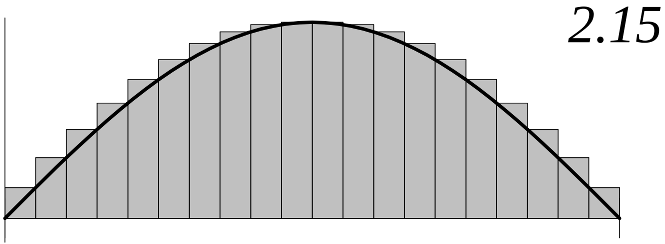
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



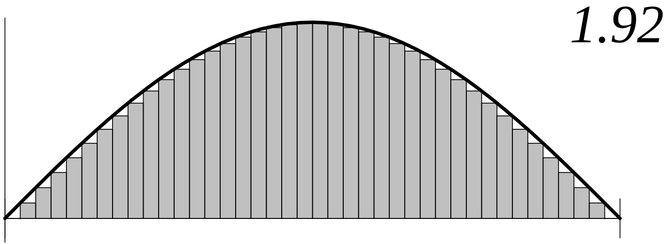
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



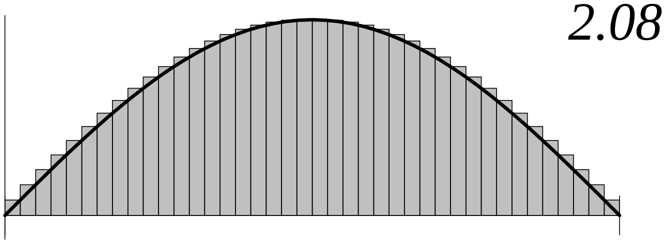
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**.

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\big\{x_j - x_{j-1};\, j \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\bigl\{x_j - x_{j-1};\, j \in \{1, \ldots, n\}\bigr\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a,b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a,b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $[a, b]$.

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Platí $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

Poznámka

Nechť $M_1, M_2 \subset \mathbf{R}$, $M_1 \subset M_2$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na M_2. Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) *Platí* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc,

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$,

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) =& \Big(\inf_{[x_{j-1},z]} f\Big)(z - x_{j-1}) + \Big(\inf_{[z,x_j]} f\Big)(x_j - z)\\ &- \Big(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\Big)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = &\Big(\inf_{[x_{j-1}, z]} f\Big)(z - x_{j-1}) + \Big(\inf_{[z, x_j]} f\Big)(x_j - z) \\ &- \Big(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f\Big)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc.

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.
Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

Důkaz (b)

Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'.

Důkaz (b)

Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden.

Důsledek 9.2

Nechť f je omezená na $[a, b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Potom

$$m(b-a) \le \underline{S}(f, D_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D_2) \le M(b-a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}$.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obsahující body a, b.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obsahující body a, b. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obsahující body a, b. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Lemmatu 9.1(b).

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$.

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí:

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}(f,D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností.

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] \colon |f(x)| < K.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b]\colon |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno.

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b]\colon |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b]\colon |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a,b]\colon |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1,\dots,n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \tfrac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$.

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0.

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P.

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I.

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I|$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

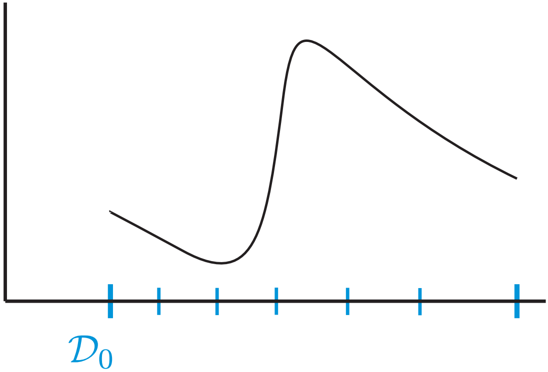
Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|.$$

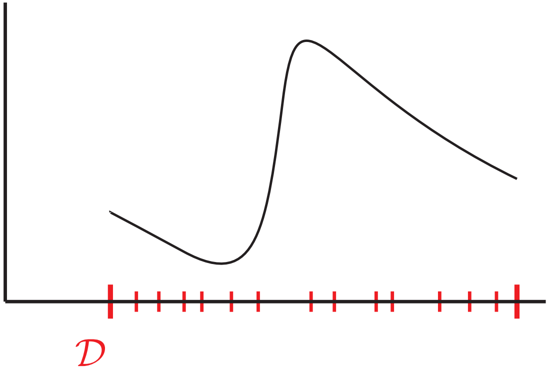
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$.

Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.

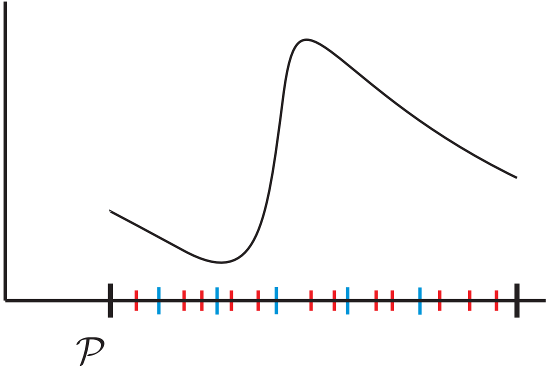
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



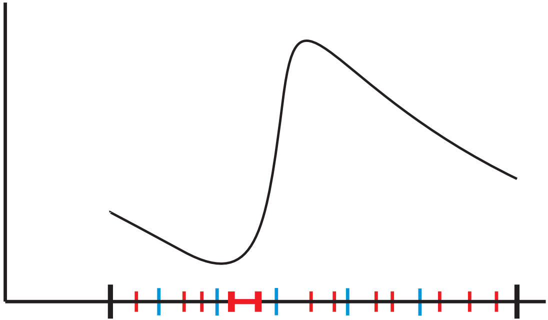
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



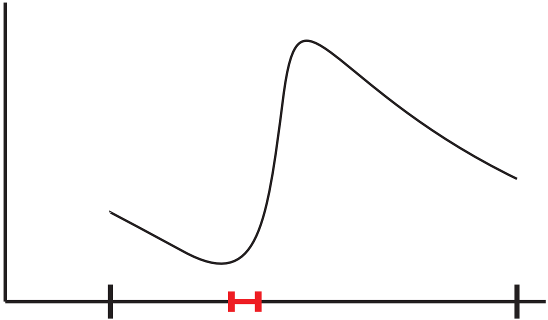
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



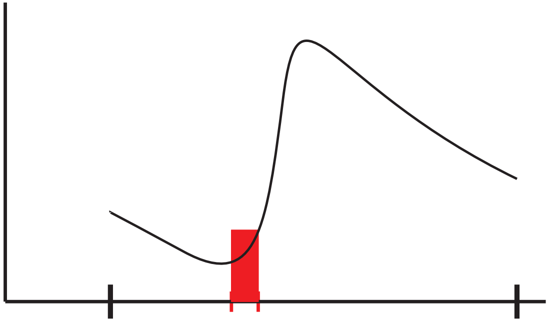
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X.

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$.

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

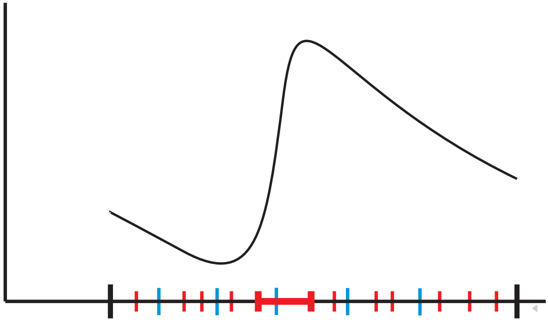
$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

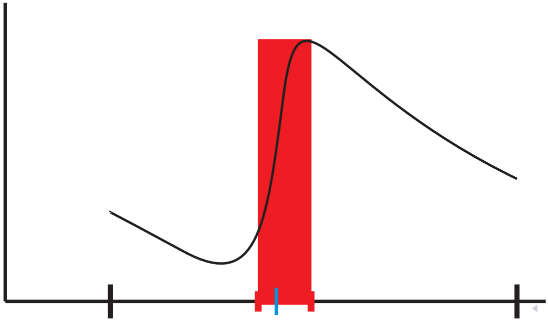


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

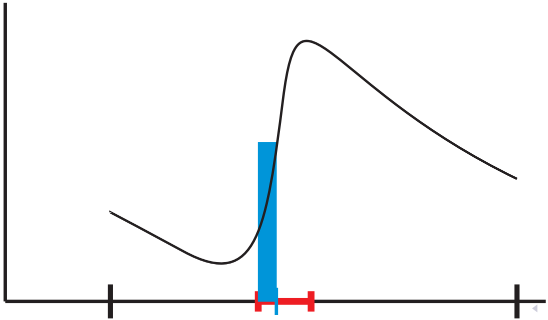


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

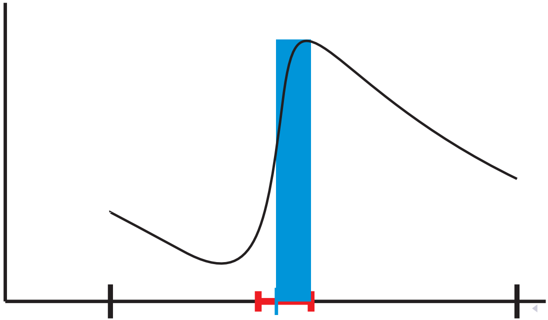


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$



Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha) - \Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta - \alpha)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\left|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\right)\right|$$

$$\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha)-\Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta-\alpha)+K(x_i-\alpha+\beta-x_i)=2K(\beta-\alpha)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big| \sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \big(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i) \big) \Big|$$

$$\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2K\nu(D).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \big(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\big)\Big|$$

$$\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2K\nu(D).$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ právě uvedeného typu nejvýše $n - 1$,

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha)-\Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta-\alpha)+K(x_i-\alpha+\beta-x_i)=2K(\beta-\alpha)\leq 2K\nu(D).$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ právě uvedeného typu nejvýše $n-1$, máme

$$\overline{S}(f,D)-\overline{S}(f,P)<2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (1).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D)$$

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\le \overline{S}(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\le \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.
Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbf{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.
Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbf{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov.

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, *a* $< b$, *a f je omezená funkce na* $[a, b]$.

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$*. Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$*.*

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$*. Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$*. Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$$

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$. *Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad a \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně.

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$.

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.

Příklad

Spočtěte $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$\underline{S}(f, D_n)$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n)$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{j}{n})^2 \frac{1}{n}$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{j}{n})^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$*.*

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

(ii) *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* D *intervalu* $[a, b]$ *takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Definice

Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I.

Definice

Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \ \forall x, y \in I: \\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I \colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon\right).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon\right).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0, respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I.

Příklad

Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Pak je f spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejnoměrné spojitosti.

Věta 9.6

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$.
Potom f *je stejnoměrně spojitá na* $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$\exists \varepsilon > 0$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] :$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta)$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Potom platí

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in [a,b]\colon (|x-y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a,b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}|$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}|$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$.

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pravá strana nerovnosti konverguje k nule, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pravá strana nerovnosti konverguje k nule, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Ale $\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, což je spor.

Věta 9.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$. *Potom* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6).

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6). Nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6). Nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$.

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Bigr) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1})$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Pak pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Věta 9.5 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

Věta 9.8

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je monotónní funkce na* $[a, b]$*. Potom* $f \in \mathcal{R}([a, b])$*.*

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon\ f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b - a)\big(f(b) - f(a)\big) < \varepsilon,$$

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\bigl(f(b)-f(a)\bigr) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$.

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon.$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 tedy platí $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$.

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak*
$f + g \in \mathcal{R}([a, b])$,

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené.

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.
Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.
Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f + g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0.

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}(f, D_n)+\overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underline{S}(f, D_n)+\underline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle věty o dvou strážnících máme

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n)$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n)$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ a

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$.

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$.
Funkce αf je omezená na $[a, b]$.

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha\overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha\underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 9.10 (Riemannův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b]$.

Věta 9.10 (Riemannův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b]$. *Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$.

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$,

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$.

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$. *Pak platí* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *právě když* $f \in \mathcal{R}([a, c])$ *a* $f \in \mathcal{R}([c, b])$.

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$. *Pak platí* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *právě když* $f \in \mathcal{R}([a, c])$ *a* $f \in \mathcal{R}([c, b])$. *Je-li* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$,

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0.

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2.

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2. Pak platí $\lim \nu(D_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ pak platí

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) \right)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) \right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dle Důsledku 9.4 platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a také dokazovaná rovnost.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$$\leq \left(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\right) + \left(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\right)$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$$\leq \left(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\right) + \left(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\right)$$

$$= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n).$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) = 0.$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$.

Poněvadž platí $\lim\bigl(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\bigr) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\bigr) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně.

Poněvadž platí $\lim\bigl(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\bigr) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\bigr) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost za znění věty plyne z první části důkazu.

Poznámka

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují.

Poznámka

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 9.11 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

17. přednáška, 16. 4. 2020

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Pak* $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ *a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$,

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f|$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 je tedy $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 je tedy $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$. Zbývá odvodit příslušnou nerovnost.

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(|f|, D'),$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9.

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval a* f *je funkce definovaná na* J *splňující* $f \in \mathcal{R}([a, b])$ *pro každé* $a, b \in J$.

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval a* f *je funkce definovaná na* J *splňující* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *pro každé* $a, b \in J$. *Nechť* $c \in J$.

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*

(b) *jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$,

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Nechť K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] \colon |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0_+}} F(y) = F(y_0).$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0_+}} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech J, které nejsou levým krajním bodem J, lze dokázat obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right|$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\Big|.$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\Big|.$$

Platí $\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t = f(x_0)\cdot(x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$.

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě,

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný.

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. $\square$

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$*,* $a < b$*, a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b)*. Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *a* $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *a* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b).

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *a* $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *a* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b). *Potom existují vlastní limity* $\lim_{x \to a_+} F(x)$ *a* $\lim_{x \to b_-} F(x)$ *a platí*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *$a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom f má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, *$a < b$ a f je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a F je primitivní funkce k funkci f na* (a, b). *Potom existují vlastní limity* $\lim_{x \to a_+} F(x)$ *a* $\lim_{x \to b_-} F(x)$ *a platí*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce.

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 9.13 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b), tj. F je primitivní k f.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ & \\ & \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ & \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá.

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f,

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t) \, \mathrm{d}t$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b)$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$.

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, *a* $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*Jestliže g je funkce definovaná alespoň na* $[a, b]$, *která se v intervalu* $[a, b]$ *liší od f v konečném počtu bodů,*

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*Jestliže g je funkce definovaná alespoň na* $[a, b]$, *která se v intervalu* $[a, b]$ *liší od* f *v konečném počtu bodů, potom* $g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená,

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé,

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J.

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$.

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|,$$

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|,$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$.

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \le \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f| + |\sup_I g|)\cdot|I|$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \le \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f| + |\sup_I g|)\cdot|I|$$

$$\le \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot|I| \le \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot\nu(D)$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f|+|\sup_I g|)\cdot|I|$$

$$\leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot|I| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot\nu(D)$$

$$\leq 2m\cdot 2K\cdot\nu(D) < \varepsilon.$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D) - \overline{S}(g,D)| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I|$$

$$\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot |I| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot \nu(D)$$

$$\leq 2m \cdot 2K \cdot \nu(D) < \varepsilon.$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f,D) - \underline{S}(g,D)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

$$< \overline{S}(f, D) + \varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

$$< \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

$$< \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že g je na intervalu $[a, b]$ riemannovsky intergrovatelná a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

(ii) *Existuje* $I \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *splňující:*

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

(ii) *Existuje* $I \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *splňující: je-li* $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ *dělení intervalu* $[a, b]$ *takové, že* $\nu(D) < \delta$, *a* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, *pak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové,

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$,

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii)$\Rightarrow$(i)

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\Big| < \varepsilon = 1$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon = 1$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\Big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \ldots, n\}\Big\},$$

$$K = \max\Big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}.$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

$$K = \max\big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

$$K = \max\big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

$$K = \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ & \end{cases}$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

$$K = \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t, & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1})$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a).$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a).$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}\big(1 + |I| + K(b-a)\big)$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a).$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}\big(1 + |I| + K(b-a)\big)$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 9.5.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a)$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)\le I+\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)\leq I+\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D)>I-\varepsilon-\varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<2(1+b-a)\varepsilon.$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)\leq I+\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D)>I-\varepsilon-\varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<2(1+b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. □

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii).

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$.

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq I$,

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka

Podmínka (ii) Věty 9.16 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

19. přednáška, 24. 4. 2020

9.2 Newtonův integrál

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b).

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**,

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbf{R}^\star$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**,

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Označení

Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \\ \end{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{l} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy divergu} \end{cases} \\ \\ \end{array} \right.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.
(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverg} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.
(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy divergu} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.
Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$.

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.
Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit
$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a
$[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha \, dx$.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1,\infty), \\ & \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1,\infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty,-1), \\ \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$.

Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka

(a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

Poznámka

(a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá f primitivní funkci.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 9.17 (linearita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a* $\alpha \in \mathbf{R}$ *Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b). *Pak*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$

pokud je výraz napravo definován.

Věta 9.17 (linearita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a $\alpha \in \mathbf{R}$ Newtonův integrál funkcí f, g existuje na (a, b). Pak

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\ \,dx,$$

pokud je výraz napravo definován. Dále platí

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

pokud je výraz napravo definován.

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$.

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud je výraz $\alpha[F]_a^b$ definován. $\square$

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$*,* $a < b$*, a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b)*.*

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b). *Nechť platí* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$.

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b)*. Nechť platí* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$*. Pak*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b)

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b).

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

20. přednáška, 28. 4. 2020

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.

(a) *Jestliže existuje Newtonův integrál funkce* f *na intervalu* (a, b), *potom existují integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.

(a) *Jestliže existuje Newtonův integrál funkce* f *na intervalu* (a, b), *potom existují integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

(b) *Jestliže existují Newtonovy integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a* f *je spojitá v* c, *pak platí* (2), *pokud má pravá strana smysl.*

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b).

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b).

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity.

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b).

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c.

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$.

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\,\mathrm{d}t$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\, \mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\, \mathrm{d}t = K(x - c + \delta).$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\,\mathrm{d}t = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c - \delta)$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$, neboť F je spojitá na (a, c).

Limita $\lim_{x \to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní.

Limita $\lim_{x \to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x \to c+} G(x)$ je vlastní.

Limita $\lim_{x \to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x \to c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \to c_-} F(x) = \lim_{x \to c_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ & \\ & \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) =$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x)$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x)$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$. Odtud plyne, že výraz $\lim_{x \to b-} H(x) - \lim_{x \to a+} H(x)$ je definován.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$. Odtud plyne, že výraz $\lim_{x \to b-} H(x) - \lim_{x \to a+} H(x)$ je definován. $\square$

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b).

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b). *Pak* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *existuje a*

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, *a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b). *Pak* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *existuje a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x\to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x\to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ definován.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b).

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \max\left\{ \int_a^b f(x)\, dx, -\int_a^b f(x)\, dx \right\}$$

$$= \max\left\{ \int_a^b f(x)\, dx, \int_a^b -f(x)\, dx \right\} \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$= \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b)

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f *a* g *jsou funkce definované na* (a, b).

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f *a* g *jsou funkce definované na* (a, b). *Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b) *a* G *je primitivní funkce k funkci* g *na* (a, b).

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b). Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b). Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b).

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)'$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

$$= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

$$= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$,

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f *je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β).

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, *f je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f *je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*,* $\alpha < \beta$*,* f *je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β)*. Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$*. Potom*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci. Z Darbouxovy vlastnosti derivace, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci. Z Darbouxovy vlastnosti derivace, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β).

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má f na (a,b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. Potom má f na (a,b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t\to\beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to\alpha_+} \varphi(t) = b$$

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. Potom má f na (a,b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f\circ\varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α,β) primitivní funkci, a to funkci $-F\circ\varphi$. Máme

$$\lim_{t\to\beta_-}\varphi(t)=a,\quad \lim_{t\to\alpha_+}\varphi(t)=b$$

a

$$\lim_{t\to\alpha_+}F(\varphi(t))=\lim_{x\to b_-}F(x),\quad \lim_{t\to\beta_-}F(\varphi(t))=\lim_{x\to a_+}F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Odtud dostáváme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t$$

Odtud dostáváme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_{\alpha}^{\beta}$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F \circ \varphi]_\alpha^\beta$$

$$= -\lim_{x \to a_+} F(x) + \lim_{x \to b_-} F(x)$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$

$$= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x)$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x)$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x))$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t),$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\quad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x))$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\quad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \qquad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G \circ \varphi]_a^b$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G \circ \varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x\to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t), \qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, *a funkce* F *je definována alespoň na* $P(a, \delta_0)$.

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, a funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \to a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, *a funkce* F *je definována alespoň na* $P(a, \delta_0)$. *Potom existuje vlastní* $\lim_{x\to a} F(x)$ *právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a, \delta) \colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$.

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno.

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a, \delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$.

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$. Pak $\lim_{x \to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a.

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$. Pak $\lim_{x \to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a. Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1 \in \mathbf{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \colon x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$.

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x\to a} F(x) = A$. $\square$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 : |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$. $\square$

Poznámka

Tvrzení Věty 9.23 platí obdobně i pro jednostranné limity.

Věta 9.24

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená spojitá funkce na* (a, b). *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) \, \mathrm{d}t \right|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq K|y - x|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y-x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23. Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23. Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně.

$\square$

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí.

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$.

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, je na intervalu $\mathbf{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

Věta 9.25 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *má Riemannův integrál na* $[a, b]$ *a Newtonův integrál na* (a, b)*. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$,

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ platí

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ platí

$$|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon.$$

Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ & \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ & \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b).

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1})$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(H(x_i) - H(x_{i-1})\bigr)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Důsledek 9.26

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R) \int_a^b f(x)\,dx = (N) \int_a^b f(x)\,dx.$$

21. přednáška, 4. 5. 2020

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$. *Nechť funkce* $f, g\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *splňují* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b)$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$. *Nechť funkce* $f, g\colon [a,b) \to \mathbf{R}$ *splňují* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in [a,b)$. *Nechť dále je* f *spojitá na* $[a,b)$ *a platí* $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ a $a < b$. Nechť funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b).

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$. $\square$

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbf{R}^{\star}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce $f, g\colon (a, b] \to \mathbf{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$,

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbf{R}^\star$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce $f, g\colon (a, b] \to \mathbf{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad

Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$,

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\, \mathrm{d}x$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$,

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$, je podle Věty 9.28 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$, je podle Věty 9.28 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Pak dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$.

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$.

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$. *Jestliže* $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$,

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$. *Jestliže* $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *právě tehdy, když* $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$,

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$,

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Potom $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Potom $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b).

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b). $\square$

Poznámka

Pokud $c = 0$, pak platí implikace
$g \in \mathcal{N}(a,b) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Poznámka

Pokud $c = 0$, pak platí implikace $g \in \mathcal{N}(a, b) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a, b)$. Pokud $c = \infty$, pak platí implikace $f \in \mathcal{N}(a, b) \Rightarrow g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad

Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2},$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2.$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2.$$

Podle Věty 9.29 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$ *a* $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *je nerostoucí, nezáporná a spojitá.*

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(t)\,dt\right|.$$

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost.

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg existuje $\delta > 0$ takové, že platí

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x, y \in [a, b] \colon |x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$(|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \wedge \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ.

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i]\colon f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i]\colon\, f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a) + 1)$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

$$= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t \in [a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.
První nerovnost lze dokázat obdobně.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.
První nerovnost lze dokázat obdobně.

$\square$

22. přednáška, 12. 5. 2020

Věta 9.31 (první věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ *a nechť* $a < b$. *Nechť* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je nezáporná na* $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. *Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.
Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,dx > 0$.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (3) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (3) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$,

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.
Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (3) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (3) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Věta 9.32 (druhá věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$.

Věta 9.32 (druhá věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$. *Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí.

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí.
Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$,

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (4).

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (4).
Definujme

$$\varphi(y) = g(a) \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b) \int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (4).
Definujme

$$\varphi(y) = g(a) \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b) \int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b)) \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a,b]} \varphi(y).$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a)-g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a)-g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[a,b]} \left((g(a)-g(b)) \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a)-g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[a,b]} \left((g(a) - g(b)) \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

$$= \varphi(y_1).$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.30

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a, b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.30

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a,b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

23. přednáška, 14. 5. 2020

9.3 Aplikace určitého integrálu

Definice

Křivkou budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$).

Definice

Křivkou budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$). Křivkou **třídy** $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že φ_i' je spojité na $[a,b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a,b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Definice

Nechť $\varphi \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka.

Definice

Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\left(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)\right).$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka.*

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $n \in \mathbf{N}$*,* $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Důkaz Lemmatu 9.33

Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ je konvergentní.

Důkaz Lemmatu 9.33

Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ je konvergentní. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t) \, \mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t \right].$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí.

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak právě provedený výpočet opět dává dokazovanou nerovnost.

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak právě provedený výpočet opět dává dokazovanou nerovnost. $\square$

Věta 9.34

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka třídy* $\mathcal{C}^1$. *Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2}\, dt.$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno.

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \Big\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Big\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta\colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \,\mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \,\mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \le \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\le \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\le \left\| \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

$$\leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq L(\varphi)$.

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

$$\leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t \leq L(\varphi)$. $\square$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi)$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}.$$

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$Objem\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$Objem\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$Povrch\ pláště\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Věta 9.36 (integrální kritérium)

Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

Důkaz Věty 9.36

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$,

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$.

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí,

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f, D) = a_{n_0} + \cdots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f, D) = a_{n_0} + \cdots + a_{n_1 - 1} = \sum_{i=n_0}^{n_1 - 1} a_i,$$

$$\underline{S}(f, D) = a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D)$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞),

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje,

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. $\square$

Příklad

Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^\infty$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^\infty = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^\infty f(n)$$

diverguje.

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, *a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci.*

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, *a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci. Pak*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, *a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci. Pak*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt. \tag{5}$$

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.
Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.
Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy vztah pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n + 1$.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n + 2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n + 2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x - t)^n$ spojitá na $[a, x]$, Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes počítat

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + f(x) - T_n^{f,a}(x)
\end{aligned}
$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

$$= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

$$= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).$$

$\square$

24. přednáška, 19. 5. 2020

10. Obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = f$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

$$mv' = mg - bv^2$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

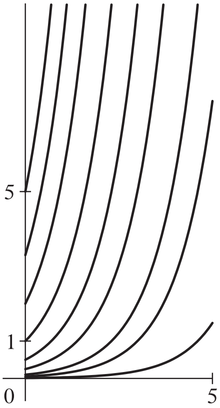
$$mv' = mg - bv^2$$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

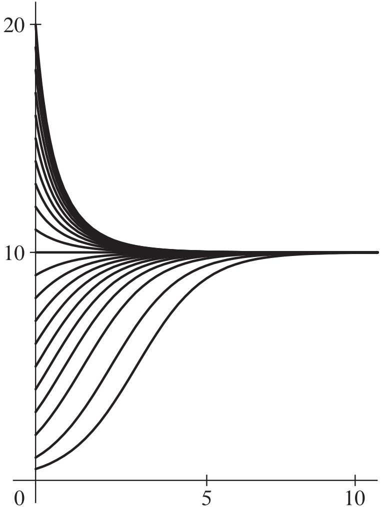


Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$

Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$



Biologie

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevníci – chudoblanní

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevníci – chudoblanní
$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, b = a/375$

Ekonomie

Q_d . . . poptávka

Ekonomie

Q_d . . . poptávka
Q_s . . . nabídka

Ekonomie

Q_d … poptávka
Q_s … nabídka
P … cena

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$
$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$

Ekonomie

Q_d . . . poptávka
Q_s . . . nabídka
P . . . cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$
$$Q_d = Q_s$$

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

$$y'' - y = \sin x$$

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

$$y'' - y = \sin x$$

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 - z_3 - \sin z_4$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D_y \subsetneq D_z$ a které se na D_y shoduje s y.

- Všechna maximální řešení.

- Všechna maximální řešení.
- Existence a jednoznačnost řešení.

- Všechna maximální řešení.
- Existence a jednoznačnost řešení.
- Limitní chování a stabilita řešení.

10.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice

Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{2}$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2).

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2).
Počítejme

$y'(x)$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2).
Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x) + c))} \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)+c))} \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x) + c))} \cdot h(x)$$

$$= g(G^{-1}(H(x) + c)) \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c)\cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)+c))}\cdot h(x)$$

$$= g(G^{-1}(H(x)+c))\cdot h(x) = g(y(x))\cdot h(x).$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) na intervalu (a, c).

25. přednáška, 23. 5. 2020

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

$$y \mapsto y' + py$$

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

$$y \mapsto y' + py$$

$$\mathcal{C}^1(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$,

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$, *kde* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$,

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right)e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \tag{5}$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4).

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x)$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x)$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Ukážeme, že maximální řešení (4) musí mít tvar (5).

Ukážeme, že maximální řešení (4) musí mít tvar (5).
Maximální řešení homogenní rovnice $y' + py = 0$ mají tvar

$$y(x) = k \cdot e^{-P(x)}, \qquad x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{R}.$$

Metoda variace konstanty.

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)}$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big)e^{-P(x)} + ce^{-P(x)}$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \Big) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

Platí $y(x_0) = y_0$, a tedy $c = y_0$.

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big)e^{-P(x)} + ce^{-P(x)}$$

Platí $y(x_0) = y_0$, a tedy $c = y_0$. $\square$

26. přednáška, 29. 5. 2020

10.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{6}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b)

10.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{6}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu s konstantními koeficienty**).

10.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (6)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**).
Homogenní rovnicí k rovnici (6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (7)$$

Věta 10.2

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$.

Věta 10.2

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. *Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (6), *které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0, \; y'(t_0) = z_1, \; \dots, \; y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Věta 10.2

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. *Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (6), *které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 10.2

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. *Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (6), *které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Bez důkazu.

Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$

Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n*.*

Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n*.*

(ii) *Nechť* y_p *je maximální řešení rovnice* (6)*.*

Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n.

(ii) *Nechť* y_p *je maximální řešení rovnice* (6). *Pak funkce* y *je maximálním řešením* (6), *právě když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$, *kde* y_h *je vhodné řešení rovnice* (7).

Důkaz Věty 10.3

Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbf{R}$.

Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení L lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$.

Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení L lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor.

Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení L lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor. Podle Věty 10.2 nalezneme maximální řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnice (7) splňující

$$\begin{array}{cccc}
y_1(0) = 1, & y_2(0) = 0, & \ldots & y_n(0) = 0, \\
y_1'(0) = 0, & y_2'(0) = 1, & \ldots & y_n'(0) = 0, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0, & y_2^{(n-1)}(0) = 0, & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) = 1.
\end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$.

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Ukážeme, že množina $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Řešení $y_1, \ldots, y_n$ jsou tedy lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7).

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

$\square$

(ii) Řeší-li y_p rovnici (6) a y_h rovnici (7), pak z linearity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6).

(ii) Řeší-li y_p rovnici (6) a y_h rovnici (7), pak z linearity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6).
Obráceně, je-li y maximální řešení rovnice (6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (7).

(ii) Řeší-li y_p rovnici (6) a y_h rovnici (7), pak z linearity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6).
Obráceně, je-li y maximální řešení rovnice (6), pak $y - y_p \in \mathrm{Ker}\, L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (7). $\square$

Definice

Fundamentalním systémem rovnice (7) nazýváme bázi prostoru maximálních řešení rovnice (7).

Definice

Fundamentalním systémem rovnice (7) nazýváme bázi prostoru maximálních řešení rovnice (7).

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

Nechť χ *je charakteristický polynom rovnice* (7)*.*

Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

Nechť χ *je charakteristický polynom rovnice* (7). *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu* χ *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$.

Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

Nechť χ *je charakteristický polynom rovnice* (7). *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu* χ *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* χ *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$, *kde* $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$.

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

27. přednáška, 2. 6. 2020

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.

Derivace funkcí s hodnotami v $\mathbf{C}$

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.
Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.
Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci. Potom platí

- $(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$,

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.

Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci. Potom platí

- $(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$,
- $(\varphi\psi)'(x) = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)$.

(a) ... zřejmé

(a) ... zřejmé
(b)

$$(\varphi\psi)'(x) = (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)\\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)\\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x)\\ &\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$
\begin{aligned}
(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\
&= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\
&\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\
&= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)
\end{aligned}
$$

(a) ... zřejmé

(b)

$$\begin{aligned}
(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\
&= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\
&\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\
&= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)
\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé

(b)

$$\begin{aligned}
(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\
&= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\
&\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\
&= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)
\end{aligned}$$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a, b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a, b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a, b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a, b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{C}$

- Nechť $\varphi, \psi \colon (a, b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a, b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{C} \qquad [e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)]$

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Důkaz.

Polynom Q lze zapsat ve tvaru

$$Q(z) = (z - \omega)^q \cdot R(z),$$

kde R je opět polynom. Odtud již tvrzení snadno plyne.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Důkaz.

Polynom Q lze zapsat ve tvaru

$$Q(z) = (z - \omega)^q \cdot R(z),$$

kde R je opět polynom. Odtud již tvrzení snadno plyne. $\square$

Důkaz Věty 10.4

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$

Důkaz Věty 10.4

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$

$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

$$L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)}$$

$$L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)}$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$0 \leq s \leq j \leq n$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$0 \leq s \leq j \leq n$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j - s + 1) \lambda^{j-s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} \underbrace{\color{red}{(t^k)^{(s)}}}_{=0} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} \underbrace{(t^k)^{(s)}}_{=0} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Důkaz lineární nezávislosti

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci.

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b.

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b. Platí

$$
\begin{aligned}
& a t^k e^{\alpha t} \cos \beta t + b t^k e^{\alpha t} \sin \beta t \\
& = a t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + b t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \\
& = \frac{1}{2}(a - bi) t^k e^{(\alpha + i\beta)t} + \frac{1}{2}(a + bi) t^k e^{(\alpha - i\beta)t}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dále platí, že

$$a = b = 0 \Leftrightarrow a - bi = a + bi = 0. \tag{9}$$

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy.

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \dots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$.

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$,

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$, protože pak budou všechny koeficienty polynomů $P_1, \ldots, P_k$ nulové a díky pozorování (9) obdržíme, že i koeficienty použité v naší lineární kombinaci jsou nulové.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí $P_1(t)e^{\omega_1 t} = 0$, Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí $P_1(t)e^{\omega_1 t} = 0$, pak nutně $P_1(t) = 0$ pro každé $t \in (a, b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned}(P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x} \\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x},\end{aligned}$$

kde R je polynom stejného stupně jako P.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$,

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \dots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon\ P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon\ P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon\ P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$.

Lemma 10.6

Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (7). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru d, čímž je důkaz dokončen. □

Metoda variace konstant

Hledejme řešení rovnice (6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

Metoda variace konstant

Hledejme řešení rovnice (6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a, b) a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (7).

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$.

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$.

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$
\begin{aligned}
c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\
&\vdots \\
c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\
c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f,
\end{aligned}
$$

Dosadíme do (6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Pravá strana předchozího vztahu je spojitá funkce v t, takže hledaná $c_i, i = 1, \dots, n$, můžeme nalézt jako primitivní funkci k pravé straně.

Metoda speciální pravé strany

Věta 10.7

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t) ,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (6) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t) ,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{\textit{stupeň } P, \textit{stupeň } Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Metoda speciální pravé strany

Věta 10.7

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t) \,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (6) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t) \,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{\text{stupeň } P, \text{ stupeň } Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Bez důkazu.

28. přednáška, 7. 6. 2020

10.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
&\vdots \\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned} \tag{10}
$$

10.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

kde máme $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $x'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $f = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice

- **Řešením soustavy** (10) rozumíme vektorovou funkci $x = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (10).

Definice

- **Řešením soustavy** (10) rozumíme vektorovou funkci $x = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (10).
- **Počáteční úlohou** pro (10) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení x soustavy (10) splňující navíc předem zadanou podmínku $x(t_0) = x^0$, kde $[t_0, x^0] \in G$ (tzv. **počáteční podmínka**).

- **Maximální řešení** soustavy (10) je takové řešení x definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li y řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $y(t) = x(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Model dravec-kořist

Model dravec-kořist

x ... zajíci

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$

Model dravec-kořist

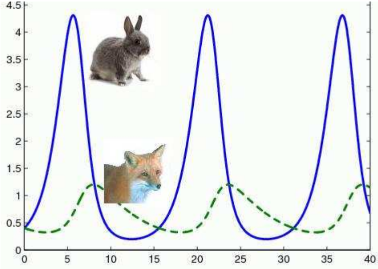
x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

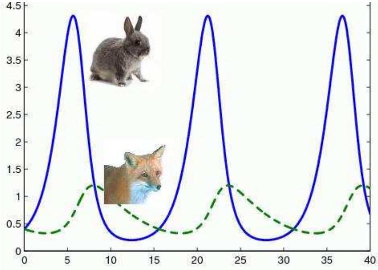
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

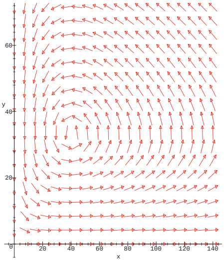
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

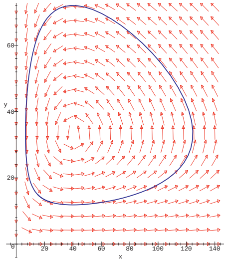
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Poznámka

Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{11}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= h(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Pokud x řeší (12), pak x_1 řeší (11). Obráceně, pokud y řeší (11), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (12).

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na* G*. Pak pro každé* $[t_0, x^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na G. Pak pro každé* $[t_0, x^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta :$$
$$\|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na* G*. Pak pro každé* $[t_0, x^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta : \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

$$\|v\| = \|[v_1, v_2, \dots, v_n]\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, x^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (10) splňující $x(t_0) = x^0$.

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta : \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

$$\|v\| = \|[v_1, v_2, \dots, v_n]\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Bez důkazu.

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,*
$f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na* G

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*,*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s,x^1], [s,x^2]$ *splňující* $\|[s,x^1]-[t,x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s,x^2]-[t,x]\| < \varepsilon$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f : [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v x, tj. pro každý bod $[t, x] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $L > 0$ takové, že pro každé dva body $[s, x^1]$, $[s, x^2]$ splňující $\|[s, x^1] - [t, x]\| < \varepsilon$ a $\|[s, x^2] - [t, x]\| < \varepsilon$ máme

$$||f(s, x^1) - f(s, x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f : [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na* G *a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t, x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s, x^1]$*,* $[s, x^2]$ *splňující* $\|[s, x^1] - [t, x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s, x^2] - [t, x]\| < \varepsilon$ *máme*

$$||f(s, x^1) - f(s, x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Jestliže $[t_0, x^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f : [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na* G *a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t, x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s, x^1]$, $[s, x^2]$ *splňující* $\|[s, x^1] - [t, x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s, x^2] - [t, x]\| < \varepsilon$ *máme*

$$||f(s, x^1) - f(s, x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Jestliže $[t_0, x^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Bez důkazu.

10.6 Soustavy lineárních dif. rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned} \tag{13}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$x' = \mathbb{A}(t)x + b(t),$$

Vektorový tvar:

$$x' = \mathbb{A}(t)x + b(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A} \colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení.*

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* x *soustavy* (13) *splňující* $x(t_0) = x^0$.

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* x *soustavy* (13) *splňující* $x(t_0) = x^0$. *Toto řešení je definováno na celém intervalu* (α, β).

Poznámka k důkazu věty 10.10

Definujeme $f\colon (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ předpisem

$$f(t, x) = \mathbb{A}(t)x + b(t).$$

Pak lze ověřit předpoklady Picardovy věty.

Definice

Homogenní soustavou k (13) rozumíme soustavu

$$x' = \mathbb{A}(t)x. \tag{14}$$

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení.*

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (367) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$.

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (367) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. *Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.*

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β).

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení

$$L\colon \mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$$

definovaného předpisem $L(y) = y' - \mathbb{A}y$.

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení

$$L\colon \mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$$

definovaného předpisem $L(y) = y' - \mathbb{A}y$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť y je maximální řešení (14).

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť y je maximální řešení (14). Pak y je definováno na (α, β). Označme

$$z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \dots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β).

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{x^1, \ldots, x^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$.

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{x^1, \ldots, x^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$. $\square$

Věta 10.12

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* y *je řešení* (13) *na intervalu* (α, β). *Potom každé řešení* x *soustavy* (13) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $y + z$, *kde* z *je jisté řešení* (14).

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

a tedy $z = x - y$ řeší (14).

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

a tedy $z = x - y$ řeší (14). $\square$

Definice

Nechť vektorové funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (14) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (14). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Definice

Nechť vektorové funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (14) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (14). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (14).

Lemma 10.13

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (14).

Lemma 10.13

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (14). *Pak* $\Phi(t)$ *je regulární pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $y^1, \dots, y^n$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $y^1, \dots, y^n$. $\square$

Věta 10.14 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbf{R}^n$.

Věta 10.14 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbf{R}^n$. *Pak maximální řešení* y *rovnice* (13) *s počáteční podmínkou* $y(t_0) = y^0$ *má tvar*

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ *je fundamentální matice soustavy* (14).

Důkaz Věty 10.14

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$,

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$y'(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t)$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \end{aligned}$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t).
\end{aligned}
$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$. $\square$

29. přednáška, 10. 6. 2020

Lemma 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *je řešením soustavy* $y' = \mathbb{A}y$. *Pak* y *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$(\mathbb{A}^k y)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)}$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)'$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Funkce y je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Funkce y je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah. $\square$

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 10.16

Nechť $\Lambda = (P_1, \ldots, P_n)^T$ *je* λ*-matice.*

Lemma 10.16

Nechť $\Lambda = (P_1, \ldots, P_n)^T$ *je* λ*-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na* λ*-matici* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)^T$*, kde nejvýše jeden z polynomů* $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ *je nenulový.*

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\Big\{\operatorname{st} P_i;\; i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \neq 0\Big\}.$$

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\left\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \neq 0\right\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\bigl\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\bigr\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\left\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\right\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést Λ na $(c, 0, \dots, 0)^T$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\mathrm{st}\, P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \ldots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \ldots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad. $\square$

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici.*

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je* n*.*

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. $\square$

Označení

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$.

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Lemma 10.18

Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$.

Lemma 10.18

Nechť P, Q *jsou polynomy a* $y \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$. *Pak*

(a) $(P+Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y,$

Lemma 10.18

Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Pak

(a) $(P+Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y$,

(b) $(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right)y$.

(a) Tvrzení je zřejmé.

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y
\end{aligned}
$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right) y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right) y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right) y = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)}
\end{aligned}
$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right)^{(k)}
\end{aligned}
$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right)^{(k)} \\
&= P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right),
\end{aligned}
$$

a tedy platí (b). $\square$

Věta 10.19

Nechť λ*-matice* $\tilde{\mathbb{P}}$ *typu* $n \times n$ *vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z* λ*-matice* $\mathbb{P}$*.*

Věta 10.19

Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ typu $n \times n$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

Důkaz Věty 10.19

Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Důkaz Věty 10.19

Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).
Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = 0,$$
$$P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = 0.$$

Potom

$$(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n =$$

Potom

$$\left(P_{11} + P \cdot P_{21}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + \left(P_{1n} + P \cdot P_{2n}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n =$$
$$= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n$$

Potom

$$\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n
\end{aligned}$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n\right)
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n\right) \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)0 = 0.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n\right) \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)0 = 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Homogenní soustava $y' = \mathbb{A}y$ odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Homogenní soustava $y' = \mathbb{A}y$ odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{nn}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \end{aligned}$$

pak vyřešíme postupně od n-té rovnice k první.

Příklad

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

Příklad

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$
$$y_2' = -2y_1 - 2y_2$$

$$\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + \frac{1}{2} y_2' + y_2 = 0$$
$$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = 0$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$
$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$