# 6 Taylorův polynom

## 6.1 Základní vlastnosti

**Definice.** Nechť $f$ je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** $n$ **funkce** $f$ **v bodě** $a$.

**Lemma 6.1.** *Nechť $Q$ je polynom,* st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. *Pak $Q$ je nulový polynom.*

**Věta 6.2** (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a $P$ je polynom stupně nejvýše $n$. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

**Věta 6.3.** *Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že*

- *$f$ je funkce, která má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *$\varphi$ je spojitá funkce na $[a, x]$, která má v každém bodě intervalu $(a, x)$ vlastní nenulovou derivaci.*

*Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

**Věta 6.4** (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť $a, x, f$ jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

**Věta 6.5** (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť $a, x, f$ jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

Začátek letního semestru 2019-20

## 6.2 Symbol malé $o$

**Definice.** Nechť $f$ a $g$ jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^\star$. Řekneme, že funkce $f$ je v bodě $a$ **malé** $o$ **od** $g$ (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

**Věta 6.6.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \ \ a\ \ f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

*potom*

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \ \ a\ \ f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

*potom*

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)),\ x \to a.$$

(iii) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

*potom*

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

**Věta 6.7.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $f(y) = o(g(y))$*,* $y \to b$*,* $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$*,* $\delta > 0$*, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

*Potom* $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$*,* $x \to a$*.*

Konec 1. přednášky, 18. 2. 2020

# 7 Číselné řady

## 7.1 Základní pojmy

**Definice.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo $s_m$ nazveme $m$**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek $a_n$ budeme nazývat $n$**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Konec 2. přednášky, 21. 2. 2020

**Věta 7.1** (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

**Věta 7.2.**

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

(ii) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje.*

(iii) *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$$
$$\forall m \in \mathbf{N}, m > n\colon \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

## 7.2 Kritéria konvergence

**Věta 7.3** (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Konec 3. přednášky, 25. 2. 2020

**Věta 7.4** (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^{\star}$.

(i) *Nechť* $c \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) *Nechť* $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Věta 7.5** (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

*potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

(v) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Konec 4. přednášky, 28. 2. 2020

**Věta 7.6** (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

*potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

**Věta 7.7** (kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

**Věta 7.8.** *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

**Věta 7.9** (Leibniz)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní posloupnost, která konverguje k* $0$. *Pak řada řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Konec 5. přednášky, 3. 3. 2020

## 7.3 Absolutní konvergence

**Definice.** Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

**Věta 7.10.** *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

**Definice.** Nechť $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. **Přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

**Věta 7.11.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

**Věta 7.12** (Riemann). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. Pak pro libovolné $s \in \mathbf{R}^{\star}$ existuje bijekce $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.*

## 7.4 Součin řad

**Definice.** **Cauchyovým součinem** řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \Big).$$

**Věta 7.13** (Mertens). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \Big) = \Big( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big) \cdot \Big( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \Big).$$

Konec 6. přednášky, 6. 3. 2020

**Věta 7.14** (Abel). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \Big) = \Big( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big) \cdot \Big( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \Big).$$

## 7.5 Posloupnosti a řady s komplexními členy

**Definice.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z \in \mathbf{C}$. Řekneme, že posloupnost komplexních čísel **konverguje** k $z \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - z| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim a_n = z$.

**Definice.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo $s_m$ nazveme $m$**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek $a_n$ budeme nazývat $n$**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbf{C}$). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet komplexní číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

**Definice.** Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

**Věta 7.15.** *Je-li řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

**Definice.** **Komplexní exponenciální funkcí** rozumíme funkci $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definovanou předpisem

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbf{C}.$$

# 8 Primitivní funkce

## 8.1 Základní vlastnosti

**Definice.** Nechť funkce $f$ je definována na neprázdném otevřeném intervalu $I$. Řekneme, že funkce $F$ je **primitivní funkce k $f$ na** $I$, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Konec 7. přednášky, 10. 3. 2020

**Věta 8.1.** *Nechť $F$ a $G$ jsou primitivní funkce k funkci $f$ na otevřeném intervalu $I$. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

**Označení.** Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f$ označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak **integrálu** $\int$, **integrand** $f(x)$ a symbol $\mathrm{d}x$ označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

**Tabulkové integrály**

$\int x^n \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$; $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, $n < -1$

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ x \in (0,\infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x|,\ x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0,\infty)$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x,\ x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin x,\ x \in (-1,1)$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arccos x,\ x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arccotg} x,\ x \in \mathbf{R}$$

**Věta 8.2.** *Nechť $f$ je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu $I$. Pak $f$ má na $I$ primitivní funkci.*

**Věta 8.3.** *Nechť $f$ má na otevřeném intervalu I primitivní funkci $F$, funkce $g$ má na I primitivní funkci $G$ a $\alpha$, $\beta \in$ **R**. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na $I$.*

**Věta 8.4** (integrace per partes)**.** *Nechť $I$ je otevřený interval a $f$ je spojitá na $I$, $F$ je primitivní funkce k $f$ na $I$ a $G$ je primitivní funkce ke $g$ na $I$. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx, \quad x \in I.$$

**Věta 8.5** (Darboux)**.** *Nechť $f$ má na otevřeném intervalu $I$ primitivní funkci. Potom $f$ zobrazuje každý interval $J \subset I$ opět na interval.*

**Věta 8.6** (první věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$, $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

**Věta 8.7** (druhá věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $(a, b)$ a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

*Pak*

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Konec 8. přednášky, 16. 3. 2020

*Poznámka.* Chceme-li použít Větu 8.6 při výpočtu primitivní funkce k funkci $g$, je třeba nalézt funkce $f$ a $\varphi$ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci $\varphi$ a k ní pak určíme funkci $f$. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

*Poznámka.* V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce $f$ předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce $\varphi$ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz $t$ nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$ a výraz $\mathrm{d}t$ výrazem $(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x$. Integrand je potom hledanou funkcí $f$. Platí totiž

$$f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = g\big(\varphi^{-1}(\varphi(t))\big) \cdot (\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g(t),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.4).

*Poznámka.* Věta 8.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci.

Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce $e^{-x^2}$, důkaz však není snadný.

### 8.2 Integrace racionálních funkcí

**Definice. Racionální funkcí** budeme rozumět reálnou funkci, která je podílem dvou polynomů, přičemž polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

**Příklad.** Nechť $n \in \mathbf{N}$. Určete primitivní funkci k $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbf{R}$.

**Věta 8.8.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n$ s* ***reálnými*** *koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l$ taková, že*

- $$P(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l},$$
- *žádné dva z polynomů $x-x_1, \dots, x-x_k, x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen,*
- *polynomy $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

*Důkaz.* Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu $P$ s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu $P$ s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též čísla $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu $P$ s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x-z_1)^{q_1}(x-\overline{z_1})^{q_1} \cdots \\ \cdots (x-z_l)^{q_l}(x-\overline{z_l})^{q_l}.$$

Dále platí $(x-z_i)(x-\overline{z_i}) = x^2+(-z_i-\overline{z_i})x+z_i\overline{z_i}$. Obě čísla $-z_i-\overline{z_i}$, $z_i\overline{z_i}$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i-\overline{z_i}$ a $\beta_i = z_i\overline{z_i}$. □

**Věta 8.9** (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť $P$, $Q$ jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a nechť*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

*je rozklad polynomu $Q$ z Věty 8.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, $B_1^1$, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots, B_1^l$, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí*

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots \\
& \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
& \quad + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\
& \quad + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}, \\
& x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}.
\end{aligned}
$$

Bez důkazu.

**Integrace racionální funkce**

Mějme polynomy $P$ a $Q$. V případě, že stupeň $P$ je větší nebo roven stupni $Q$, vydělíme polynom $P$ polynomem $Q$ a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde $R$, $Z$ jsou polynomy a stupeň $Z$ je menší než stupeň $Q$. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu $R$. Pokud je polynom $Z$ nenulový, nebo $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci $Z/Q$, resp. $P/Q$, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

**Integrace parciálního zlomku prvního typu**

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

**Integrace parciálního zlomku druhého typu**

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$ a polynom $x^2+\alpha x+\beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x = {} & \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x + \\
& + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Integrály $I_1$ a $I_2$ lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbf{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\left((x+\alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4\right)^q} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si již ukázali.

Konec 9. přednášky, 19. 3. 2020

**Příklad.** Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x - 3)}.$$

Nejprve určíme definiční obor funkce $f$. Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce $f$ je spojitá na celém $D_f$. Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$.

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci $f$ rozložit na $D_f$ na parciální zlomky.

$$\begin{aligned} &\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x+3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$\begin{aligned} x = {} &(Ax+B)(x^2+2x+2)(x-1)(x+3) + \\ &+ (Cx+D)(x-1)(x+3) + \\ &+ E(x^2+2x+2)^2(x+3) + F(x^2+2x+2)^2(x-1), \end{aligned} \tag{2}$$

který platí pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na $\mathbf{R}$, a proto výše uvedený vztah (2) platí pro každé $x \in \mathbf{R}$.

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin $x$ na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$x^5\colon\ 0 = A + E + F,$$

$$\begin{aligned} x^4\colon\ 0 &= 4A + B + 7E + 3F, \\ x^3\colon\ 0 &= 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\ x^2\colon\ 0 &= -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\ x^1\colon\ 1 &= -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\ x^0\colon\ 0 &= -6B - 3D + 12E - 4F. \end{aligned}$$

b) Dosadíme do (2) šest různých čísel za $x$ a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají $0$ (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla $-3$ a $1$).

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů $1$ a $-3$ do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (1), který má tedy tvar

$$\begin{aligned} f(x) = &-\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &+ \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x + 3}. \end{aligned}$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1), \ x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{\big((x + 1)^2 + 1\big)^2} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1),\ x \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x-1|,\ x \in (-\infty,1) \text{ a } x \in (1,\infty),$$
$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x+3|,\ x \in (-\infty,-3) \text{ a } x \in (-3,\infty).$$

Na každém z intervalů $(-\infty,-3)$, $(-3,1)$ a $(1,\infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci $f$ kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2) + \frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \\ + \frac{1}{100}\log|x-1| + \frac{3}{100}\log|x+3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbf{R}.$$

### 8.3 Trigonometrické substituce

**Definice.** **Polynomem dvou proměnných** rozumíme funkci

$$[u,v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pro $i,j \in \{0,\dots,n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

**Definice.** Řekneme, že $R$ je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x,y) = -R(x,y)$. Analogicky definujeme **lichá v druhé proměnné**. Funkce $R$ je **sudá**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,-y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x,y) = R(-x,-y)$.

Nechť $R$ je racionální funkce dvou proměnných a $I$ je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I,$$

přičemž integrand je definován na intervalu $I$. Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li $R$ lichá ve druhé proměnné, lze užít substituci $\sin t = x$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 8.6 pro funkci $\varphi\colon I \to \mathbf{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci $f$ lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné.

(b) Je-li $R$ lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li $R$ sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

**Příklad.** Spočtěte
$$\int \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\,\mathrm{d}t,\ \ t \in \mathbf{R}.$$

Označme integrand jako $g$. Funkce $g$ je spojitá na $\mathbf{R}$, má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označme
$$R(u,v) = \frac{uv}{u^4+v^4}.$$
Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že $R$ je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv z trigonometrických substitucí.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Při určení $\mathrm{d}x$ jsme použili rovnost $t = 2\operatorname{arctg} x$.

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{x(1-x^2)(1+x^2)}{16x^4+(1-x^2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $t \in (-\pi,\pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci $g$ upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1-\sin^2 t)^2}\cdot\cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4-2x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2-4u+2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2+1}\,\mathrm{d}u \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2u-1),$$

kde $u \in \mathbf{R}$. Dostáváme tedy

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin^2 t - 1),\ t \in \mathbf{R}.$$

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2,\ x \in \mathbf{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My však víme, že funkce $f$ má primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$ (je totiž na $\mathbf{R}$ spojitá).

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém $D_f$. Obdobná situace je při užití substituce $x = \operatorname{tg}(t/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí. Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu.

Konec 10. přednášky, 23. 3. 2020

**Příklad.** Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt.$

**Řešení**

Integrand, který označíme $g$, je spojitá funkce na celém $\mathbf{R}$, a má tedy na $\mathbf{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u,v) = \frac{1}{1+u^2},$$

potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a $R$ je sudá. Lze tedy užít substituci $x = \operatorname{tg} t$ pro $t \in \big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t),\ t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)$, je funkce $F$ primitivní ke $g$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$. Každá primitivní funkce $G$ ke $g$ na $\mathbf{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $c_k \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta. Protože $G$ je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+k\pi-} G(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}+k\pi+} G(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Každá primitivní funkce k $f$ má tedy tvar

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

### 8.4 Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)\,\mathrm{d}t$

Při integraci funkce $R\left(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$, kde $q \in \mathbf{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

**Příklad.** Spočtěte

$$\int \frac{t-1}{t\left(\sqrt{t}+\sqrt[3]{t^2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Integrand, který označíme $g$, je na $\mathcal{D}(g) = (0,\infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci.

V předpisu funkce $g$ se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$. Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $x = t^{1/6}$, $t \in (0,\infty)$. Odtud odvodíme $\mathrm{d}x = \frac{1}{6}t^{-5/6}\,\mathrm{d}t$, a tedy $\mathrm{d}t = 6x^5\,\mathrm{d}x$. Na intervalu $(0,\infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{x^6-1}{x^6(x^3+x^4)} \cdot 6x^5\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{x^6-1}{x^5+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$(x^6-1):(x^5+x^4) = x - 1 + \frac{x^4-1}{x^4(x+1)}$$

$$= x - 1 + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4(x+1)}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

Nyní již můžeme integrovat

$$6\int \frac{x^6-1}{x^5+x^4}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} 3x^2 - 6x + 6\log x + 6\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3},\ x \in (0,\infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí ke $g$ na $(0,\infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{t} - 6\sqrt[6]{t} + \log t + 6\frac{1}{\sqrt[6]{t}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + 2\frac{1}{\sqrt{t}} + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Konec 11. přednášky, 25. 3. 2020

**Integrály typu $\int R\big(t, \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,\mathbf{d}t$**

Také integraci funkce $R\big(t, \sqrt{at^2+bt+c}\big)$, kde $R$ je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ a $I$ je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R\big(t, \sqrt{at^2+bt+c}\big).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že $q$ má dvojnásobný reálný kořen $\alpha$. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.

Interval $I$ je neprázdný, a proto $a > 0$.

Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a $g$ je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty,\alpha)\cap I$, $I_2 = (\alpha,\infty)\cap I$ funkcí racionální. Potom na $I_1$ a $I_2$ můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na $I$ obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci $F_1$ na intervalu $I_1$ a řešení $F_2$ na intervalu $I_2$. Potom slepíme $F_1$ a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na $I$, která bude primitivní ke $g$ na $I$.

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom $q$ nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2+bt+c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at+b}{2\sqrt{at^2+bt+c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$.

Funkce $\varphi$ je tedy na $I$ ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k $\varphi$ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce $\varphi^{-1}$. Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x - b)^2}$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud $G$ značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke $g$.

Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má $q$ dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor $g$ prázdný. Označme kořeny $q$ jako $\alpha_1$ a $\alpha_2$, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci $g$ lze na intervalu $I$, který je podmnožinou $(\alpha_1, \alpha_2)$ psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

**Příklad.** Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}}\,\mathrm{d}t.$

**Řešení**

Integrand označíme $g$. Funkce $g$ je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém $\mathbf{R}$, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné $x$ výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x-2)(2x-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{c}{=} x + 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|2x-1|
\end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 8.6 má tedy primitivní funkce k funkci $g$ na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\begin{aligned}
&\sqrt{t^2+t+1} - t + 2\log|\sqrt{t^2+t+1} - t - 2| \\
&\qquad - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{t^2+t+1} - 2t - 1| + c, \quad c \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Konec 12. přednášky, 30. 3. 2020

**Definice.** Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\bigl\{x_j - x_{j-1};\ j \in \{1, \ldots, n\}\bigr\}.$$

Řekneme, že dělení $D'$ intervalu $[a,b]$ je **zjemněním dělení** $D$ intervalu $[a,b]$, jestliže každý dělící bod $D$ je i dělícím bodem $D'$.

**Definice.** Nechť $f$ je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

**Definice.**

- Řekneme, že omezená funkce $f$ na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** $a$ **do** $b$, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu $f$ od $a$ do $b$ je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť $D$ je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce $D$ tedy neexistuje.

(c) Platí $\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

**Definice.** Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od $a$ do $b$, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

*Poznámka.* Nechť $M_1, M_2 \subset \mathbf{R}$, $M_1 \subset M_2$. Nechť $f$ je funkce definovaná alespoň na $M_2$. Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

**Lemma 9.1.** *Nechť $f$ je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.*

(a) *Nechť $D$, $D'$ jsou dělení $[a, b]$ a $D'$ zjemňuje $D$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(b) *Nechť $D_1$, $D_2$ jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) *Platí* $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

**Důkaz (a)**

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a $D'$ obsahuje oproti $D$ právě jeden bod navíc, řekněme $z$ ležící mezi body $x_{j-1}$ a $x_j$ pro nějaké $j \in \{1, \ldots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) =& \big(\inf_{[x_{j-1},z]} f\big)(z - x_{j-1}) + \big(\inf_{[z,x_j]} f\big)(x_j - z) \\ & - \big(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\big)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

**Důkaz (a) - pokračování**

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy $D'$ obsahuje oproti $D$ jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

**Důkaz (b)**

Máme-li dána dělení $D$ a $D'$, snadno najdeme dělení $D''$ zjemňující $D$ i $D'$. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

**Důkaz (c)**

Je-li $D$ dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden.

**Důsledek 9.2.** *Nechť $f$ je omezená na $[a, b]$, $D_1$ a $D_2$ jsou dělení intervalu $[a, b]$. Potom*

$$m(b - a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b - a),$$

*kde $m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}$.*

**Důkaz**

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D''$ obsahující body $a, b$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Lemmatu 9.1(b).

Konec 13. přednášky, 1. 4. 2020

**Věta 9.3.** *Nechť $f$ je omezená na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

**Důkaz Věty 9.3**

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce $f$ je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] \colon |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\left\{\mu(D_0), \tfrac{\varepsilon}{4Kn}\right\}.$$

Nechť nyní $D$ je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení $P$ sestávající ze všech dělicích bodů $D_0$ a $D$ a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů $D_0$. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení $D$ a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení $P$. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu $I$. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|.$$

Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.

Není-li $I$ v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu $X$. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f,P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha)-\Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta-\alpha)+K(x_i-\alpha+\beta-x_i)=2K(\beta-\alpha)\leq 2K\nu(D).$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ právě uvedeného typu nejvýše $n-1$, máme

$$\overline{S}(f,D)-\overline{S}(f,P)<2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (1).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě $\delta_1$ nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\leq\overline{S}(f,D)\leq\overline{S}(f,P)+2Kn\nu(D)$$

$$\leq\overline{S}(f,D_0)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x+2\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy $\delta_1$ splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2\in\mathbf{R}$, $\delta_2>0$, takové, že pro každé dělení $D$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D)<\delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\underline{S}(f,D)\geq\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov.

**Důsledek 9.4.** *Nechť $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, a $f$ je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim\nu(D_n)=0$. Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)\quad a\quad\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,D_n).$$

**Důkaz Důsledku 9.4**

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon>0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta>0$ takové, že pro každé dělení $D$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D)<\delta$ platí

$$\overline{S}(f,D)<\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x+\varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.

Konec 14. přednášky, 6. 4. 2020

**Příklad.** Spočtěte $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

**Řešení**

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^n$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^n \big(\frac{j}{n}\big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

**Věta 9.5** (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je omezená funkce na $[a,b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

*(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,*

*(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D$ intervalu $[a,b]$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení $D_1, D_2$ intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $D$ je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující $D_1$ i $D_2$. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &\leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \\ &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení $D$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

**Definice.** Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a $f$ je funkce definovaná alespoň na $I$. Řekneme, že $f$ je **stejnoměrně spojitá** na $I$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x, y \in I\colon \\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

**Poznámka**

stejnoměrná spojitost na $I$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na $I$

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce $f$ na intervalu $I$ stejnoměrně spojitá, pak je na $I$ spojitá.

Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro $\varepsilon$. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce $f$ je proto spojitá v bodě $x_0$, respektive je spojitá zleva či zprava v $x_0$ v závislosti na poloze $x_0$ v $I$.

**Příklad.** Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Pak je $f$ spojitá na $I$, ale není stejnoměrně spojitá na $I$.

**Řešení**

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejnoměrné spojitosti.

**Věta 9.6.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

**Důkaz Věty 9.6**

Nechť $f$ není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k $x$.

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pravá strana nerovnosti konverguje k nule, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Ale $\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, což je spor.

**Věta 9.7.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

**Důkaz věty 9.7**

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce $f$ je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6). Nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$.

Pak pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \Big( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Věta 9.5 tedy říká, že $f$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

**Věta 9.8.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

**Důkaz Věty 9.8**

Předpokládejme nejprve, že $f$ je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon\ f(a) \le f(x) \le f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$.

Pak platí

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle Věty 9.5 tedy platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

**Věta 9.9** (linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.9**

Funkce $f$ a $g$ jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a,b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f+g$ je omezená na $[a,b]$.

Je-li $I \subset [a,b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \le \inf_I (f+g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení $D$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\underline{S}(f,D) + \underline{S}(g,D) \le \underline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f,D) + \overline{S}(g,D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$, jejichž norma konverguje k $0$. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f,D_n)+\overline{S}(g,D_n)\big)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\big(\underline{S}(f,D_n)+\underline{S}(g,D_n)\big)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f+g,D_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f+g,D_n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 plyne $f+g\in\mathcal{R}([a,b])$ a

$$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f\in\mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha\geq 0$. Funkce $\alpha f$ je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I\subset[a,b]$ platí

$$\sup_I\alpha f=\alpha\sup_I f\quad\text{a}\quad\inf_I\alpha f=\alpha\inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim\nu(D_n)=0$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(\alpha f,D_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha\overline{S}(f,D_n)=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(\alpha f,D_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha\underline{S}(f,D_n)=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 tedy plyne $\alpha f\in\mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha=-1$. Pro každý interval $I\subset[a,b]$ platí

$$\sup_I(-f)=-\inf_I f\quad\text{a}\quad\inf_I(-f)=-\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ splňující $\lim\nu(D_n)=0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(-f,D_n)=\lim_{n\to\infty}-\underline{S}(f,D_n)=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(-f,D_n)=\lim_{n\to\infty}-\overline{S}(f,D_n)=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f\in\mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Věta 9.10** (Riemannův integrál a uspořádání)**.** *Nechť $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, a $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ a $f(x)\leq g(x)$ pro každé $x\in[a,b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.10**

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 9.11** (aditivita Riemannova integrálu). *Nechť* $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* $f$ *je funkce definovaná na* $[a,b]$. *Pak platí* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *právě když* $f \in \mathcal{R}([a,c])$ *a* $f \in \mathcal{R}([c,b])$. *Je-li* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.11**

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a,c]$, respektive $[c,b]$, přičemž jejich normy konvergují k $0$. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení $D_n^1$ a $D_n^2$. Pak platí $\lim \nu(D_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že $f$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,c]$ i na intervalu $[c,b]$. Funkce $f$ je tedy omezená na intervalu $[a,c]$ i na intervalu $[c,b]$, takže je omezená i na intervalu $[a,b]$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ pak platí

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dle Důsledku 9.4 platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a také dokazovaná rovnost.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce $f$ je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce $f$ pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\le \big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) + \big(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\big) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n). \end{aligned}$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty} \big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost $f$ na $[a, c]$. Integrovatelnost $f$ na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost za znění věty plyne z první části důkazu.

*Poznámka.* Pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 9.11 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

**Věta 9.12.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

**Důkaz věty 9.12**

Funkce $f$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \le \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \ge \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\le |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \\ &\le |f(x) - f(y)| + 2\eta \le \sup_I f - \inf_I f + 2\eta. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost ověřena.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci $f$ a nalezneme dělení $D$ intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 je tedy $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Zbývá odvodit příslušnou nerovnost.

Pro každé dělení $D'$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

□

**Věta 9.13** (derivace funkce horní meze)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a $f$ je funkce definovaná na $J$ splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a,b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci $F$ na $J$ předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

*Potom platí:*

*(a) $F$ je spojitá na $J$,*

*(b) jestliže $x_0$ je vnitřním bodem intervalu $J$ a funkce $f$ je spojitá v $x_0$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

**Důkaz Věty 9.13**

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod $J$.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_0+} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0+\delta] \subset J$. Protože je $f$ riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0+\delta]$, je $f$ na tomto intervalu omezená. Nechť $K$ je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0+\delta] \colon |f(x)| \le K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0+\delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\le \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y-y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to {y_0}_+} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to {y_0}_+} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech $J$, které nejsou levým krajním bodem $J$, lze dokázat obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti $f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\Big| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \Big| = \Big| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t - f(x_0) \Big|.$$

Platí $\int_{x_0}^{x} f(x_0) \, \mathrm{d}t = f(x_0) \cdot (x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$.

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\begin{aligned} \Big| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \Big| &= \Big| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0) \, \mathrm{d}t \Big| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \Big| \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0)) \, \mathrm{d}t \Big| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \Big| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| \, \mathrm{d}t \Big| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} | \int_{x_0}^{x} \varepsilon \, \mathrm{d}t | = \varepsilon. \end{aligned}$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| \, \mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. $\square$

**Důsledek 9.14.**

*(a) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a $f$ je spojitá funkce na intervalu $(a, b)$. Potom $f$ má na $(a, b)$ primitivní funkci.*

*(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a $f$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na $(a, b)$. Potom existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ a platí*

$$\int_{a}^{b} f(t) \, dt = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

**Důkaz Důsledku 9.14**

(a) Zvolme $c \in (a,b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a,b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce $f$ riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, a proto je $F$ dobře definovaná funkce. Věta 9.13 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na $(a,b)$, tj. $F$ je primitivní k $f$.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1,a], \\ f(t), & t \in (a,b), \\ f(b), & t \in [b,b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1,b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1,b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1,b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci $f$, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

**Věta 9.15.** *Nechť $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}([a,b])$.Jestliže $g$ je funkce definovaná alespoň na $[a,b]$, která se v intervalu $[a,b]$ liší od $f$ v konečném počtu bodů, potom $g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

**Důkaz Věty 9.15**

Funkce $f$ je omezená, a proto je omezená i funkce $g$. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le K$ a $|g(x)| \le K$. Označme $J = \{x \in [a,b];\ f(x) \ne g(x)\}$. Množina $J$ je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme $m$ počet prvků množiny $J$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s $J$. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z $J$ je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$.

Potom platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I| \\ &= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|,\end{aligned}$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$.

Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned}|\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D)| &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot |I| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot \nu(D) \\ &\leq 2m \cdot 2K \cdot \nu(D) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f, D) - \underline{S}(g, D)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - 2\varepsilon &< \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D) \\ &< \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $g$ je na intervalu $[a, b]$ riemannovsky intergrovatelná a $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

**Věta 9.16.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

*(i) Funkce $f$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.*

*(ii) Existuje $I \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

**Důkaz Věty 9.16**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost $f$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon = 1$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

$$K = \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t, & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a).$$

Tedy platí
$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}\big(1 + |I| + K(b-a)\big)$$
a $f$ je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že
$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme
$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$
Obdobně odvodíme
$$\underline{S}(f,D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$
Tedy dostáváme
$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < 2(1+b-a)\varepsilon.$$
Tedy $f$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. □

*Poznámka.* Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) ⇒ (i), že pro kladné $\varepsilon$ existuje kladné $\delta$ takové, že pro libovolné dělení $D$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí
$$\overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$
Tedy
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$
Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

*Poznámka.* Podmínka (ii) Věty 9.16 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

**Definice.** Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $f$ je funkce definovaná na intervalu $(a,b)$. Řekneme, že funkce $f$ má na intervalu $(a,b)$ **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce $f$ na intervalu $(a,b)$ existuje, jestliže

- $f$ má na $(a,b)$ primitivní funkci $F$,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),

- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbf{R}^\star$.

**Definice.** Hodnotou Newtonova integrálu z funkce $f$ na intervalu $(a, b)$ nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce $f$ na intervalu $(a, b)$ **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

**Označení.** Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce $f$ na intervalu s krajními body $a$ a $b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $(a, b)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

**Označení.** Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu $(a, b)$ konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce $F$ je definovaná na $(a, b)$ a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

**Příklad.** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

**Příklad.** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$.

Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

*Poznámka.* (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá $f$ primitivní funkci.

*Poznámka.* Nechť $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

**Věta 9.17** (linearita Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a $\alpha \in \mathbf{R}$ Newtonův integrál funkcí $f,g$ existuje na $(a,b)$. Pak*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$

*pokud je výraz napravo definován. Dále platí*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

*pokud je výraz napravo definován.*

**Důkaz Věty 9.17**

Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$ a $G$ je primitivní funkce ke $g$ na $(a,b)$. Pak je $F+G$ primitivní k $f+g$ a díky aritmetice limit máme $[F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = [F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud je výraz $\alpha[F]_a^b$ definován. □

**Věta 9.18** (Newtonův integrál a uspořádání)**.** *Nechť $a,b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a Newtonův integrál funkcí $f,g$ existuje na $(a,b)$. Nechť platí $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.18**

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$ a $G$ je primitivní funkce ke $g$ na $(a,b)$. Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na $(a,b)$. Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

**Věta 9.19** (aditivita Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b,c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.*

*(a) Jestliže existuje Newtonův integrál funkce $f$ na intervalu $(a,b)$, potom existují integrály funkce $f$ na intervalech $(a,c)$ a $(c,b)$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

*(b) Jestliže existují Newtonovy integrály funkce $f$ na intervalech $(a,c)$ a $(c,b)$ a $f$ je spojitá v $c$, pak platí (2), pokud má pravá strana smysl.*

**Důkaz Věty 9.19**

(a) Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na intervalu $(a,b)$. Pak je $F$ primitivní k $f$ i na intervalech $(a,c)$ a $(c,b)$. Navíc má funkce $F$ v bodě $c$, jakožto spojitá funkce na $(a,b)$, vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

(b) Nechť $F$ je primitivní k $f$ na $(a,c)$ a $G$ je primitivní k $f$ na $(c,b)$. Funkce $f$ je spojitá v bodě $c$, a proto je omezená na jistém okolí bodu $c$. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c-\delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c-\delta, c)$ platí

$$\begin{aligned} -K(x-c+\delta) &= \int_{c-\delta}^x (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{c-\delta}^x K\,\mathrm{d}t = K(x-c+\delta). \end{aligned}$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c-\delta)$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$, neboť $F$ je spojitá na $(a, c)$.

Limita $\lim_{x\to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x\to c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci $G$ můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x\to c_-} F(x) = \lim_{x\to c_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je $H$ spojitá na $(a, b)$ a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě $c$ toto platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

neboť $f$ je spojitá v $c$. Funkce $H$ je tedy primitivní k $f$ na $(a, b)$. Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$.

Odtud plyne, že výraz $\lim_{x\to b-} H(x) - \lim_{x\to a+} H(x)$ je definován. □

**Věta 9.20.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a $f$ má Newtonův integrál na intervalu $(a, b)$ a $f$ je spojitá na $(a, b)$. Pak $\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.20**

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji $F$. Protože $|f| \ge 0$, je $F$ neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu $(a, b)$, přičemž $\lim_{x\to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x\to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu $(a, b)$. Jelikož platí $-f \le |f|$ i $f \le |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

□

*Poznámka.* Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $F$ a $G$ jsou funkce definované na $(a, b)$ a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

**Věta 9.21** (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $f$ a $g$ jsou funkce definované na $(a, b)$. Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na $(a, b)$ a $G$ je primitivní funkce k funkci $g$ na $(a, b)$. Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

*jestliže má pravá strana smysl.*

**Důkaz Věty 9.21**

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci $fG$ na $(a, b)$. Označme ji písmenem $H$. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci $gF$. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

$$= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

**Věta 9.22** (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $f$ je funkce definovaná na $(a, b)$ a $\varphi$ je funkce definovaná na $(\alpha, \beta)$. Nechť $\varphi$ má vlastní nenulovou derivaci na $(\alpha, \beta)$ a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

*jestliže má alespoň jedna strana smysl.*

**Důkaz Věty 9.22**

Funkce $\varphi$ má na intervalu $(\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Z Darbouxovy vlastnosti derivace, že funkce $\varphi'$ nemění na $(\alpha, \beta)$ znaménko. Předpokládejme, že $\varphi'$ je záporná na $(\alpha, \beta)$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má $f$ na $(a, b)$ primitivní funkci $F$ a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu $(\alpha, \beta)$ primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \to \beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to \alpha_+} \varphi(t) = b$$

a

$$\lim_{t \to \alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to b_-} F(x), \quad \lim_{t \to \beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$

$$= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme $G$ primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k $f$. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t), \quad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

**Věta 9.23** (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť $a\in\mathbf{R}^\star$, $\delta_0>0$, a funkce $F$ je definována alespoň na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a}F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in P(a,\delta)\colon |F(x)-F(y)|<\varepsilon.$$

**Důkaz Věty 9.23**

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a}F(x)=A$ a $A\in\mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon>0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta\in\mathbf{R}$ kladné, že

$$\forall x\in P(a,\delta)\colon |F(x)-A|<\varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x,y\in P(a,\delta)$ máme

$$|F(x)-F(y)|\le|F(x)-A|+|A-F(y)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce $F$ definovaná na prstencovém okolí $P(a,\delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a,\delta_0)$ taková, že $\lim x_n=a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$, nechť kladné $\delta\in\mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K $\delta$ nalezneme $n_0\in\mathbf{N}$ takové, že pro $n\in\mathbf{N}$, $n\ge n_0$, platí $|x_n-a|<\delta$. Pak pro $n,m\in\mathbf{N}$, $n,m\ge n_0$, platí

$$|F(x_n)-F(x_m)|<\varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$. Pak $\lim_{x\to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k $a$. Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1 \in \mathbf{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \colon x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x\to a} F(x) = A$. □

*Poznámka.* Tvrzení Věty 9.23 platí obdobně i pro jednostranné limity.

**Věta 9.24.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f$ *je omezená spojitá funkce na* $(a, b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

**Důkaz Věty 9.24**

Funkce $f$ má na $(a, b)$ primitivní funkci $F$. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity $F$ v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x\to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23.

Existence vlastní limity v $b$ zleva se dokáže obdobně.

□

*Poznámka.* Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, je na intervalu $\mathbf{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

**Věta 9.25** (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f$ *má Riemannův integrál na* $[a, b]$ *a Newtonův integrál na* $(a, b)$. *Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Důkaz Věty 9.25**

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce $f$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než $\delta$ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon.$$

Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než $\delta$.

Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$. Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x\to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x\to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že $H$ je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na $(a, b)$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n \big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}&\Big|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &= \Big|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

**Důsledek 9.26.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f$ je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Věta 9.28** (srovnávací kritérium). *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ a $a < b$. Nechť funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť dále je $f$ spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

**Důkaz Věty 9.28**

Zvolme $c \in (a,b)$ a označme $G$ a $F$ primitivní funkce ke $g$ a k $f$. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G-F$ má na $(c,b)$ nezápornou derivaci $g-f$, tedy je na $(c,b)$ neklesající. Protože $(G-F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na $(c,b)$. Dále jsou obě funkce $G, F$ neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v $b$ limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a,b)$, je poslední limita vlastní. Protože je $F$ neklesající, je i $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v $c$, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c,b)$. Protože $f$ je spojitá na $[a,c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a,c)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$. $\square$

*Poznámka.* Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbf{R}^\star$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce $f, g\colon (a,b] \to \mathbf{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a,b]$, $f$ je spojitá na $(a,b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

**Příklad.** Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

**Řešení**

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$, je podle Věty 9.28 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Pak dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$.

**Věta 9.29** (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $f, g$ jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.*

**Důkaz Věty 9.29**

Označme $c = \lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Nalezneme $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b)\colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0,b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$. Protože $g$ je spojitá na omezeném intervalu $[a,x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Potom $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu $(x_0,b)$. $\square$

*Poznámka.* Pokud $c = 0$, pak platí implikace $g \in \mathcal{N}(a,b) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a,b)$. Pokud $c = \infty$, pak platí implikace $f \in \mathcal{N}(a,b) \Rightarrow g \in \mathcal{N}(a,b)$.

**Příklad.** Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

**Řešení**

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2.$$

Podle Věty 9.29 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

**Lemma 9.30.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f$ je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g \colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom*

$$g(a) \inf_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t)\, dt \le \int_a^b f(t) g(t)\, dt \le g(a) \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t)\, dt.$$

*Speciálně platí*

$$\left| \int_a^b f(t) g(t)\, dt \right| \le g(a) \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x f(t)\, dt \right|.$$

**Důkaz Lemmatu 9.30**

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí $f$ a $fg$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x, y \in [a, b] \colon |x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$(|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \wedge \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než $\delta$. Pak máme pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] \colon f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]} F(t)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})\right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a)\sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Jelikož $\varepsilon$ bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně.

□

**Věta 9.31** (první věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$ *a nechť* $a < b$. *Nechť* $f$ *je spojitá funkce na* $[a, b]$, $g$ *je nezáporná na* $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. *Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Důkaz věty 9.31**

Funkce $f$, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima $m$ a maxima $M$. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{3}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod $c$ můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (3) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

$\square$

**Věta 9.32** (druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $f$ *je spojitá funkce na* $[a, b]$*,* $g$ *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$*. Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

**Důkaz Věty 9.32**

Předpokládejme opět, že $g$ je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod $c$ pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové $c$ vyhovuje i (4).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci $\varphi$ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b))\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce $\varphi$ spojitá na $[a, b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y\in[a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \psi(a)\sup_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[a,b]}\left((g(a)-g(b))\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \varphi(y_1).$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.30

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce $\varphi$ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a,b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

**Definice.** **Křivkou** budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$). Křivkou **třídy** $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ takovou, že $\varphi_i'$ je spojité na $[a,b]$, $i = 1,\dots,n$, přičemž v krajních bodech $[a,b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

**Definice.** Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** $\varphi$ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi,D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$L(\varphi,D) = \sum_{j=1}^k \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}),\varphi(x_j)).$$

**Lemma 9.33.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. Potom platí*

$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

*kde*

$$\int_a^b f = \Big[ \int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \Big].$$

*a*

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

**Důkaz Lemmatu 9.33**

Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ je konvergentní. Položme

$$y = \Big[ \int_a^b f_1(t) \,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t) \,\mathrm{d}t \Big].$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big( \sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \Big) \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big( \sum_{i=1}^n y_i^2 \Big) \Big( \sum_{i=1}^n f_i^2(t) \Big)} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\| \|f(t)\| \,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak právě provedený výpočet opět dává dokazovanou nerovnost. $\square$

**Věta 9.34.** *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2} \, dt.$$

**Důkaz Věty 9.34**

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^k \Big\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \Big\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou $\varphi_i'$ stejnoměrně spojité na $[a,b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a,b], |s-t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

$$\leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože $\varepsilon$ bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \leq L(\varphi)$. □

**Příklad.** (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Je-li $f$ spojitě diferencovatelná funkce na $[a,b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a,b]$, dává, že délka grafu funkce $f$ je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, \mathrm{d}t$.

**Věta 9.35** (objem a povrch rotačního tělesa)**.** *Nechť $f$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a,b]$, $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Označme*

$$T = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a,b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

*Pak*

$$\textit{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

*Je-li navíc $f'$ spojitá na $[a,b]$, pak*

$$\textit{Povrch pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

**Věta 9.36** (integrální kritérium)**.** *Nechť $f$ je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0,\infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.*

**Důkaz Věty 9.36**

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0,n_1]$. Funkce $f$ je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f,D) = a_{n_0} + \cdots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

$$\underline{S}(f,D) = a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože je $f$ spojitá na $[n_0,n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f,D) \leq (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0,\infty)$$

primitivní k $f$ na $(n_0,\infty)$, a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \\ = \lim_{x\to\infty} F(x).\end{aligned}$$

Protože je $f$ nezáporná, je $F$ neklesající. Tedy limita $F$ v nekonečnu existuje a je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. □

**Příklad.** Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverguje.

**Řešení**

Položme $f(x) = \frac{1}{x\log x}$, $x \in [2,\infty)$. Pak $f$ je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2,\infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje.

**Věta 9.37** (tvar zbytku v integrálním tvaru)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, a funkce $f$ má v každém bodě intervalu $[a,x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Pak*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{5}$$

**Důkaz Věty 9.37**

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy vztah pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci $f$ na intervalu $[a,x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a,x]$, a proto můžeme pomocí per partes počítat

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}
$$

□

# 10 Diferenciální rovnice

## 10.1 Základní pojmy

$$y' = f$$

**Fyzika**

Volný pád bez odporu vzduchu:

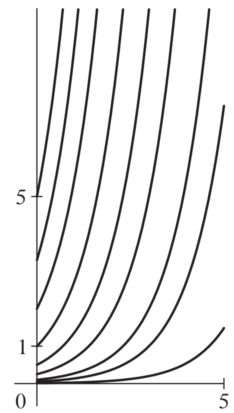
$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$
$$mv' = mg - bv^2$$

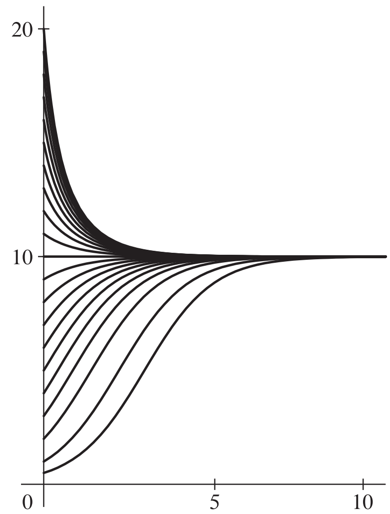
**Demografie**

Malthusův populační model $p' = ap$




**Biologie**

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$




**Biologie**

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevnící – chudoblanní
$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, b = a/375$

**Ekonomie**

$Q_d \dots$ poptávka
$Q_s \dots$ nabídka
$P \quad \dots$ cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$
$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$
$Q_d = Q_s$

**Definice.** **Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde $F$ je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

$$y'' - y = \sin x$$

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 - z_3 - \sin z_4$$

**Definice.**

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci $y$ definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu $I$, která má v každém bodě intervalu $I$ vlastní $n$-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu $I$, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení $y$ diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení $z$, pro které $D_y \subsetneqq D_z$ a které se na $D_y$ shoduje s $y$.

- Všechna maximální řešení.

- Existence a jednoznačnost řešení.

- Limitní chování a stabilita řešení.

## 10.2 Rovnice se separovanými proměnnými

**Definice.** **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{2}$$

**Metoda řešení pro spojité $g$ a $h$**

**1.** Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce $h$.

**2.** Najdeme všechny nulové body funkce $g$. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

**3.** Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce $g$ nenulová.

**4.** Vezmeme interval $I$ z 1. kroku a interval $J$ z 3. kroku. Tedy $h$ je na $I$ spojitá a $g$ je spojitá a nenulová na $J$. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu $I$ a mají hodnoty v intervalu $J$. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť $H$ je primitivní funkce k $h$ na intervalu $I$ a $G$ je primitivní funkce k funkci $1/g$ na $J$. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení $y$, který nalezneme v následujícím kroku.

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu $L$ vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x) + c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x) + c))} \cdot h(x)$$

$$= g(G^{-1}(H(x) + c)) \cdot h(x) = g(y(x)) \cdot h(x).$$

**5.** Nyní zafixujeme $c$ a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde $G^{-1}$ značí funkci inverzní k funkci $G$. Ta existuje, neboť $G$ je na intervalu $J$ buď rostoucí nebo klesající.

**6.** Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť $y_1$ a $y_2$ jsou řešení rovnice (2), první na intervalu $(a, b)$ a druhé na intervalu $(b, c)$, přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a,b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b,c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) na intervalu $(a,c)$.

## 10.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde $p, q$ jsou spojité funkce na daném intervalu $(a,b)$, $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

$$y \mapsto y' + py$$

$$\mathcal{C}^1(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$$

**Věta 10.1.** *Maximální řešení rovnice* (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$, *kde* $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, *má tvar*

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\Big)e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b), \tag{5}$$

*kde* $P$ *je primitivní funkce k* $p$ *na* $(a,b)$ *splňující* $P(x_0) = 0$.

**Důkaz Věty 10.1**

Ukažme nejprve, že $y$ řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Ukážeme, že maximální řešení (4) musí mít tvar (5).

Maximální řešení homogenní rovnice $y' + py = 0$ mají tvar

$$y(x) = k \cdot e^{-P(x)}, \qquad x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{R}.$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde $k$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na $(a, b)$.

$$y' = -py + q$$

$$\begin{gathered} y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) \\ y'(x) + p(x)y(x) \\ = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)} \\ = k'(x)e^{-P(x)} = q(x) \\ k'(x) = e^{P(x)}q(x) \end{gathered}$$

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$\begin{gathered} k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t + c \\ y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big)e^{-P(x)} + ce^{-P(x)} \end{gathered}$$

Platí $y(x_0) = y_0$, a tedy $c = y_0$. □

## 10.4 Lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t), \tag{6}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a $f$ je funkce spojitá na daném intervalu $(a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu s konstantními koeficienty**).

**Homogenní rovnicí** k rovnici (6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0. \tag{7}$$

**Věta 10.2.** *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice (6), které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

*Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu $(a, b)$.*

Bez důkazu.

**Věta 10.3.**

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* $n$.

(ii) *Nechť* $y_p$ *je maximální řešení rovnice* (6)*. Pak funkce* $y$ *je maximálním řešením* (6)*, právě když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$*, kde* $y_h$ *je vhodné řešení rovnice* (7)*.*

**Důkaz Věty 10.3**

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbf{R}$. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení $L$ lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor. Podle Věty 10.2 nalezneme maximální řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnice (7) splňující

$$\begin{array}{cccc}
y_1(0) = 1, & y_2(0) = 0, & \ldots & y_n(0) = 0, \\
y_1'(0) = 0, & y_2'(0) = 1, & \ldots & y_n'(0) = 0, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0, & y_2^{(n-1)}(0) = 0, & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) = 1.
\end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod $0$, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Řešení $y_1, \ldots, y_n$ jsou tedy lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

$\square$

(ii) Řeší-li $y_p$ rovnici (6) a $y_h$ rovnici (7), pak z linearity zobrazení $L$ plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6).

Obráceně, je-li $y$ maximální řešení rovnice (6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (7). $\square$

**Definice.** **Fundamentalním systémem** rovnice (7) nazýváme bázi prostoru maximálních řešení rovnice (7).

**Definice.** **Charakteristickým polynomem** rovnice (7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

**Věta 10.4** (tvar fundamentálního systému)**.** *Nechť $\chi$ je charakteristický polynom rovnice (7). Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu $\chi$ s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu $\chi$ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbf{R}$.*

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \ldots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \ldots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \ldots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}$$

## Derivace funkcí s hodnotami v C

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.

Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci. Potom platí

- $(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$,
- $(\varphi\psi)'(x) = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)$.

(a) ... zřejmé

(b)

$$\begin{aligned}
(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\
&= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\
&\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\
&= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)
\end{aligned}$$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ vlastní $n$-tou derivaci. Potom platí
$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$
- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{C} \qquad [e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta)]$

**Lemma 10.5.** *Nechť $Q$ je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.*

*Důkaz.* Polynom $Q$ lze zapsat ve tvaru
$$Q(z) = (z - \omega)^q \cdot R(z),$$
kde $R$ je opět polynom. Odtud již tvrzení snadno plyne. □

**Důkaz Věty 10.4**

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$
$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

$$\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

$0 \leq s \leq j \leq n$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} \underbrace{(t^k)^{(s)}}_{=0} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**Důkaz lineární nezávislosti**

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu $(a, b)$ rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty $a$ a $b$. Platí

$$
\begin{aligned}
& a t^k e^{\alpha t} \cos \beta t + b t^k e^{\alpha t} \sin \beta t \\
&= a t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + b t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \\
&= \frac{1}{2}(a - bi) t^k e^{(\alpha + i\beta)t} + \frac{1}{2}(a + bi) t^k e^{(\alpha - i\beta)t}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Dále platí, že

$$a = b = 0 \Leftrightarrow a - bi = a + bi = 0. \tag{9}$$

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$, protože pak budou všechny koeficienty polynomů $P_1, \ldots, P_k$ nulové a díky pozorování (9) obdržíme, že i koeficienty použité v naší lineární kombinaci jsou nulové.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle $k$. Pokud $k = 1$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí $P_1(t)e^{\omega_1 t} = 0$, pak nutně $P_1(t) = 0$ pro každé $t \in (a, b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud $P$ je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned}(P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x}\\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x},\end{aligned}$$

kde $R$ je polynom stejného stupně jako $P$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1-\omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k-\omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1-\omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k-\omega_{k+1})t} = 0,$$

kde st $R_1 =$ st $P_1, \dots,$ st $R_k =$ st $P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$.

□

**Lemma 10.6.** *Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (7). Potom matice*

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

*je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.*

**Důkaz Lemmatu 10.6**

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1y_1 + \cdots + d_ny_n$. Potom $z$ řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned}z(t_0) &= d_1y_1(t_0) + \cdots + d_ny_n(t_0) = 0,\\ z'(t_0) &= d_1y_1'(t_0) + \cdots + d_ny_n'(t_0) = 0,\\ &\vdots\\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_ny_n^{(n-1)}(t_0) = 0.\end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$. Funkce $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru $d$, čímž je důkaz dokončen. □

**Metoda variace konstant**

Hledejme řešení rovnice (6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a,b),$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na $(a,b)$ a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (7).

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Funkci $c_i'$ vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \ldots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \ldots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Pravá strana předchozího vztahu je spojitá funkce v $t$, takže hledaná $c_i, i = 1, \ldots, n$, můžeme nalézt jako primitivní funkci k pravé straně.

**Metoda speciální pravé strany**

**Věta 10.7.** *Nechť*

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t),$$

*kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ a $P, Q$ jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (6) ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t),$$

*kde $R, S$ jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{$stupeň $P$, stupeň $Q\}$ a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Bez důkazu.

## 10.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $f_i$, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

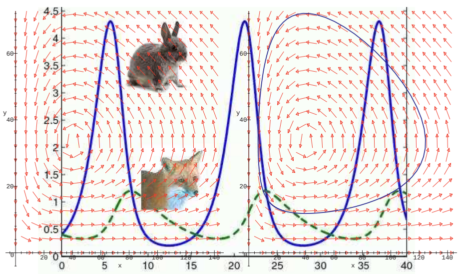
$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

kde máme $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $x'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $f = [f_1, \dots, f_n]$.

**Model dravec-kořist**

$x$ ... zajíci
$y$ ... lišky

$$\begin{aligned} x' &= (A - By)x \\ y' &= (-C + Dx)y \end{aligned}$$



*Poznámka.* Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{11}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= h(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Pokud $x$ řeší (12), pak $x_1$ řeší (11). Obráceně, pokud $y$ řeší (11), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (12).

**Věta 10.8** (Peanova věta o existenci). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na $G$. Pak pro každé $[t_0, x^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující $x(t_0) = x^0$.*

Spojitost $f$ v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta\colon \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

$$\|v\| = \|[v_1, v_2, \dots, v_n]\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Bez důkazu.

**Věta 10.9** (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení na $G$ a je lokálně lipschitzovské v $x$, tj. pro každý bod $[t, x] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $L > 0$ takové, že pro každé dva body $[s, x^1]$, $[s, x^2]$ splňující $\|[s, x^1] - [t, x]\| < \varepsilon$ a $\|[s, x^2] - [t, x]\| < \varepsilon$ máme*

$$||f(s, x^1) - f(s, x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

*Jestliže $[t_0, x^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (10) *splňující $x(t_0) = x^0$.*

Bez důkazu.

**10.6 Soustavy lineárních dif. rovnic**

## 10.6 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{13}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$x' = \mathbb{A}(t)x + b(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

**Věta 10.10** (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $x^0 \in \mathbf{R}^n$. Nechť $\mathbb{A}\colon (\alpha,\beta) \to M(n\times n)$, $b\colon (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $x$ soustavy (13) splňující $x(t_0) = x^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu $(\alpha, \beta)$.*

**Poznámka k důkazu věty 10.10**

Definujeme $f\colon (\alpha,\beta) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ předpisem

$$f(t,x) = \mathbb{A}(t)x + b(t).$$

Pak lze ověřit předpoklady Picardovy věty.

**Definice. Homogenní soustavou** k (13) rozumíme soustavu

$$x' = \mathbb{A}(t)x. \tag{14}$$

**Věta 10.11.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}\colon (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (357) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna $n$.*

**Důkaz Věty 10.11**

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na $(\alpha,\beta)$. Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení

$$L\colon \mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$$

definovaného předpisem $L(y) = y' - \mathbb{A}y$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$.

Zvolme $t_0 \in (\alpha,\beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1,\dots,x^n$ soustavy (14) na $(\alpha,\beta)$ splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1,\dots,n$. Funkce $\{x^1,\dots,x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1,\dots,e^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť $y$ je maximální řešení (14). Pak $y$ je definováno na $(\alpha,\beta)$. Označme

$$z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a $z$ řeší (14) na $(\alpha,\beta)$. Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Tedy $\{x^1,\dots,x^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$. $\square$

**Věta 10.12.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$ a $x^0 \in \mathbf{R}^n$. Nechť $\mathbb{A}\colon (\alpha,\beta) \to M(n\times n)$, $b\colon (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $y$ je řešení (13) na intervalu $(\alpha,\beta)$. Potom každé řešení $x$ soustavy (13) na intervalu $(\alpha,\beta)$ má tvar $y+z$, kde $z$ je jisté řešení (14).*

**Důkaz Věty 10.12**

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení $x$ rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

a tedy $z = x - y$ řeší (14). □

**Definice.** Nechť vektorové funkce $y^1,\dots,y^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (14) na $(\alpha,\beta)$. Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (14). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici $\Phi$ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (14).

**Lemma 10.13.** *Nechť $\Phi$ je fundamentální matice rovnice* (14)*. Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha,\beta)$.*

**Důkaz Lemmatu 10.13**

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha,\beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1,\dots,c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \dots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \dots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $y^1,\dots,y^n$. □

**Věta 10.14** (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha,\beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení $y$ rovnice* (13) *s počáteční podmínkou $y(t_0) = y^0$ má tvar*

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad t \in (\alpha,\beta),$$

*kde $\Phi$ je fundamentální matice soustavy* (14).

**Důkaz Věty 10.14**

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je $y$ dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t).
\end{aligned}
$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$. $\square$

## 10.7 Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

**Lemma 10.15.** *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ je řešením soustavy $y' = \mathbb{A}y$. Pak $y$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ pro $x \in \mathbf{R}$.*

**Důkaz Lemmatu 10.15**

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle $k$. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je $y$ je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$
\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.
$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$
y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.
$$

Funkce $y$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah. $\square$

**Definice.** Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné $\lambda$, nazýváme **$\lambda$-maticí**. **Řádkovými úpravami $\lambda$-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné $\lambda$.

**Lemma 10.16.** *Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je $\lambda$-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na $\lambda$-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.*

**Důkaz Lemmatu 10.16**

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\bigl\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\bigr\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést $\Lambda$ na $(c, 0, \dots, 0)^T$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici $\Lambda$ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud $P_j$, $j \neq 1$, je nenulový prvek $\Lambda$, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde $N, P_j^*$ jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek $P_j$ nahradit prvkem $P_j^*$. Matici $\Lambda$ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom $P_1$, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad. $\square$

**Věta 10.17.** *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze $\lambda$-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou $\lambda$-matici. Výsledná $\lambda$-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je $n$.*

**Důkaz Věty 10.17**

Nejprve ukážeme, že každou $\lambda$-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou $\lambda$-matici. Použijeme matematickou indukci podle $n$. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť $\Lambda$ je $\lambda$-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na $\Lambda$ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou $\Lambda$ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).

Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.

Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková $\lambda$-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je $n$-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. $\square$

**Označení.**

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci $n$-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

**Označení.**

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je $\lambda$-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0.
\end{aligned}
$$

**Lemma 10.18.** *Nechť $P, Q$ jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Pak*

*(a)* $(P+Q)\big(\frac{d}{dx}\big)y = P\big(\frac{d}{dx}\big)y + Q\big(\frac{d}{dx}\big)y$,

*(b)* $(PQ)\big(\frac{d}{dx}\big)y = P\big(\frac{d}{dx}\big)\big(Q\big(\frac{d}{dx}\big)\big)y$.

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k\lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^n b_j\lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\big(\tfrac{d}{dx}\big)y &= \Big(\Big(\sum_{k=0}^m a_k\lambda^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^n b_j\lambda^j\Big)\Big)\big(\tfrac{d}{dx}\big)y\\
&= \Big(\sum_{k=0}^m\sum_{j=0}^n a_k b_j\lambda^{k+j}\Big)\big(\tfrac{d}{dx}\big)y = \sum_{k=0}^m\sum_{j=0}^n a_k b_j y^{(k+j)}\\
&= \sum_{k=0}^m a_k\Big(\sum_{j=0}^n b_j y^{(j)}\Big)^{(k)} = \sum_{k=0}^m a_k\Big(Q\big(\tfrac{d}{dx}\big)y\Big)^{(k)}\\
&= P\big(\tfrac{d}{dx}\big)\Big(Q\big(\tfrac{d}{dx}\big)y\Big),
\end{aligned}
$$

a tedy platí (b). □

**Věta 10.19.** *Nechť $\lambda$-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ typu $n \times n$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z $\lambda$-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.*

**Důkaz Věty 10.19**

Stačí ukázat, že pokud $y$ řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$
\begin{aligned}
P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0,\\
P_{21}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{2n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n = \\
&= P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n \\
&= 0 + P\big(\tfrac{d}{dx}\big)\left(P_{21}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{2n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n\right) \\
&= 0 + P\big(\tfrac{d}{dx}\big)0 = 0.
\end{aligned}
$$

□

Homogenní soustava $y' = \mathbb{A}y$ odpovídá $\lambda$-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou $\lambda$-matici

$$
\begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\
0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & P_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0, \\
&\vdots \\
P_{nn}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0,
\end{aligned}
$$

pak vyřešíme postupně od $n$-té rovnice k první.

**Příklad**

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\
y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t \\
y_1 &= \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t
\end{aligned}
$$