Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx$$

Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}$$

Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2}$$

Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\, dx$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)}$$

Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná.

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30\int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,d$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30\int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,dx$$

$$= \log(x^2+x+4) + 8\int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2+1}\,dx$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30\int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,d$$

$$= \log(x^2+x+4) + 8\int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2+1}\,dx$$

$$\stackrel{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$$

Dohromady máme

$$\int \frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{x-2}+\frac{8}{5}\log|x-2|$$

$$+\frac{1}{5}\log(x^2+x+4)+\frac{4\sqrt{15}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+1} = x + t$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad dx = \frac{-2-2t^2}{4t^2}\,dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t} + t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t} + t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t} + t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 (\frac{1-t^2}{2t}+t)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt = \int \frac{-1}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 (\frac{1-t^2}{2t} + t)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt = \int \frac{-1}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t}+t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt = \int \frac{-1}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}.$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 (\frac{1-t^2}{2t} + t)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt = \int \frac{-1}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}.$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2-1},$$

$$x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty).$$