12. přednáška, 30. 3. 2020

Integrály typu $\int R\left(t, \sqrt{at^2+bt+c}\right) \mathrm{d}t$

Také integraci funkce $R\left(t, \sqrt{at^2+bt+c}\right)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce.

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\,\mathrm{d}t$

Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}).$$

Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2+bt+c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2+bt+c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2+bt+c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí
$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t - \alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$. Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α.
Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$.
Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$.
Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2. Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I, která bude primitivní ke g na I.

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen,

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$,

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$.

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}.

Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}. Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x - b)^2}$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$.

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g.

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a}\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g. Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2,

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)}$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)}$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t-\alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I, který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

Příklad

Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{t+\sqrt{t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t.$

Řešení

Integrand označíme g.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém **R**, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$.

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém **R**, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém **R**, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)} \, \mathrm{d}x.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x-2)(2x-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky
a dostaneme

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)} \, \mathrm{d}x$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)} \,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1 \,\mathrm{d}x + 2 \int \frac{1}{x-2} \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1} \,\mathrm{d}x$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{c}{=} x + 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|2x-1|$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int 1 \, \mathrm{d}x + 2 \int \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x-1} \, \mathrm{d}x$$

$$\overset{c}{=} x + 2 \log|x-2| - \frac{1}{2} \log|2x-1|$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 8.6 má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\sqrt{t^2+t+1} - t + 2\log\left|\sqrt{t^2+t+1} - t - 2\right| \\ - \frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{t^2+t+1} - 2t - 1\right| + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$