14. přednáška, 6. 4. 2020

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$.

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí:

Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$*. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každé dělení D intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\nu(D) < \delta$ *platí:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností.

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno.

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Důkaz Věty 9.3

Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\left\{\mu(D_0), \tfrac{\varepsilon}{4Kn}\right\}.$$

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$.

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0.

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P.

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I.

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I|$$

Důkaz Věty 9.3

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{1}$$

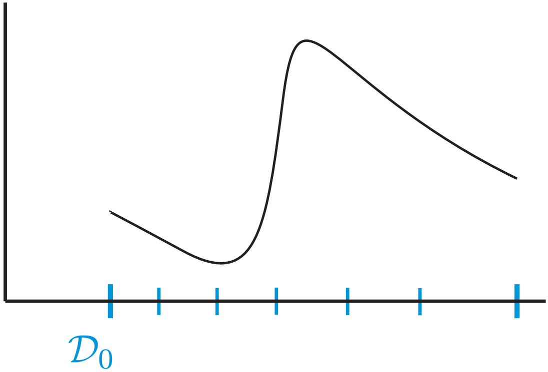
Označme $\mathcal{D}$ množinu intervalů příslušejících dělení D a $\mathcal{P}$ množinu intervalů příslušejících dělení P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|.$$

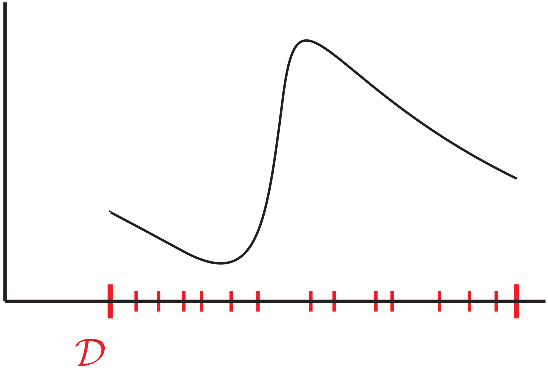
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$.

Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.

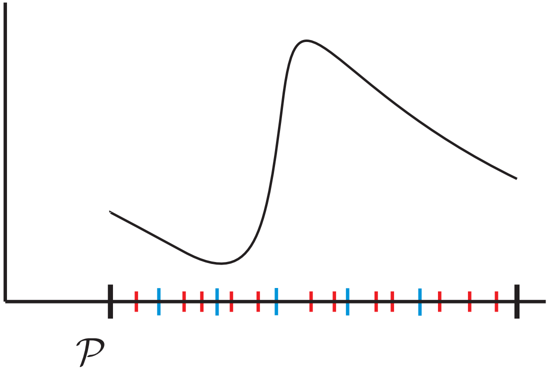
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



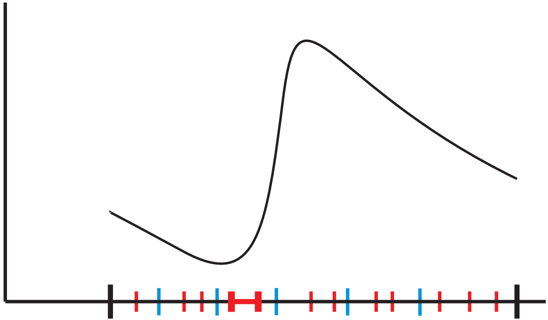
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



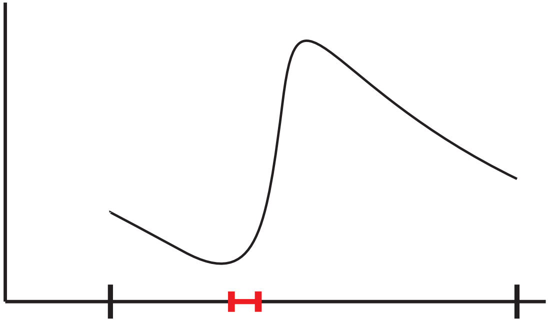
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



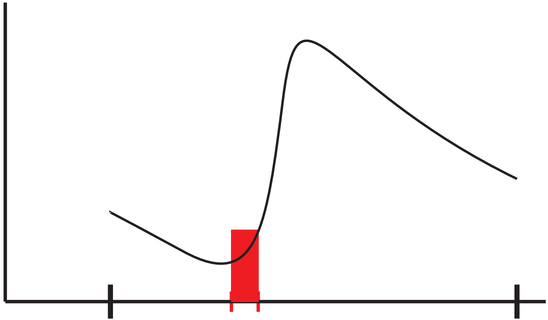
Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Nechť $I = [\alpha, \beta] \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný.



Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X.

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$.

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

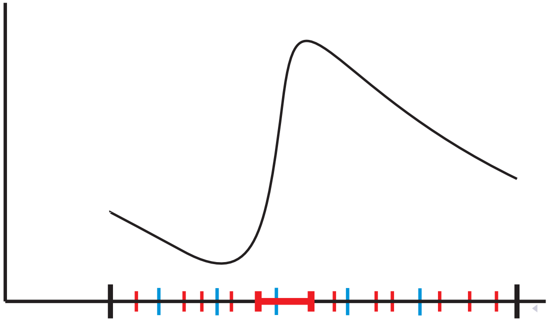
$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

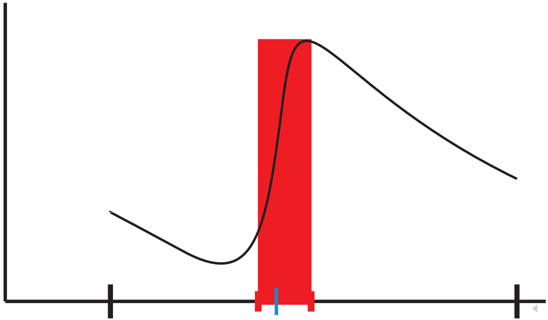


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

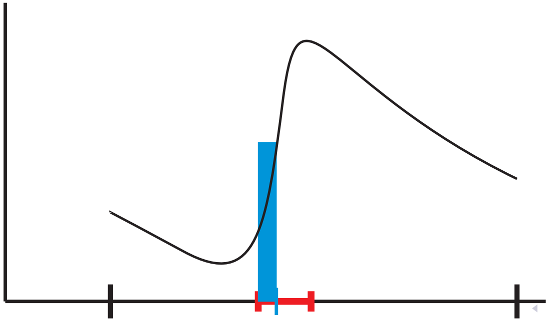


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$

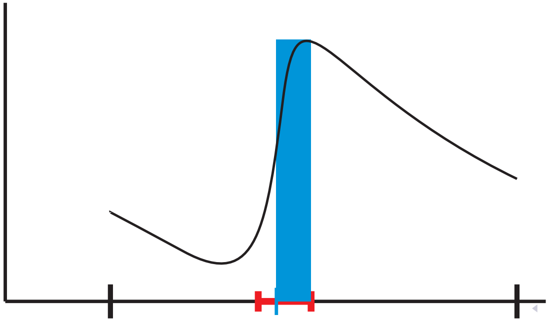


Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)$$



Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\left| \sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i) \right) \right|$$

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\left|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\right)\right|$$

$$\leq K(\beta - \alpha)$$

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\left|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha) - \left(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\right)\right|$$

$$\leq K(\beta-\alpha) + K(x_i-\alpha+\beta-x_i)$$

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha)$$

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\left|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta-\alpha) - \left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i-\alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i)\right)\right|$$

$$\leq K(\beta-\alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta-\alpha) \leq 2K\nu(D).$$

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha)-\Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta-\alpha)+K(x_i-\alpha+\beta-x_i)=2K(\beta-\alpha)\leq 2K\nu(D).$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ právě uvedeného typu nejvýše $n-1$,

Důkaz Věty 9.3

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\Big|\sup_{[\alpha,\beta]} f\cdot(\beta-\alpha)-\Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f\cdot(x_i-\alpha)+\sup_{[x_i,\beta]} f\cdot(\beta-x_i)\Big)\Big|$$

$$\leq K(\beta-\alpha)+K(x_i-\alpha+\beta-x_i)=2K(\beta-\alpha)\leq 2K\nu(D).$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ právě uvedeného typu nejvýše $n-1$, máme

$$\overline{S}(f,D)-\overline{S}(f,P)<2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (1).

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\le \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\le \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\le \overline{S}(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbf{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{S}(f,D) \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.3

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D)$$

$$\leq \overline{S}(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.
Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbf{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f,D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov.

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$*.*

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$.

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$. *Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$$

Důsledek 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$. *Nechť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost dělení intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$. *Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad a \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně.

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz Důsledku 9.4

Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Důkaz Důsledku 9.4

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$.

Důkaz Důsledku 9.4

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Důkaz Důsledku 9.4

Zvolme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.