16. přednáška, 14. 4. 2020

Věta 9.8

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je monotónní funkce na* $[a, b]$.
Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b] \colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]\colon\ f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon f(a) \le f(x) \le f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon,$$

Důkaz Věty 9.8

Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b]\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \ldots, n$.

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon.$$

Pak platí

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 tedy platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$*.*

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak*
$f + g \in \mathcal{R}([a, b])$,

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ *a platí*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

Věta 9.9 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené.

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.
Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

Důkaz Věty 9.9

Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.
Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f + g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0.

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D)$.

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$\underline{S}(f, D)+\underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f, D)+\overline{S}(g, D)$.

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.4 platí

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\big(\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)\big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle věty o dvou strážnících máme

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n)$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n)$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$

Podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 plyne $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ a

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$.

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$.
Funkce αf je omezená na $[a, b]$.

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a,b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.4 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I (-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I (-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 9.10 (Riemannův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b]$.

Věta 9.10 (Riemannův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ *a* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$. *Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$.

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$,

Důkaz Věty 9.10

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$.

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$*,* $a < c < b$*, a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$*. Pak platí* $f \in \mathcal{R}([a, b])$*, právě když* $f \in \mathcal{R}([a, c])$ *a* $f \in \mathcal{R}([c, b])$*.*

Věta 9.11 (aditivita Riemannova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$. *Pak platí* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *právě když* $f \in \mathcal{R}([a, c])$ *a* $f \in \mathcal{R}([c, b])$. *Je-li* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$,

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0.

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2.

Důkaz Věty 9.11

Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2. Pak platí $\lim \nu(D_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D_n) &= \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2). \end{aligned}$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) \right)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) \right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) \right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2) \right)$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle Důsledku 9.4

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dle Důsledku 9.4 platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a také dokazovaná rovnost.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$$\leq \left(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\right) + \left(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\right)$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2),$$
$$\underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)$$

$$\leq \left(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\right) + \left(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\right)$$

$$= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n).$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

Poněvadž platí $\lim\bigl(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\bigr) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\bigr) = 0.$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$.

Poněvadž platí $\lim\bigl(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\bigr) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\bigr) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně.

Poněvadž platí $\lim\bigl(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\bigr) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\bigr) = 0.$$

Odtud již plyne z Důsledku 9.4 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost za znění věty plyne z první části důkazu.

Poznámka

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují.

Poznámka

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 9.11 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.