19. přednáška, 24. 4. 2020

9.2 Newtonův integrál

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b).

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**,

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbf{R}^\star$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^\star$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**,

Definice

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbf{R}^{\star}$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Označení

Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{l} \text{existuje} \left\{ \begin{array}{l} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.
(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{l} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy divergu} \end{cases} \\ \\ \end{array} \right.$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.
(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy divergu} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

(a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.
(b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konv} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverg} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.
Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$.

Označení

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.
Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$. Potom budeme značit
$F(a+) = \lim_{x \to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x)$ a
$[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \, dx$.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$.

Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ & \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$.

Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N) \int_1^{\infty} x^{\alpha} \, dx$.

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ & \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \end{cases}$$

Příklad

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx$.

Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1,\infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty,-1), \\ \left[\log x\right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka

(a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

Poznámka

(a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá f primitivní funkci.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 9.17 (linearita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a* $\alpha \in \mathbf{R}$ *Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b)*. Pak*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$

pokud je výraz napravo definován.

Věta 9.17 (linearita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a* $\alpha \in \mathbf{R}$ *Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b)*. Pak*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ \ dx,$$

pokud je výraz napravo definován. Dále platí

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx,$$

pokud je výraz napravo definován.

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$.

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak je $F+G$ primitivní k $f+g$ a díky aritmetice limit máme $[F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = [F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.17

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud je výraz $\alpha[F]_a^b$ definován. $\square$

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b)*.*

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, *a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b). *Nechť platí* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$.

Věta 9.18 (Newtonův integrál a uspořádání)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a Newtonův integrál funkcí* f, g *existuje na* (a, b). *Nechť platí* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$. *Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí.
Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b)

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b).

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g na (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G-F$ je neklesající na (a,b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.18

Pokud $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$, pak zřejmě nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.17 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$