24. přednáška, 19. 5. 2020

10. Obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = f$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

$$mv' = mg - bv^2$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

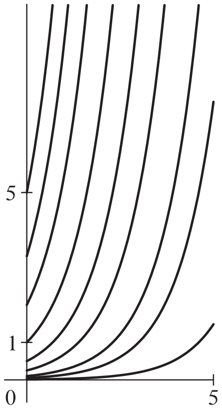
$$mv' = mg - bv^2$$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

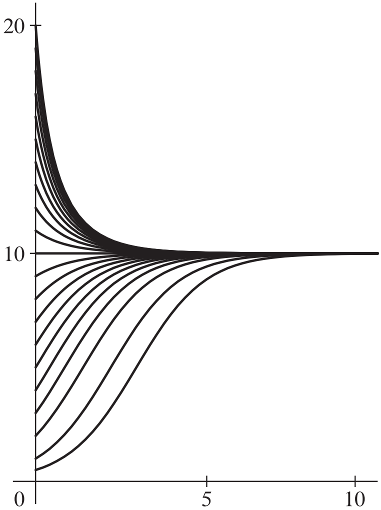


Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$

Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$



Biologie

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevníci – chudoblanní

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevníci – chudoblanní
$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, b = a/375$

Ekonomie

Q_d . . . poptávka

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$
$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$
$$Q_d = Q_s$$

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

$$y'' - y = \sin x$$

10.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

$$y'' - y = \sin x$$

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 - z_3 - \sin z_4$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**,

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D_y \subsetneq D_z$ a které se na D_y shoduje s y.

- Všechna maximální řešení.

- Všechna maximální řešení.
- Existence a jednoznačnost řešení.

- Všechna maximální řešení.
- Existence a jednoznačnost řešení.
- Limitní chování a stabilita řešení.

10.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice

Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{2}$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2).

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$y'(x)$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2).
Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x) + c))} \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x) + c))} \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)+c))} \cdot h(x)$$

$$= g(G^{-1}(H(x)+c)) \cdot h(x)$$

Ukažme ještě, že funkce ve tvaru

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), \tag{3}$$

definovaná na jistém intervalu L vyhovuje rovnici (2). Počítejme

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x)+c) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)+c))} \cdot h(x)$$

$$= g(G^{-1}(H(x)+c)) \cdot h(x) = g(y(x)) \cdot h(x).$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) na intervalu (a, c).