25. přednáška, 23. 5. 2020

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

$$y \mapsto y' + py$$

10.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

$$y \mapsto y' + py$$

$$\mathcal{C}^1(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$,

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$, *kde* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$,

Věta 10.1

Maximální řešení rovnice (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$, *kde* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, *má tvar*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)}\, dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \quad (5)$$

kde P *je primitivní funkce k* p *na* (a, b) *splňující* $P(x_0) = 0$.

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4).

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x)$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x)$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\Big) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Důkaz Věty 10.1

Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (4). Platí

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)}$$

$$-p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Ukážeme, že maximální řešení (4) musí mít tvar (5).

Ukážeme, že maximální řešení (4) musí mít tvar (5).
Maximální řešení homogenní rovnice $y' + py = 0$ mají tvar

$$y(x) = k \cdot e^{-P(x)}, \qquad x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{R}.$$

Metoda variace konstanty.

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)}$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

Metoda variace konstanty. Hledejme řešení ve tvaru

$$y(x) = k(x)e^{-P(x)},$$

kde k je třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b).

$$y' = -py + q$$

$$y'(x) = k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x))$$

$$y'(x) + p(x)y(x)$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} + k(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)k(x)e^{-P(x)}$$

$$= k'(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \Big) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \Big) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

Platí $y(x_0) = y_0$, a tedy $c = y_0$.

$$k'(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t + c$$

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \Big) e^{-P(x)} + c e^{-P(x)}$$

Platí $y(x_0) = y_0$, a tedy $c = y_0$. $\square$