# 26. přednáška, 29. 5. 2020

# 10.4 LDR $n$-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{6}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a $f$ je funkce spojitá na daném intervalu $(a, b)$

# 10.4 LDR $n$-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (6)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a $f$ je funkce spojitá na daném intervalu $(a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu s konstantními koeficienty**).

# 10.4 LDR $n$-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (6)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a $f$ je funkce spojitá na daném intervalu $(a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice** $n$**-tého řádu s konstantními koeficienty**).
**Homogenní rovnicí** k rovnici (6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (7)$$

## Věta 10.2

*Nechť* $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$*.*

## Věta 10.2

*Nechť* $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$*. Pak existuje právě jedno maximální řešení* $y$ *rovnice* (6)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0, \ y'(t_0) = z_1, \ \dots, \ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

## Věta 10.2

*Nechť* $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. *Pak existuje právě jedno maximální řešení* $y$ *rovnice* (6), *které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

*Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu* $(a, b)$.

## Věta 10.2

*Nechť* $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$*. Pak existuje právě jedno maximální řešení* $y$ *rovnice* (6)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

*Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu* $(a, b)$*.*

Bez důkazu.

## Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$

## Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* $n$*.*

## Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze n.*

(ii) *Nechť* $y_p$ *je maximální řešení rovnice* (6).

## Věta 10.3

(i) *Maximální řešení rovnice (7) jsou definována na celém* **R** *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* $n$.

(ii) *Nechť* $y_p$ *je maximální řešení rovnice (6). Pak funkce* $y$ *je maximálním řešením (6), právě když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$, *kde* $y_h$ *je vhodné řešení rovnice (7).*

# Důkaz Věty 10.3

# Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbf{R}$.

# Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

# Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení $L$ lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$.

# Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na **R**. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení $L$ lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor.

# Důkaz Věty 10.3

(i) Dle Věty 10.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbf{R}$. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení $L$ lineární a množina řešení rovnice (7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor. Podle Věty 10.2 nalezneme maximální řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnice (7) splňující

$$\begin{array}{cccc}
y_1(0) = 1, & y_2(0) = 0, & \ldots & y_n(0) = 0, \\
y_1'(0) = 0, & y_2'(0) = 1, & \ldots & y_n'(0) = 0, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0, & y_2^{(n-1)}(0) = 0, & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) = 1.
\end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$.

Ukážeme, že množina $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \dots = c_n = 0$. Řešení $y_1, \dots, y_n$ jsou tedy lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7).

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \dots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$,

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak $z$ je maximálním řešením rovnice (7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 10.2 rovnost $y = z$ na $\mathbf{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

$\square$

(ii) Řeší-li $y_p$ rovnici (6) a $y_h$ rovnici (7), pak z linearity zobrazení $L$ plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6).

(ii) Řeší-li $y_p$ rovnici (6) a $y_h$ rovnici (7), pak z linearity zobrazení $L$ plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6). Obráceně, je-li $y$ maximální řešení rovnice (6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (7).

(ii) Řeší-li $y_p$ rovnici (6) a $y_h$ rovnici (7), pak z linearity zobrazení $L$ plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (6). Obráceně, je-li $y$ maximální řešení rovnice (6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (7). $\square$

## Definice

**Fundamentalním systémem** rovnice (7) nazýváme bázi prostoru maximálních řešení rovnice (7).

## Definice

**Fundamentalním systémem** rovnice (7) nazýváme bázi prostoru maximálních řešení rovnice (7).

## Definice

**Charakteristickým polynomem** rovnice (7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

## Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

*Nechť* $\chi$ *je charakteristický polynom rovnice* (7).

## Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

*Nechť* $\chi$ *je charakteristický polynom rovnice* (7). *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu* $\chi$ *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$.

## Věta 10.4 (tvar fundamentálního systému)

*Nechť* $\chi$ *je charakteristický polynom rovnice* (7). *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu* $\chi$ *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* $\chi$ *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$, *kde* $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$.

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \ldots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \ldots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \ldots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7):

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}$$