28. přednáška, 7. 6. 2020

10.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

10.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

kde máme $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $x'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $f = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice

- **Řešením soustavy** (10) rozumíme vektorovou funkci $x = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (10).

Definice

- **Řešením soustavy** (10) rozumíme vektorovou funkci $x = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (10).
- **Počáteční úlohou** pro (10) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení x soustavy (10) splňující navíc předem zadanou podmínku $x(t_0) = x^0$, kde $[t_0, x^0] \in G$ (tzv. **počáteční podmínka**).

- **Maximální řešení** soustavy (10) je takové řešení x definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li y řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $y(t) = x(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Model dravec-kořist

Model dravec-kořist

x ... zajíci

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$

Model dravec-kořist

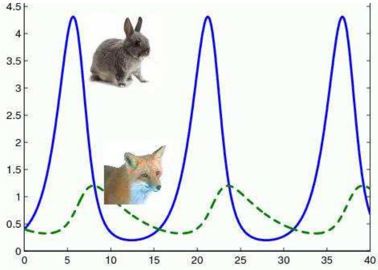
x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$

Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

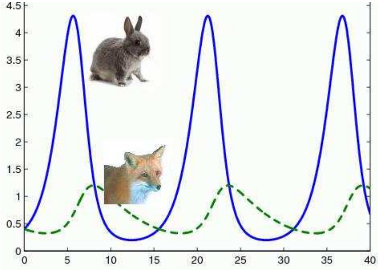
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

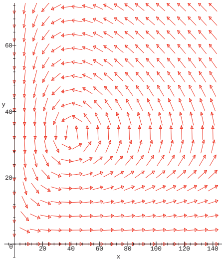
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

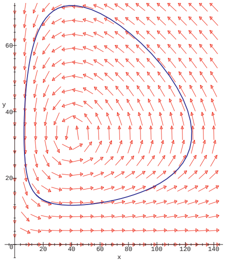
$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Model dravec-kořist

x ... zajíci
y ... lišky

$$x' = (A - By)x$$
$$y' = (-C + Dx)y$$



Poznámka

Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{11}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= h(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Pokud x řeší (12), pak x_1 řeší (11). Obráceně, pokud y řeší (11), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (12).

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na* G*. Pak pro každé* $[t_0, x^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na* G*. Pak pro každé* $[t_0, x^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta : \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, x^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (10) splňující $x(t_0) = x^0$.

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta : \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

$$\|v\| = \|[v_1, v_2, \dots, v_n]\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Věta 10.8 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, x^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (10) splňující $x(t_0) = x^0$.

Spojitost f v bodě $[t, x] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall [t', x'] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \|[t', x'] - [t, x]\| < \delta : \\ \|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$$

$$\|v\| = \|[v_1, v_2, \ldots, v_n]\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Bez důkazu.

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na* G

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f : [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*,*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x, *tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t, x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s,x^1], [s,x^2]$ *splňující* $\|[s,x^1] - [t,x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s,x^2] - [t,x]\| < \varepsilon$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v x, tj. pro každý bod $[t,x] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $L > 0$ takové, že pro každé dva body $[s,x^1]$, $[s,x^2]$ splňující $\|[s,x^1] - [t,x]\| < \varepsilon$ a $\|[s,x^2] - [t,x]\| < \varepsilon$ máme

$$||f(s,x^1) - f(s,x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f : [t, x] \mapsto f(t, x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v x, tj. pro každý bod* $[t, x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s, x^1], [s, x^2]$ *splňující* $\|[s, x^1] - [t, x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s, x^2] - [t, x]\| < \varepsilon$ *máme*

$$||f(s, x^1) - f(s, x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Jestliže $[t_0, x^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$*.*

Věta 10.9 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $f\colon [t,x] \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na* G *a je lokálně lipschitzovské v* x*, tj. pro každý bod* $[t,x] \in G$ *existuje* $\varepsilon > 0$ *a* $L > 0$ *takové, že pro každé dva body* $[s,x^1]$, $[s,x^2]$ *splňující* $\|[s,x^1] - [t,x]\| < \varepsilon$ *a* $\|[s,x^2] - [t,x]\| < \varepsilon$ *máme*

$$||f(s,x^1) - f(s,x^2)|| \leq L||x^1 - x^2||.$$

Jestliže $[t_0, x^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (10) *splňující* $x(t_0) = x^0$.

Bez důkazu.

10.6 Soustavy lineárních dif. rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$x' = \mathbb{A}(t)x + b(t),$$

Vektorový tvar:

$$x' = \mathbb{A}(t)x + b(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení.*

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* x *soustavy* (13) *splňující* $x(t_0) = x^0$.

Věta 10.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A} \colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* x *soustavy* (13) *splňující* $x(t_0) = x^0$. *Toto řešení je definováno na celém intervalu* (α, β).

Poznámka k důkazu věty 10.10

Definujeme $f\colon (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ předpisem

$$f(t, x) = \mathbb{A}(t)x + b(t).$$

Pak lze ověřit předpoklady Picardovy věty.

Definice

Homogenní soustavou k (13) rozumíme soustavu

$$x' = \mathbb{A}(t)x. \tag{14}$$

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení.*

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A}\colon (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (14) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta), \mathbf{R}^n)$.

Věta 10.11

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (14) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β).

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení

$$L\colon \mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$$

definovaného předpisem $L(y) = y' - \mathbb{A}y$.

Důkaz Věty 10.11

Podle Věty 10.10 je každé maximální řešení (14) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení

$$L\colon \mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$$

definovaného předpisem $L(y) = y' - \mathbb{A}y$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \ldots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé.

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť y je maximální řešení (14).

Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $x^1, \dots, x^n$ soustavy (14) na (α, β) splňující $x^i(t_0) = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{x^1, \dots, x^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{e^1, \dots, e^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť y je maximální řešení (14). Pak y je definováno na (α, β). Označme

$$z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β).

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{x^1, \ldots, x^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$.

Potom $z(t_0) = y(t_0)$ a z řeší (14) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$y(t) = z(t) = y_1(t_0)x^1(t) + \cdots + y_n(t_0)x^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{x^1, \ldots, x^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$. $\square$

Věta 10.12

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$ *a* $x^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A} \colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* y *je řešení* (13) *na intervalu* (α, β). *Potom každé řešení* x *soustavy* (13) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $y + z$, *kde* z *je jisté řešení* (14).

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

a tedy $z = x - y$ řeší (14).

Důkaz Věty 10.12

Jelikož je zobrazení $L\colon y \mapsto y' - \mathbb{A}y$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$, máme pro maximální řešení x rovnice (13) rovnost

$$L(x-y) = Lx - Ly = b - b = 0,$$

a tedy $z = x - y$ řeší (14). $\square$

Definice

Nechť vektorové funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (14) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (14). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Definice

Nechť vektorové funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (14) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (14). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (14).

Lemma 10.13

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (14).

Lemma 10.13

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (14)*. Pak* $\Phi(t)$ *je regulární pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $y^1, \dots, y^n$.

Důkaz Lemmatu 10.13

Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \cdots + c_n y^n(t_0) = 0.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \cdots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = 0$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = 0$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $y^1, \dots, y^n$. $\square$

Věta 10.14 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbf{R}^n$.

Věta 10.14 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbf{R}^n$. *Pak maximální řešení* y *rovnice* (13) *s počáteční podmínkou* $y(t_0) = y^0$ *má tvar*

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ *je fundamentální matice soustavy* (14).

Důkaz Věty 10.14

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$,

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$y'(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t)$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t)
\end{aligned}
$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t).
\end{aligned}
$$

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\ &= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$.

Důkaz Věty 10.14

Matice $\Phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 10.13 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \Phi^{-1}(s)b(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^0 + \mathbb{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\
&= \mathbb{A}(t)y(t) + b(t).
\end{aligned}
$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$. $\square$