2. věta o substituci

Matematická analýza LS 2019/20

Druhá věta o substituci

Věta (Druhá věta o substituci)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$,

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1, 1) = (a, b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1, 1) = (a, b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1, 1) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1, 1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha,\beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, dostáváme pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, kde $x\in(-1,1)=(a,b)$, a $\varphi(t)=\sin t$, kde $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=(\alpha,\beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta)=\varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=(-1,1)=(a,b)$.
Navíc $\varphi'(t)=\cos t\neq 0$ pro $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a $\varphi^{-1}(x)=\arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$, dostáváme pro $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=$$

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, dostáváme pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, dostáváme pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

Goniometrické substituce

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in (-1,1) = (a,b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, kde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, dostáváme pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t).$$

Příklad

Podle 2. věty o substituci máme

Příklad

Podle 2. věty o substituci máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

Příklad

Podle 2. věty o substituci máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x), x \in (-1,1).$$

Hyperbolické funkce

Poznámka

V dalším příkladě budeme potřebovat hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hyperbolické funkce

Poznámka

V dalším příkladě budeme potřebovat hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro jejich derivace platí

$$\sinh' x = \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x.$$

Hyperbolické funkce

Poznámka

V dalším příkladě budeme potřebovat hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro jejich derivace platí

$$\sinh' x = \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x.$$

Navíc lze snadno ověřit vztah

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Hyperbolické funkce

Poznámka

V dalším příkladě budeme potřebovat hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro jejich derivace platí

$$\sinh' x = \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x.$$

Navíc lze snadno ověřit vztah

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Pro jejich inverzní funkce pak platí

$$\operatorname{arg\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \in [1, \infty)$$

.

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Hyperbolické substituce

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$

Hyperbolické substituce

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a $\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.

Hyperbolické substituce

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a $\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi((-\infty, \infty)) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a $\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((-\infty, \infty)\right) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$

Hyperbolické substituce

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a
$\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((-\infty, \infty)\right) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a
$\varphi^{-1}(x) = \operatorname{arg\,sinh}\,(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ na $(-\infty, \infty)$.

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a
$\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((-\infty, \infty)\right) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a
$\varphi^{-1}(x) = \operatorname{arg\,sinh}\,(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ na $(-\infty, \infty)$.
Platí

$$\sqrt{4+x^2}$$

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a
$\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((-\infty, \infty)\right) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a
$\varphi^{-1}(x) = \arg\sinh\,(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ na $(-\infty, \infty)$.
Platí

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\sin^2 t}$$

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a
$\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((-\infty, \infty)\right) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a
$\varphi^{-1}(x) = \arg\sinh\,(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ na $(-\infty, \infty)$.
Platí

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\sin^2 t} = 2\sqrt{1+\sinh^2 t} = 2\sqrt{\cosh^2 t}.$$

Příklad

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (a, b)$ a $\varphi(t) = 2\sinh t$, kde $t \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$.
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi((-\infty, \infty)) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2\cosh t \neq 0$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a
$\varphi^{-1}(x) = \arg\sinh(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ na $(-\infty, \infty)$.
Platí

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\sin^2 t} = 2\sqrt{1+\sinh^2 t} = 2\sqrt{\cosh^2 t}.$$

Protože $\cosh t > 0$, máme $2\sqrt{\cosh^2 t} = 2\cosh t$.

Příklad

Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Příklad

Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\cosh t}{2\cosh t}\,\mathrm{d}t =$$

Příklad

Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\cosh t}{2\cosh t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

Příklad

Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\cosh t}{2\cosh t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad

Pak
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\cosh t}{2\cosh t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle 2. věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

Příklad

Pak
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\cosh t}{2\cosh t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle 2. věty o substituci máme
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odmocniny

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

Odmocniny

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$,

Příklad

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,

Příklad

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((0, \infty)\right) = (0, \infty) = (a, b)$.

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((0, \infty)\right) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$

Odmocniny

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((0, \infty)\right) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi((0, \infty)) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t =$$

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((0, \infty)\right) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2}) 2t \, \mathrm{d}t.$$

Příklad

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0,\infty) = (a,b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0,\infty) = (\alpha,\beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left((0,\infty)\right) = (0,\infty) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0,\infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0,\infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2})2t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$,

Odmocniny

Příklad

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0,\infty) = (a,b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0,\infty) = (\alpha,\beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left((0,\infty)\right) = (0,\infty) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0,\infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0,\infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2})2t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$, dostáváme pomocí per partes pro $t \in (0,\infty)$

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi((0, \infty)) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2}) 2t \, \mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$, dostáváme pomocí per partes pro $t \in (0, \infty)$

$$\int 2t \cos t \, \mathrm{d}t = 2t \sin t - \int 2 \sin t \, \mathrm{d}t$$

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi((0, \infty)) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2}) 2t \, \mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$, dostáváme pomocí per partes pro $t \in (0, \infty)$

$$\int 2t \cos t \, \mathrm{d}t = 2t \sin t - \int 2 \sin t \, \mathrm{d}t \stackrel{C}{=} 2t \sin t + 2 \cos t.$$

Příklad

$$\int \cos \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos \sqrt{x}$, kde $x \in (0, \infty) = (a, b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0, \infty) = (\alpha, \beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\left((0, \infty)\right) = (0, \infty) = (a, b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0, \infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0, \infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2})2t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$, dostáváme pomocí per partes pro $t \in (0, \infty)$

$$\int 2t \cos t\,\mathrm{d}t = 2t \sin t - \int 2 \sin t\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} 2t \sin t + 2 \cos t.$$

Podle 2. věty o substituci máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos \sqrt{x}$$

Příklad

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $f(x) = \cos\sqrt{x}$, kde $x \in (0,\infty) = (a,b)$, a $\varphi(t) = t^2$, kde $t \in (0,\infty) = (\alpha,\beta)$,
Pak máme $\varphi(\alpha,\beta) = \varphi\left((0,\infty)\right) = (0,\infty) = (a,b)$.
Navíc $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ pro $t \in (0,\infty)$ a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ na $(0,\infty)$.
Dále

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\sqrt{t^2})2t\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož pro $t > 0$ je $\sqrt{t^2} = t$, dostáváme pomocí per partes pro $t \in (0,\infty)$

$$\int 2t\cos t\,\mathrm{d}t = 2t\sin t - \int 2\sin t\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} 2t\sin t + 2\cos t.$$

Podle 2. věty o substituci máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos\sqrt{x} \stackrel{C}{=} 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}.x \in (0,\infty).$$