INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Spočtěte následující primitivní funkce.

1. $\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$

2. $\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\,\mathrm{d}x$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+7)^2}\,\mathrm{d}x$

VÝSLEDKY

1. $\frac{1}{2}\log(\frac{x^2+1}{x^2+2})+\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})-\operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbf{R}$ **2.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|,\quad x\in(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{2}})$ nebo $x\in(-\sqrt{1+\sqrt{2}}),\sqrt{1+\sqrt{2}})$ nebo $(\sqrt{1+\sqrt{2}},+\infty)$ **3.** $x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$

1. Jmenovatel integrované racionální funkce nemá žádné reálné kořeny, integrujme tedy na interval $(-\infty, \infty)$. Provdeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Roznásobením pak

$$x^2+x = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1).$$

Z toho porovnáním koeficientů u x^3 máme $0 = A + C$, dále porovnáním koeficientů při x dostaneme $1 = 2A+C$, z čehož dohromady $A = 1$, $C = -1$. Obdobně porovnáním koeficientů při x^2, 1 dostaneme $1 = B+D$, $0 = 2B + D$, z čehož dohromady $B = -1$, $D = 2$. Integrujeme tak $\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-2}{x^2+2}$. Máme

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x,$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2+2) - 2\int \frac{\sqrt{2}}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+2) - \sqrt{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Dohromady tak

$$\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \arctan x$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

2. Jmenovatel integrované racionální funkci je roven $\left(x^2-1+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, budeme tak integrovat na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty\right)$. Rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{x}{x^4-2x^2-1} = \frac{Ax+B}{x^2-1+\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{D}{x-\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Roznásobením pak

$$x = (Ax+B)(x^2-1-\sqrt{2}) + C(x^2-1+\sqrt{2})\left(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) + D(x^2-1+\sqrt{2})\left(x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right),$$

což porovnáním koeficientů při x^3, x^2, x, 1 dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
0 &= A + C + D,\\
0 &= B + \sqrt{1+\sqrt{2}}(-C+D),\\
1 &= -A(1+\sqrt{2}) + (-1+\sqrt{2})(C+D),\\
0 &= -B(1+\sqrt{2}) + \sqrt{1+\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})(-C+D),
\end{aligned}$$

jejímž jediným řešením je $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = 0$, $C = D = \frac{1}{4\sqrt{2}}$. Posléze máme primitivní funkce

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x}{x^2-1+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x}{x^2-1+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2-1+\sqrt{2}\right)$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$, dále

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{1}{x\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|x\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}\right|$$

na intervalech $\left(-\infty, \mp\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $\left(\mp\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty\right)$. Dohromady tak na každém z intervalů $\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty\right)$ máme primitivní funkci

$$\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\log\left(x^2-1+\sqrt{2}\right) + \log\left|x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right| + \log\left|x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|.$$

3. Integrovanou racionální funkci upravíme do tvaru

$$1+\frac{5x^6-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

primitivní funkci tak budeme hledat na intervalech $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$ a $(3,\infty)$. Rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned}\frac{5x^6-6x+1}{x(x-2)(x-3)}&=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},\\ 5x^2-6x+1&=A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x),\end{aligned}$$

z čehož porovnáním koeficientů získáme soustavu

$$\begin{aligned}5&=A+B+C,\\ -6&=-5A-3B-2C,\\ 1&=A,\end{aligned}$$

jejímž jediným řešením je $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{9}{2}$, $C=\frac{28}{3}$. Dále máme $\int 1\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x$ na intervalu $(-\infty,\infty)$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log|x|$ na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, $\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log|x-2|$ na intervalech $(-\infty,2)$ a $(2,\infty)$ a $\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log|x-3|$ na intervalech $(-\infty,3)$ a $(3,\infty)$. Dohromady tak

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$$

na každém z intervalů $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$ a $(3,\infty)$.

4. Jmenovatel integrované racionální funkce nemá reálné kořeny, hledejme tedy primitivní funkci na $(-\infty,\infty)$. Rozložme nejprve

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+7)^2}=\frac{1}{x^2+7}+\frac{x-6}{(x^2+7)^2}$$

a substituujme $u=\frac{x}{\sqrt{7}}$, z čehož $\mathrm{d}x=\sqrt{7}\mathrm{d}u$. Následně na intervalu $(-\infty,\infty)$ zintegrujeme

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+7}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{7}}{7(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan u=\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right),\\ \int\frac{x-6}{(x^2+7)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{7u-6\sqrt{7}}{49(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{14}\int\frac{2u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u-\frac{6}{7\sqrt{7}}\int\frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u \overset{C}{=}\\ &\overset{C}{=}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{u^2+1}-\frac{6}{7\sqrt{7}}\left(\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u\right)=\\ &=-\frac{1}{2(x^2+7)}-\frac{3}{7}\cdot\frac{x}{x^2+7}-\frac{3}{7\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right).\end{aligned}$$

Dohromady tak

$$\int\frac{x^2+x+1}{(x^2+7)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{6x+7}{14(x^2+7)}+\frac{4}{7\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$