Matematická analýza 2

LS 2014-15

Miroslav Zelený

5.5 Elementární funkce

5.5 Elementární funkce

Lemma 5.20

Nechť $x \in \mathbf{R}$. *Potom existuje kladné* $C \in \mathbf{R}$ *(závisející na* x*) takové, že pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a* $h \in (-1, 1)$ *platí*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Definice

Exponenciální funkci exp definujme pro $x \in \mathbf{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Definice

Exponenciální funkci exp definujme pro $x \in \mathbf{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Věta 5.21 (základní vlastnosti exponenciály)

Funkce $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *je dobře definována a splňuje*

(E1) $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(E2) $\exp'(0) = 1$.

Vlastnosti exponenciální funkce

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbf{R}$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbf{R}$.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbf{R}$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbf{R}$.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbf{R}$.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbf{R}$.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbf{R}$.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(E10) Platí $\mathcal{R}(\exp) = (0, \infty)$.

Věta 5.22

Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbf{R}$ *splňující podmínky (E1) a (E2).*

Definice

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

Definice

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Nechť $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbf{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

Definice

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Nechť $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbf{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(c) Je-li $n \in \mathbf{N}$ liché, ***n*-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Je-li $n \in \mathbf{N}$ sudé, ***n*-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0,\infty)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí
$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí
$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbf{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí
$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbf{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbf{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$.

(L8) Platí $\lim_{x \to 0_+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$.

Definice

Funkci **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*

(G4) *existuje kladné číslo* π *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$*,*

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*

(G4) *existuje kladné číslo* π *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

(G12) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

(G12) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbf{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

(G12) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbf{R}$.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

(G12) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbf{R}$.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

(G15) Platí $\cos(x) = 0$, právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Věta 5.24

Trojice $(\sin, \cos, \pi)$ *je vlastnostmi (G1)–(G5) určena jednoznačně.*

Definice

Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad && x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad && x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G21) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G21) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G22) Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \mathrm{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \mathrm{tg}(x) = -\infty$.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G21) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G22) Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \mathrm{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}_+} \mathrm{tg}(x) = -\infty$.

(G23) Platí $\mathcal{R}(\mathrm{tg}) = \mathbf{R}$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

(G29) Platí $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

(G29) Platí $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G30) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

(G29) Platí $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G30) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(G31) Platí $\mathcal{R}(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R}$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

(G29) Platí $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G30) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(G31) Platí $\mathcal{R}(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R}$.

Definice

Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\text{arcsin}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\text{arccos}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arccos}) = [0, \pi]$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\text{arcsin}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\text{arccos}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arccos}) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi]$.
(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.
(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\text{arcsin}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\text{arccos}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arccos}) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\text{arcsin}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\text{arccos}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arccos}) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

(C6) Platí $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

(C6) Platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

(C7) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\text{arcsin}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\text{arccos}) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\text{arccos}) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

(C6) Platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

(C7) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

(C6) Platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

(C7) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\mathrm{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\mathrm{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\text{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\text{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na **R**.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\mathrm{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\mathrm{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na **R**.

(C13) Platí $\lim_{x\to\infty} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\mathrm{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\mathrm{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbf{R}$.

(C13) Platí $\lim_{x\to\infty} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\mathrm{arctg}(0) = 0$, $\mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbf{R}$.

(C13) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C15) Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na **R**.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na **R**.

(C19) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na **R**.

(C19) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(C20) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\text{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\text{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na **R**.

(C19) Platí $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(C20) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\text{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\text{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na $\mathbf{R}$.

(C19) Platí $\lim_{x\to\infty} \text{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \text{arccotg}(x) = \pi$.

(C20) Platí $\text{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\text{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(C22) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

6. Taylorův polynom

6.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

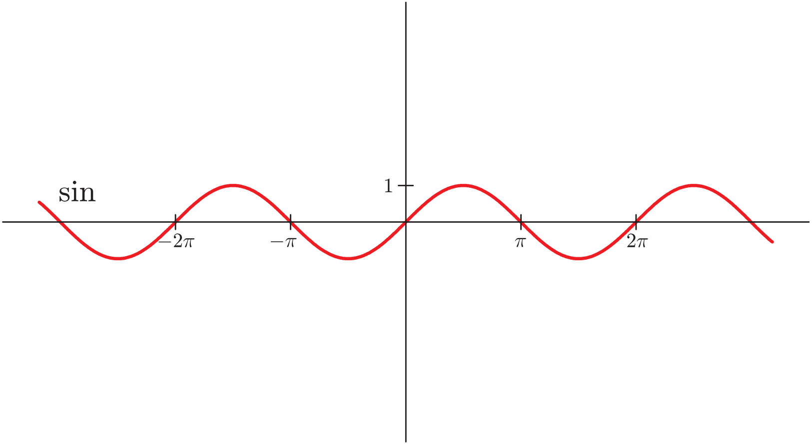
Lemma 6.1

Nechť Q je polynom, $\operatorname{st} Q \leq n$ *a* $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak Q je nulový polynom.*

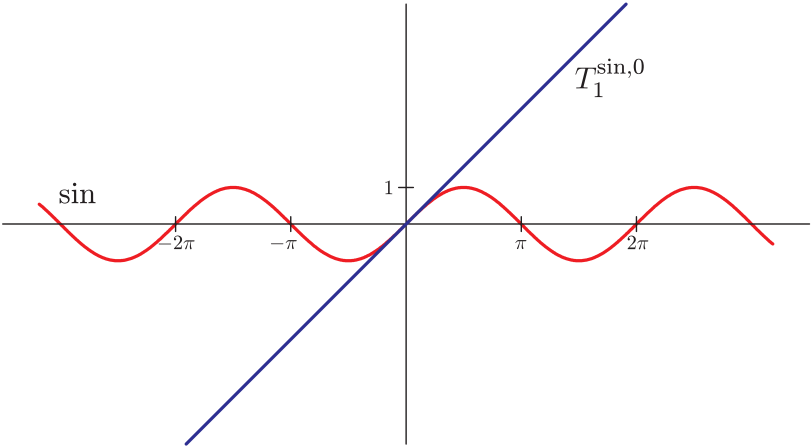
Věta 6.2 (Peanův tvar zbytku)

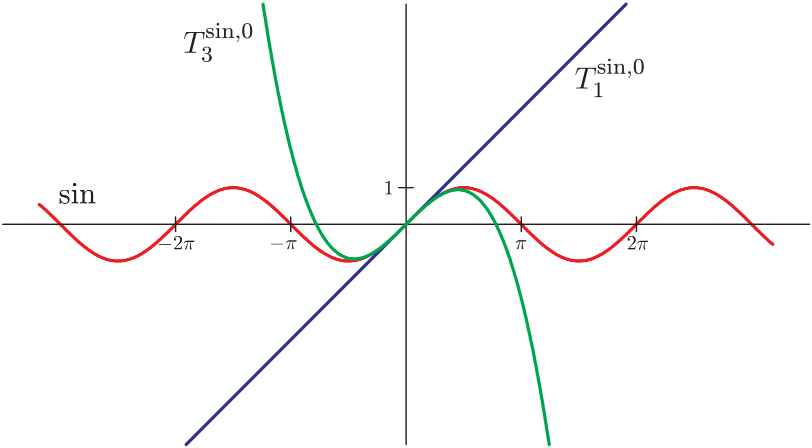
Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ *a* P *je polynom stupně nejvýše* n*. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

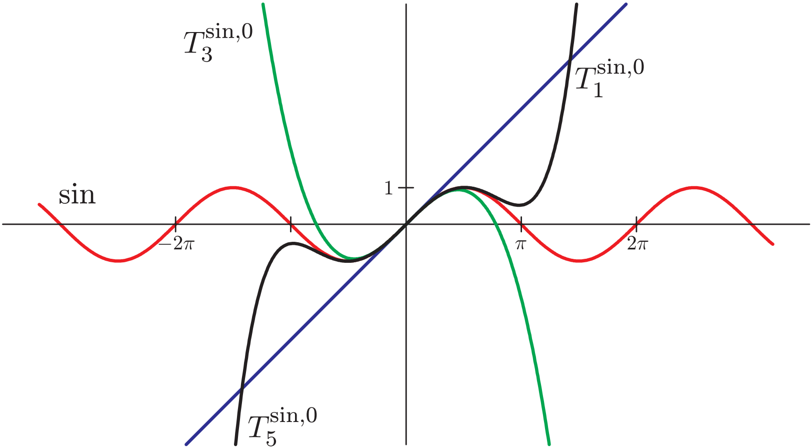


sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π

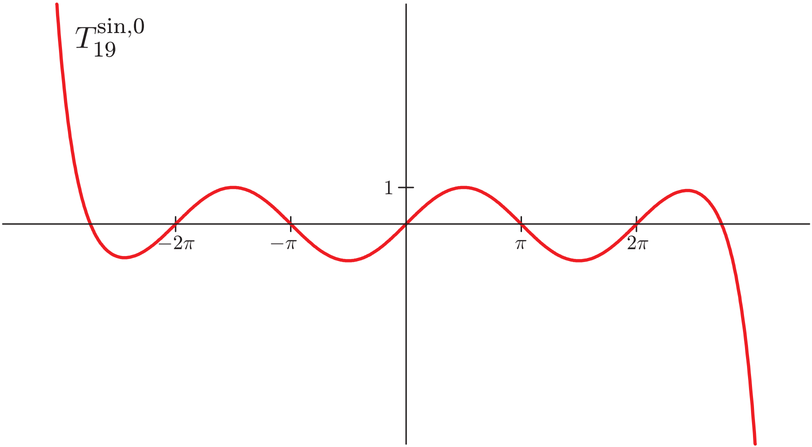

$T_1^{\sin,0}$
1
sin
-2π
$-\pi$
π
2π



$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π



$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
$\sin$
1
-2π
π
2π
$T_5^{\sin,0}$


$T_{19}^{\sin,0}$
1
-2π
$-\pi$
π
2π

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$*, která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Věta 6.3

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. *Předpokládejme, že*

- f *je funkce, která má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci,*
- φ *je spojitá funkce na* $[a, x]$*, která má v každém bodě intervalu* (a, x) *vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku)

Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

6.2 Symbol malé o

Definice

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^{\star}$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)), \; x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 6.6

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \quad a \quad f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \ \ a \ \ f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x)),\ x \to a.$$

(iii) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Věta 6.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$, $x \to a$.

6.3 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Potom řadu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j$$

nazýváme **Taylorovou řadou o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\forall x \in (-1, 1]: \ \log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\forall x \in (-1, 1): \ (1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

7. Mocninné řady

7. Mocninné řady

Definice

Mocninnou řadou o středu $x_0 \in \mathbf{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, kde $x \in \mathbf{R}$ a $a_k \in \mathbf{R}$ pro každé $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Věta 7.1

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek* $\rho \in \mathbf{R}^*$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \rho$, *uvedená řada konverguje absolutně,*

Věta 7.1

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek* $\rho \in \mathbf{R}^*$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \rho$, *uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| > \rho$, *uvedená řada diverguje.*

Věta 7.1

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek* $\rho \in \mathbf{R}^*$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \rho$, *uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| > \rho$, *uvedená řada diverguje.*

Prvek ρ *splňuje*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

Věta 7.1

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek* $\rho \in \mathbf{R}^*$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \rho$, *uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| > \rho$, *uvedená řada diverguje.*

Prvek ρ *splňuje*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ *zde rozumíme* ∞ *a výrazem* $1/\infty$ *zde rozumíme* 0.

Věta 7.1

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek* $\rho \in \mathbf{R}^*$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \rho$, *uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé* $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| > \rho$, *uvedená řada diverguje.*

Prvek ρ *splňuje*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ *zde rozumíme* ∞ *a výrazem* $1/\infty$ *zde rozumíme* 0. *Prvek* ρ *nazýváme* ***poloměrem konvergence*** *uvedené řady.*

Věta 7.2 (o derivaci mocninné řady)

Nechť ϱ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, definujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Potom funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Věta 7.3

Nechť mají symboly f a ϱ stejný význam jako ve Větě 7.2. Pak má funkce f v každém bodě $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, derivace všech řádů a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Speciálně platí $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Lemma 7.4

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je konvergentní řada a* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost jejích částečných součtů. Nechť* $x \in (-1, 1)$*. Potom řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ *absolutně konvergují a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Věta 7.5 (Abel)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a nechť ϱ je její poloměr konvergence. Předpokládejme, že platí $\varrho \in (0,\infty)$. Nechť dále $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konverguje. Potom

$$\lim_{x\to\varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

8. Primitivni funkce

8.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k** f **na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

8.1 Základní vlastnosti

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I**, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1

Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Věta 8.4 (o substituci)

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha,\beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \overset{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\, dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Lemma 8.5 (Darbouxova vlastnost derivace)

Nechť f má na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f na I ***Darbouxovu vlastnost****, tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Věta 8.6 (integrace per partes)

Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx \text{ na } I.$$

9.2 Integrace racionálních funkcí

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

9.2 Integrace racionálních funkcí

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \dots x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1,\ x - x_2, \dots, x - x_k,\ x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x-x_1,\ x-x_2, \dots, x-x_k,\ x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny* $x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají reálný kořen.*

9.2 Integrace racionálních funkcí

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1,$ $\dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l,$ $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-x_1} \\ & + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$

9.3 Některé užitečné substituce

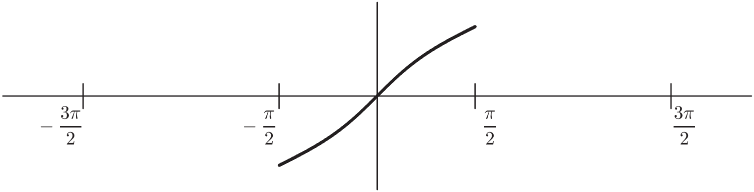
Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$

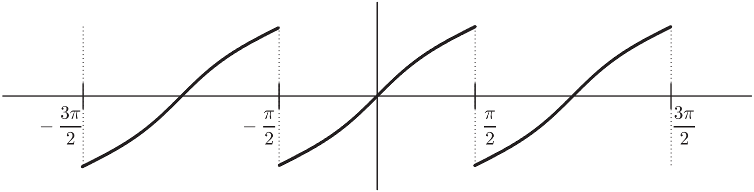
9.3 Některé užitečné substituce

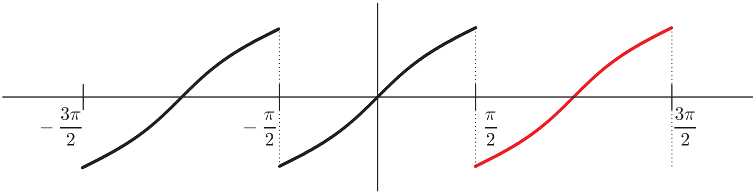
Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

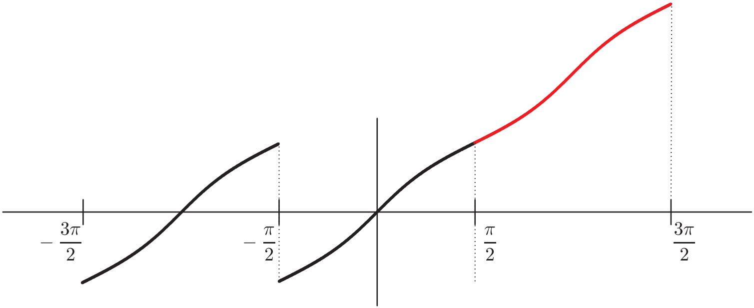
- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a, -b) = R(a, b)$, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$

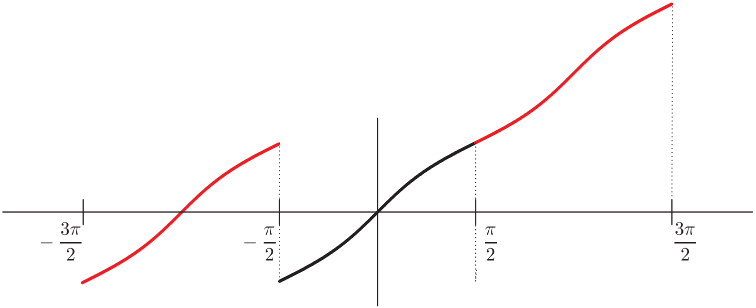


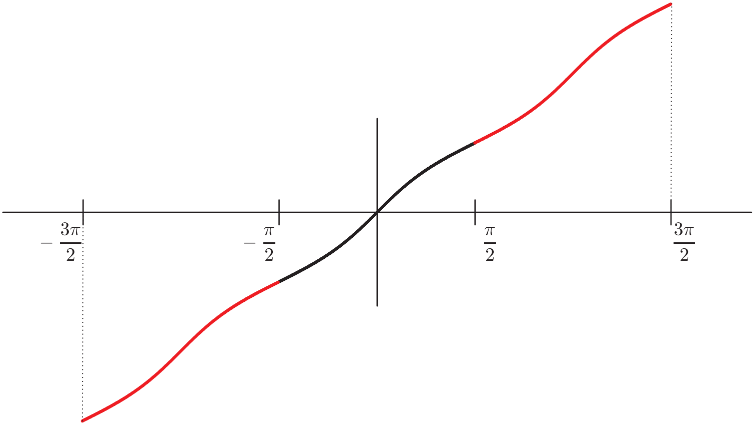
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\,dt$
$q \in \mathbf{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbf{R}$, $af \neq bc$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\,dt$

$q \in \mathbf{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbf{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**

9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm\sqrt{a}t + x$

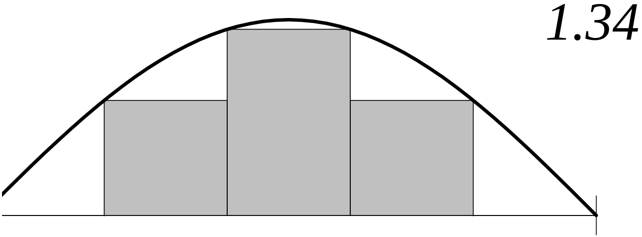
9.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

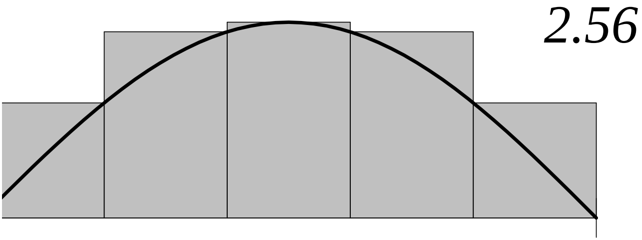
- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}$

9. Riemannův integrál

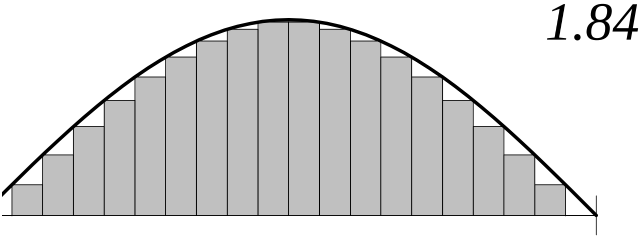
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



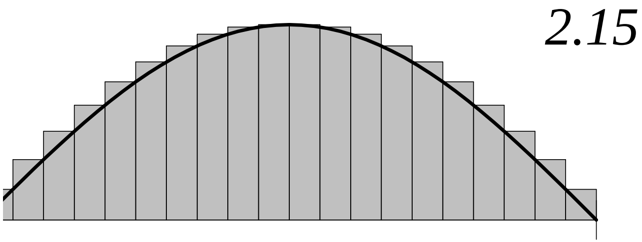
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



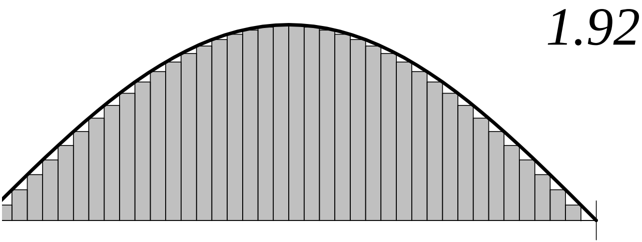
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



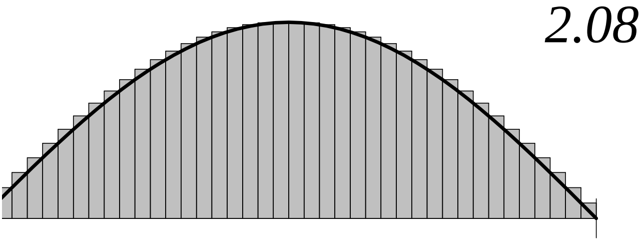
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**.

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a, b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D=\{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{j=1}^{n} M_j(x_j-x_{j-1}),\ \text{kde } M_j=\sup\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D)=\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j-x_{j-1}),\ \text{kde } m_j=\inf\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(i) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$.

(i) *Nechť D, D' jsou dělení $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f,D) \leq \underline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D)$$

(ii) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{S}(f,D_2).$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(i) *Nechť* D, D' *jsou dělení* $[a, b]$ *a* D' *zjemňuje* D. *Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(ii) *Nechť* D_1, D_2 *jsou dělení intervalu* $[a, b]$. *Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(iii) *Platí* $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$.

Důsledek 9.2

Nechť f je omezená na $[a, b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Potom

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}$ *a* $M = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}$.

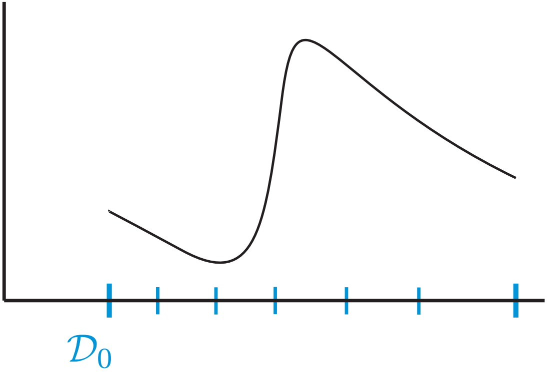
Věta 9.3

Nechť f je omezená na $[a, b]$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každé dělení D intervalu* $[a, b]$ *splňující* $\nu(D) < \delta$ *platí:*

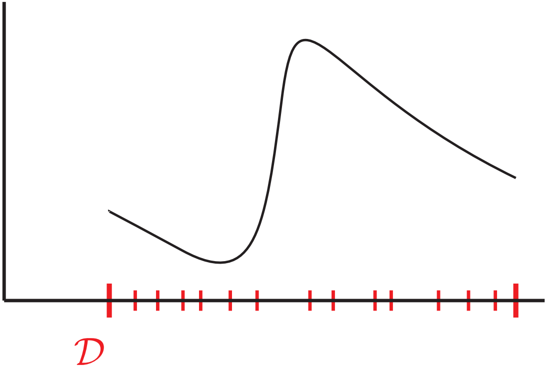
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

$Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

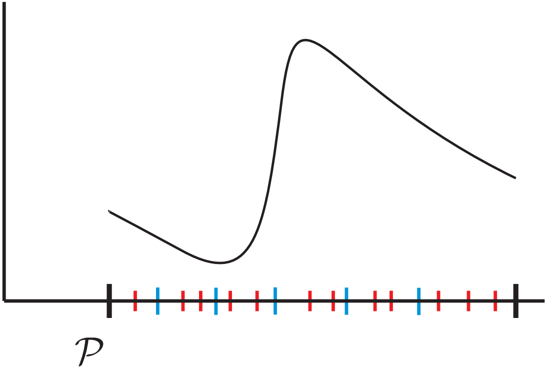


$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$



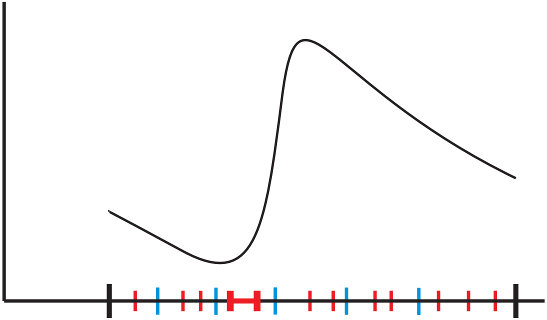
$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$



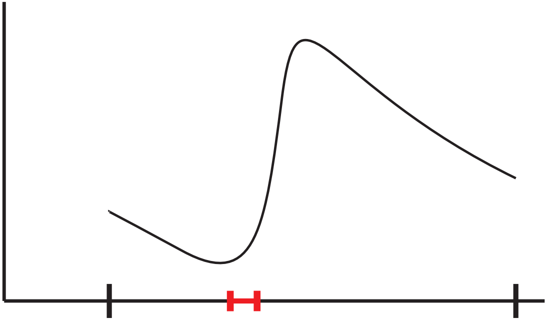
$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$



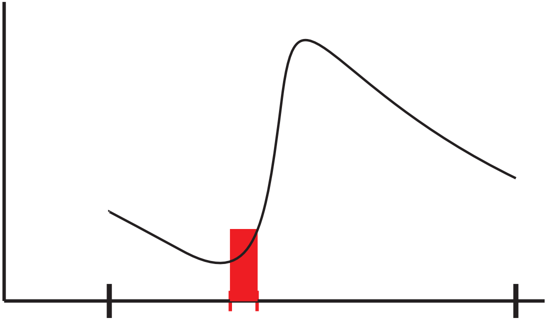
$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$



$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

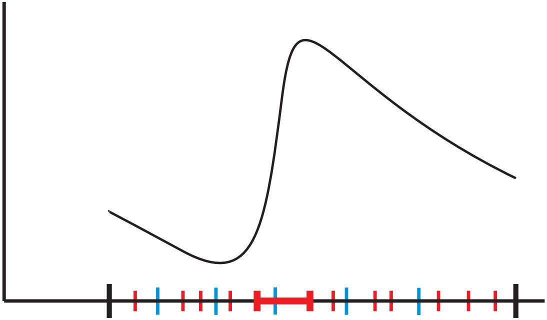
$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka}\, I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka}\, J$$



$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$

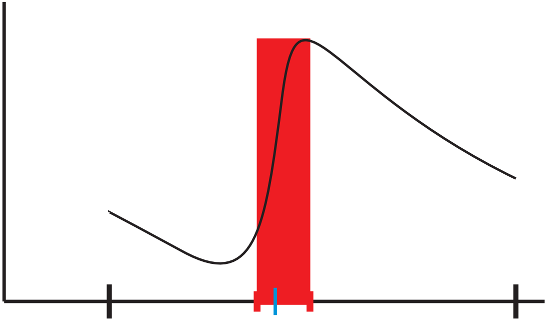
$$= \sum_{I \in \mathcal{D}, I \cap Z \neq \emptyset} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}, J \cap Z \neq \emptyset} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$



$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$

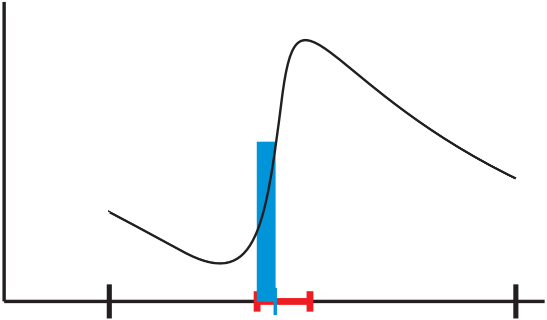
$$= \sum_{I \in \mathcal{D}, I \cap Z \neq \emptyset} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}, J \cap Z \neq \emptyset} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$



$Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{D}, I \cap Z \neq \emptyset} \sup_I f \cdot \text{délka } I - \sum_{J \in \mathcal{P}, J \cap Z \neq \emptyset} \sup_J f \cdot \text{délka } J$$

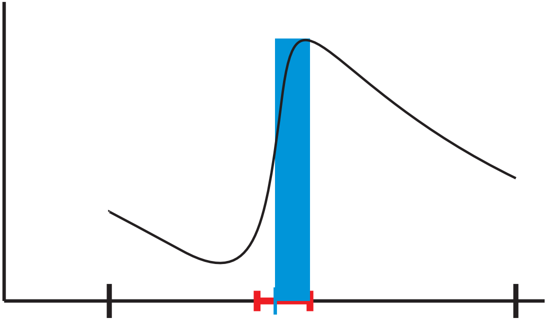


$Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ dělící body dělení $\mathcal{D}_0$

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \text{délka}\, I - \sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_J f \cdot \text{délka}\, J$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{D}, I \cap Z \neq \emptyset} \sup_I f \cdot \text{délka}\, I - \sum_{J \in \mathcal{P}, J \cap Z \neq \emptyset} \sup_J f \cdot \text{délka}\, J$$

$$\leq 2K\nu(D)2n < 4K\delta n$$



Důsledek 9.4

Nechť f je omezená na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Potom

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists D, \; D \text{ je dělení intervalu } [a, b] : \quad \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Definice

Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá** na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in I\, \forall y \in I \colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Věta 9.6

Nechť funkce f *je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu* $[a, b]$. *Pak* f *je stejnoměrně spojitá na* $[a, b]$.

Věta 9.6

Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Věta 9.7

Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

Věta 9.8

Nechť funkce f je monotónní na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, $a < b$. Pak f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $f \leq g$. *Pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ *a* $f \le g$. *Pak* $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(c) *Nechť* $a < b < c$ *jsou reálná čísla. Pak platí*

- $f \in \mathcal{R}([a,c]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \wedge \ f \in \mathcal{R}([b,c]))$,

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)

(a) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $f \le g$. Pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(c) *Nechť $a < b < c$ jsou reálná čísla. Pak platí*

- $f \in \mathcal{R}([a, c]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a, b]) \ \wedge \ f \in \mathcal{R}([b, c]))$,
- *je-li* $f \in \mathcal{R}([a, c])$, *pak* $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$*. Potom* $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $f \leq g$*. Pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(c) *Nechť* $a < b < c$ *jsou reálná čísla. Pak platí*

- $f \in \mathcal{R}([a, c]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a, b]) \ \wedge \ f \in \mathcal{R}([b, c]))$,
- *je-li* $f \in \mathcal{R}([a, c])$*, pak* $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

(d) *Nechť* $f \in \mathcal{R}([a, b])$*. Pak* $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Věta 9.10

Nechť J je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť c je libovolný pevně zvolený bod z J. Definujme na J funkci

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Věta 9.10

Nechť J je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující f $\in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ *pro každé* $\alpha, \beta \in J$*. Nechť c je libovolný pevně zvolený bod z J. Definujme na J funkci*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Potom platí

(i) *F je spojitá na J,*

Věta 9.10

Nechť J je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť c je libovolný pevně zvolený bod z J. Definujme na J funkci

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Potom platí

(i) *F je spojitá na J,*

(ii) *je-li x_0 bod spojitosti funkce f, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důsledek 9.11

(i) *Jestliže je f spojitá na intervalu (a, b), pak má na (a, b) primitivní funkci.*

Důsledek 9.11

(i) *Jestliže je f spojitá na intervalu (a, b), pak má na (a, b) primitivní funkci.*

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$ a F je funkce primitivní k f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x \to a+} F(x)$, $\lim_{x \to b-} F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x).$$

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$. *Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na* $[a, b]$. *Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

(ii) *existuje* $I \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *splňující:*

je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ *dělení intervalu* $[a, b]$, $\nu(D) < \delta$, *a* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, *pak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

10. Newtonův integrál

Definice

Řekneme, že **Newtonův integrál** funkce f na intervalu (a, b), $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}^\star$, existuje, jestliže f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x \to a+} F(x)$, $\lim_{x \to b-} F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován.

Definice

Řekneme, že **Newtonův integrál** funkce f na intervalu (a, b), $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}^\star$, existuje, jestliže f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován. Hodnotou Newtonova integrálu funkce f přes interval (a, b) pak rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Definice

Řekneme, že **Newtonův integrál** funkce f na intervalu (a, b), $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}^\star$, existuje, jestliže f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován.
Hodnotou Newtonova integrálu funkce f přes interval (a, b) pak rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Pokud $(N)\int_a^b f(t)\,dt$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Definice

Množinu všech funkcí f, které mají konvergentní Newtonův integrál od a do b, značíme $\mathcal{N}(a, b)$.

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $f \leq g$. *Pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $f \leq g$. *Pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(c) *Nechť* $-\infty \leq a < b < c \leq +\infty$ *a* $f \in \mathcal{N}(a, c)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$, $f \in \mathcal{N}(b, c)$ *a platí* $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)

(a) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom* $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť* $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $f \leq g$. *Pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(c) *Nechť* $-\infty \leq a < b < c \leq +\infty$ *a* $f \in \mathcal{N}(a, c)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$, $f \in \mathcal{N}(b, c)$ *a platí* $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

(d) *Nechť* $-\infty \leq a < b < c \leq +\infty$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$, $f \in \mathcal{N}(b, c)$ *a* f *je spojitá v* b. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, c)$.

Věta 10.2

Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 10.3 (substituce pro určitý integrál)

Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ *splňuje* $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ *a* ω *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β). *Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Věta 10.4 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$ a F je definována na jistém prstencovém okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} F(x)$ existuje vlastní, právě když je splněna ***Bolzanova-Cauchyova podmínka****:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \,\exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \quad \forall x, y \in P(a,\delta) \colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Věta 10.5

Nechť f je omezená a spojitá na omezeném intervalu (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 10.6 (srovnávací kritérium)

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$. *Jestliže pro funkce* f *a* g *platí* $0 \leq f \leq g$ *na* $[a, b)$, f *je spojitá na* $[a, b)$ *a* $g \in \mathcal{N}(a, b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 10.7 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$*. Jestliže pro nezáporné spojité funkce* f *a* g *na* $[a, b)$ *platí* $\lim_{x \to b-} f(x)/g(x) = c \in (0, \infty)$*, potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$*, právě když* $g \in \mathcal{N}(a, b)$*.*

Věta 10.8

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je nerostoucí, nezáporná a spojitá na* $[a, b]$. *Potom*

$$g(a) \inf_{x \in [a,b]} \int_a^x f \le \int_a^b fg \le g(a) \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x f.$$

Věta 10.9 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *je spojitá. Její primitivní funkci na* (a, b) *označme* F. *Dále nechť* $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *je monotónní a spojitá na* $[a, b)$. *Potom platí*

(A) *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* g *je omezená, potom* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(D) *Jestliže je* F *omezená na* (a, b) *a* $\lim_{x \to b-} g(x) = 0$, *potom* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 10.10 (první věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,*
$g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je nezáporná,* $g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$*.*
Potom existuje $\xi \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Věta 10.11 (druhá věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$. *Potom existuje* $\xi \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

Aplikace určitého integrálu

Definice

Křivkou budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $[a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Definice

Křivkou budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbf{R}^n$.

Definice

Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Lemma 10.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá (tj.* f_i *je spojitá,* $i = 1, \dots, n$*). Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| := \left\| \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right] \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Lemma 10.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá (tj.* f_i *je spojitá,* $i = 1, \dots, n$*). Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| := \left\| \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right] \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Věta 10.13 (délka křivky)

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2 + \cdots + (\varphi_n')^2} \quad \left(= \int_a^b \|\varphi'\|\right).$$

Věta 10.14 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Věta 10.14 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\mathrm{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Věta 10.14 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\mathrm{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Povrch pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Věta 10.15 (integrální kritérium)

Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $[n_0, +\infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n = f(n)$ pro $n \geq n_0$.

Věta 10.15 (integrální kritérium)

Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $[n_0, +\infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n = f(n)$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konverguje, právě když } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Věta 10.16 (zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$*,* $a < x$*, a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci.*

Věta 10.16 (zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)

Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Potom

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

11. Metrické prostory 1

Definice

Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P, ρ), kde P je množina, $\rho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(i) $\forall x, y \in P\colon \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in P\colon \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in P\colon \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme **metrika na P**.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $x \in P,\ r > 0$. Množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r nebo také **okolím bodu** x.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $x \in P,\ r > 0$. Množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r nebo také **okolím bodu** x.

(ii) Nechť $x \in P,\ r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P,\ x \in P$. Řekneme, že $x \in P$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P,\ x \in P$. Řekneme, že $x \in P$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

(ii) Množina $M \subset P$ se nazývá **otevřená v** (P, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P,\ x \in P$. Řekneme, že $x \in P$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

(ii) Množina $M \subset P$ se nazývá **otevřená v** (P, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

(iii) **Vnitřkem množiny** M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$.

Věta 11.1 (vlastnosti otevřených množin)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor.*

(i) *Prázdná množina a celý prostor P jsou otevřené v* (P, ρ).

Věta 11.1 (vlastnosti otevřených množin)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor.*

(i) *Prázdná množina a celý prostor* P *jsou otevřené v* (P, ρ).

(ii) *Nechť* A *je neprázdná množina indexů. Nechť množiny* $G_\alpha \subset P$, $\alpha \in A$, *jsou otevřené v* (P, ρ). *Pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* (P, ρ).

Věta 11.1 (vlastnosti otevřených množin)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) *Prázdná množina a celý prostor P jsou otevřené v (P, ρ).*

(ii) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $G_\alpha \subset P, \ \alpha \in A$, jsou otevřené v (P, ρ). Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v (P, ρ).*

(iii) *Nechť $m \in \mathbf{N}$. Nechť množiny $G_i, \ i = 1, \dots, m$, jsou otevřené v (P, ρ). Pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ je otevřená množina v (P, ρ).*

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

(ii) **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

(ii) **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

(iii) **Uzávěrem množiny** M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

(ii) **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

(iii) **Uzávěrem množiny** M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

(iv) Řekneme, že množina M je **uzavřená v** (P, ρ), jestliže obsahuje všechny své hraniční body (tj. $H(M) \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Věta 11.2 (vlastnosti uzavřených množin)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) *Nechť $F \subset P$. Potom F je uzavřená v (P, ρ), právě když $P \setminus F$ je otevřená v (P, ρ).*

Věta 11.2 (vlastnosti uzavřených množin)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor.*

(i) *Nechť* $F \subset P$. *Potom* F *je uzavřená v* (P, ρ), *právě když* $P \setminus F$ *je otevřená v* (P, ρ).

(ii) *Prázdná množina a celý prostor* P *jsou uzavřené v* (P, ρ).

Věta 11.2 (vlastnosti uzavřených množin)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor.*

(i) *Nechť* $F \subset P$. *Potom* F *je uzavřená v* (P, ρ), *právě když* $P \setminus F$ *je otevřená v* (P, ρ).

(ii) *Prázdná množina a celý prostor* P *jsou uzavřené v* (P, ρ).

(iii) *Nechť* A *je neprázdná množina indexů. Nechť množiny* $F_\alpha \subset P,\ \alpha \in A$, *jsou uzavřené v* (P, ρ). *Pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* (P, ρ).

Věta 11.2 (vlastnosti uzavřených množin)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) *Nechť $F \subset P$. Potom F je uzavřená v (P, ρ), právě když $P \setminus F$ je otevřená v (P, ρ).*

(ii) *Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené v (P, ρ).*

(iii) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $F_\alpha \subset P$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v (P, ρ). Pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v (P, ρ).*

(iv) *Nechť $m \in \mathbf{N}$. Nechť množiny F_i, $i = 1, \dots, m$, jsou uzavřené v (P, ρ). Pak $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ je uzavřená množina v (P, ρ).*

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, a $x \in P$.
Vzdáleností bodu x **od množiny** A rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, a $x \in P$. **Vzdáleností bodu** x **od množiny** A rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Diametrem neprázdné množiny $B \subset P$ rozumíme

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\rho(x, y);\ x, y \in B\}$$

a klademe $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Pokud $\operatorname{diam} B < \infty$, pak říkáme, že B je **omezená** množina v (P, ρ).

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor,* $A \subset P$*,* $B \subset P$*. Pak platí:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor,* $A \subset P$*,* $B \subset P$*. Pak platí:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud* $A \subset B$*, pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$*,*

(iii) $\overline{A}$ *je uzavřená, tj.* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$*,*

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor,* $A \subset P$, $B \subset P$*. Pak platí:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(iii) $\overline{A}$ *je uzavřená, tj.* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(iii) $\overline{A}$ *je uzavřená, tj.* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(v) $\overline{A} = \{x \in P;\ \rho(x, A) = 0\}$, *pokud* $A \neq \emptyset$,

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)

Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(iii) $\overline{A}$ *je uzavřená, tj.* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(v) $\overline{A} = \{x \in P;\ \rho(x, A) = 0\}$, *pokud* $A \neq \emptyset$,

(vi) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, *a tedy* A *je omezená, právě když* $\overline{A}$ *je omezená.*

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k $y \in P$ v (P, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$.

Definice

Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k $y \in P$ v (P, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (P, ρ). **Konvergentní posloupností v** (P, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků P, která má limitu v (P, ρ).

Věta 11.4 (vlastnosti konvergence)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor. Pak platí:*

(i) *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků z* P *a existují* $n_0 \in \mathbf{N}$, $y \in P$ *takové, že* $x_n = y$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Pak* $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.

Věta 11.4 (vlastnosti konvergence)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor. Pak platí:*

(i) *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků z* P *a existují* $n_0 \in \mathbf{N}$, $y \in P$ *takové, že* $x_n = y$ *pro každé* $n \geq n_0$*. Pak* $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$*.*

(ii) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 11.4 (vlastnosti konvergence)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor. Pak platí:*

(i) *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků z* P *a existují* $n_0 \in \mathbf{N}$, $y \in P$ *takové, že* $x_n = y$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Pak* $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.

(ii) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(iii) *Nechť* $A \subset P$. *Množina* A *je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z* A *leží v* A.

Věta 11.4 (vlastnosti konvergence)

Nechť (P, ρ) *je metrický prostor. Pak platí:*

(i) *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků z* P *a existují* $n_0 \in \mathbf{N}$, $y \in P$ *takové, že* $x_n = y$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Pak* $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.

(ii) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(iii) *Nechť* $A \subset P$. *Množina* A *je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z* A *leží v* A.

(iv) *Nechť* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost vybraná z posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *prvků* P, *tj.,* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Jestliže* $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = y$.

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.
Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \ \forall x \in M : \\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

11.3 Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$.
Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in M : \\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

- f je **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,

- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,

- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,
- f je **spojité**, jestliže je spojité na P.

Věta 11.5 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) *a* (Q, σ) *jsou metrické prostory,* $f : P \to Q$*. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Zobrazení* f *je spojité.*

Věta 11.5 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

Věta 11.5 (charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

(iii) *Pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (P, ρ).*

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$.

Definice

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hromadným bodem množiny** M, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\colon \; M \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji **derivací množiny** M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A.

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$$
$$\forall x \in A, x \neq a \colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \\ \forall x \in A, x \neq a \colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Je-li $A = X$, říkáme, že f má v bodě a **limitu** b.

Označení

Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$.

Označení

Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Místo $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ píšeme jen $\lim_{x \to a} f(x)$.

Věta 11.6 (Heineova věta)

Nechť (X, ρ) *a* (Y, σ) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$.

Věta 11.6 (Heineova věta)

Nechť (X, ρ) *a* (Y, σ) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$. *Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

(ii) *pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *prvků množiny* $A \setminus \{a\}$ *splňující* $\lim x_n = a$ *platí* $\lim f(x_n) = b$.

Věta 11.7 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a,\delta) \cap A) \subset B$,

Věta 11.7 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,

Věta 11.7 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Věta 11.7 (spojitost složeného zobrazení v bodě)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Pak zobrazení $g \circ f$ *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A.

Věta 11.8 (spojitosti složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* $f : X \to Y$ *a* $g : Y \to Z$ *jsou spojitá zobrazení. Pak zobrazení* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité.*

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z.

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí:

- *existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,*

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí:

- *existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,*
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}$, $\eta > 0$, *takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X, ρ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z*. Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$, *takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

(S) *zobrazení* g *je spojité v bodě* b *vzhledem k* B,

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení)

Nechť (X,ρ), (Y,σ) *a* (Z,ω) *jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $f((A \cap B(a,\delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y\to b, y\in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

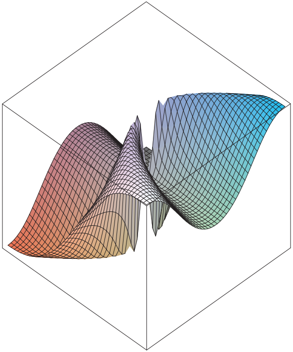
(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$, *takové, že pro každé* $x \in B(a,\eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

(S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k B,*

pak $\lim_{x\to a, x\in A} g \circ f(x) = c$.

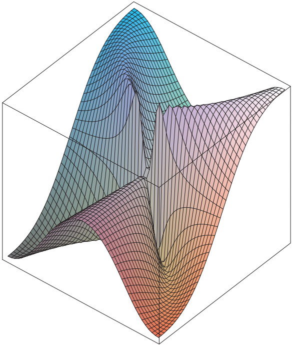
11.3 Spojitá zobrazení

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



11.3 Spojitá zobrazení

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



Definice

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, je spojité a f^{-1} je také spojité. Řekneme, že prostory (X, ρ) a (Y, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje bijekce $g : X \to Y$, která je homeomorfismem.

12. Funkce více proměnných 1

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$.

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

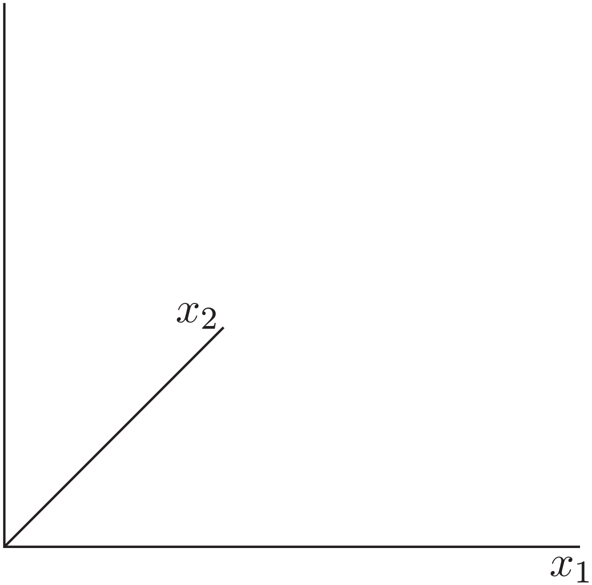
Definice

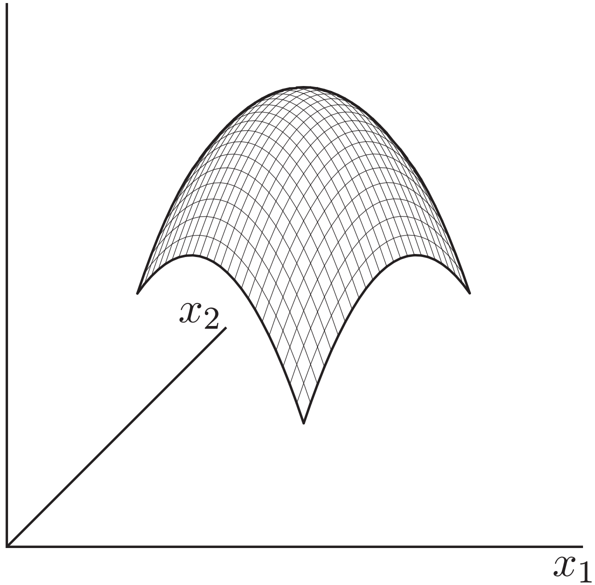
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

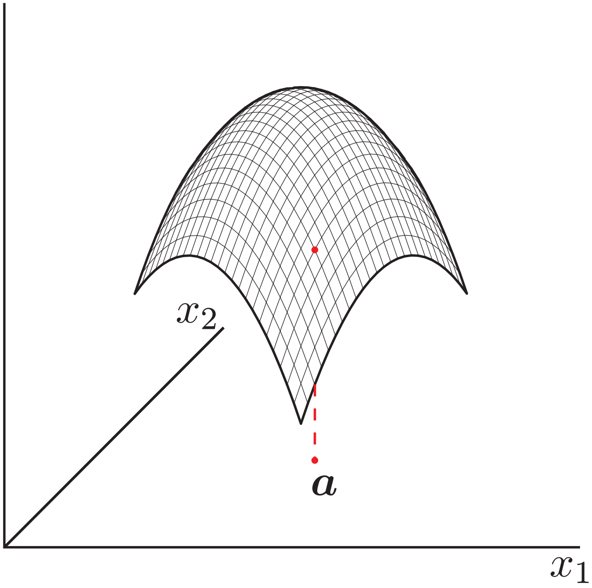
Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

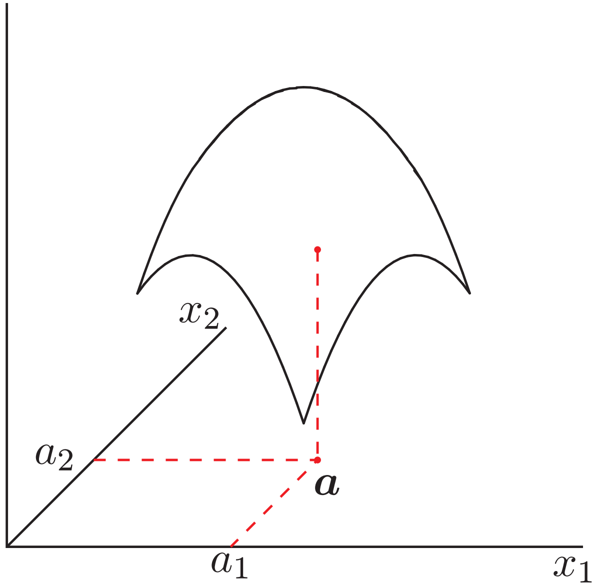
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

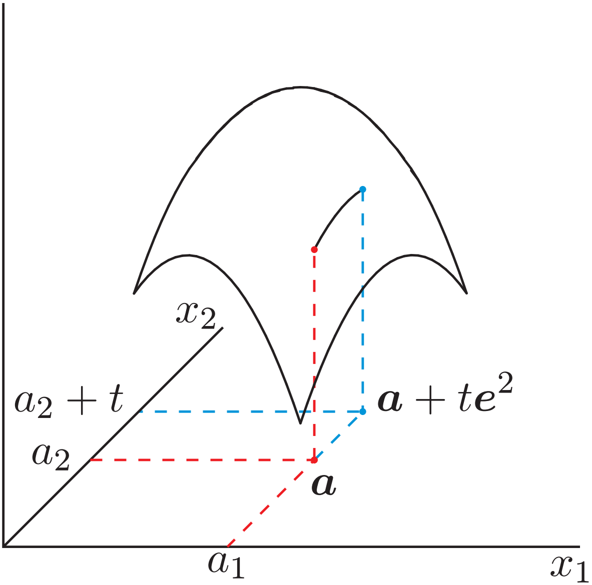

x_2
x_1



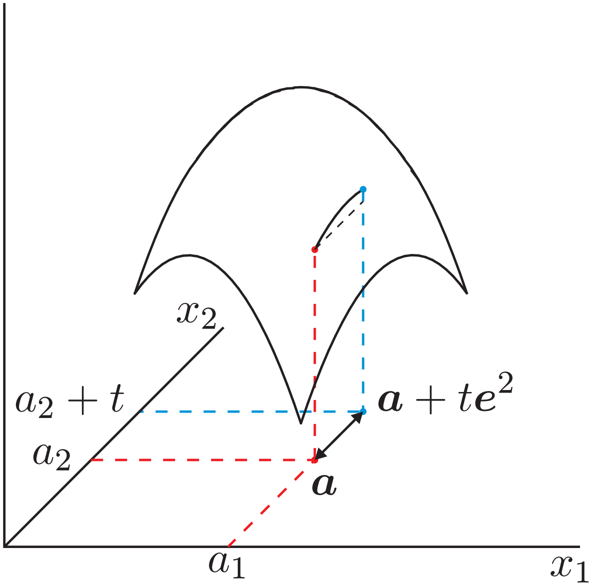
x_2
x_1


x_2
$\boldsymbol{a}$
x_1


x_2
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1



x_2
$a_2 + t$
$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^2$
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1


x_2
$a_2 + t$
$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^2$
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1

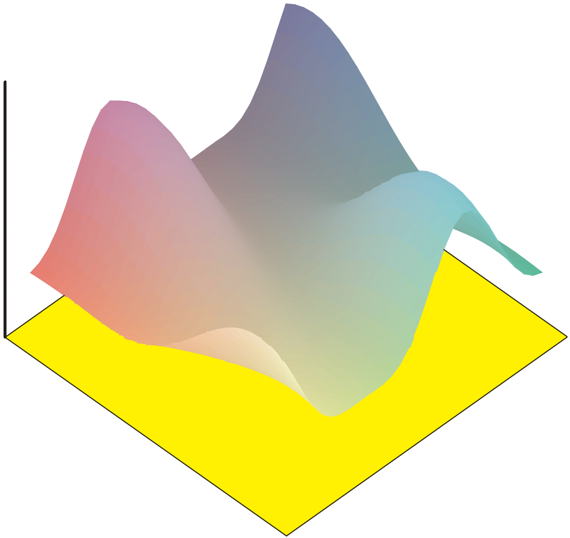
Definice

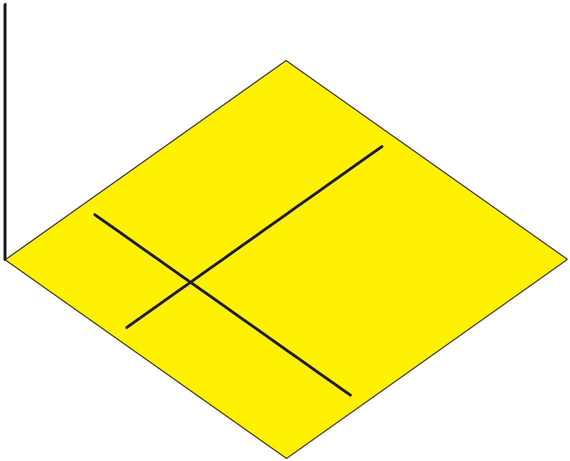
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je lineární zobrazení.

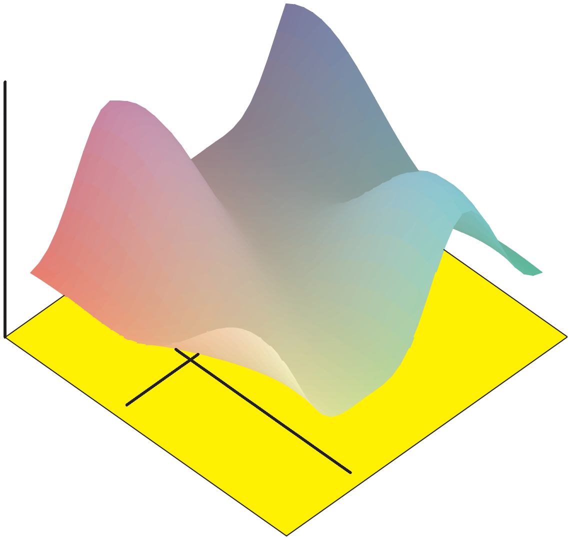
Definice

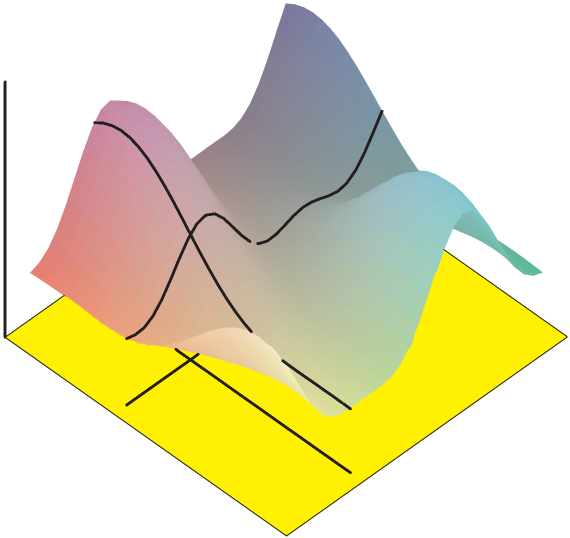
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$, jestliže platí

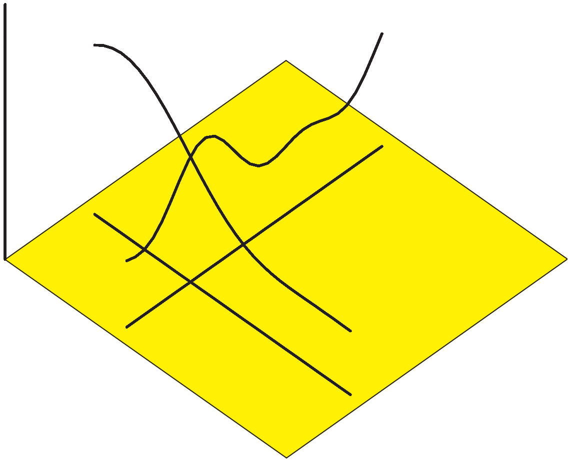
$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

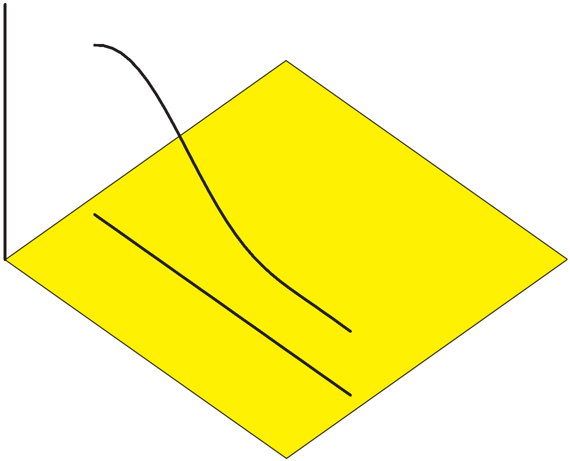


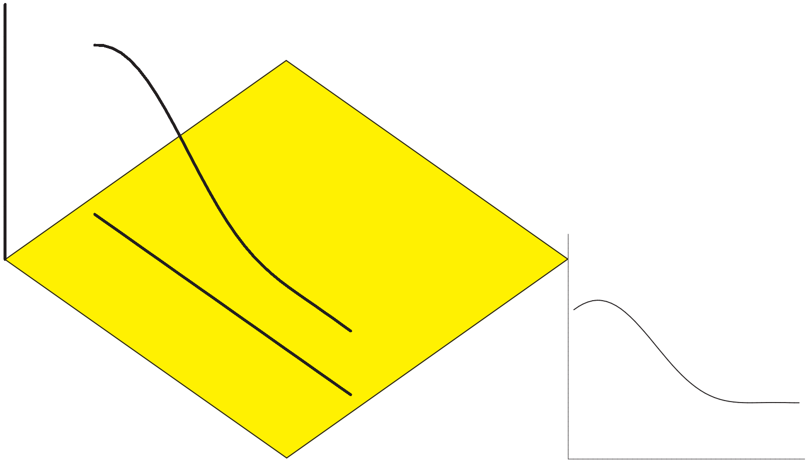


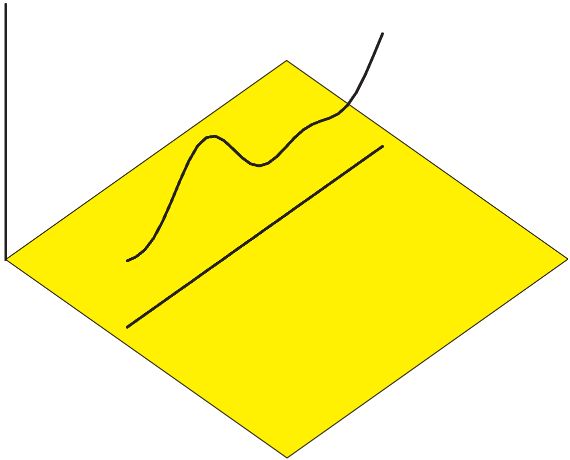


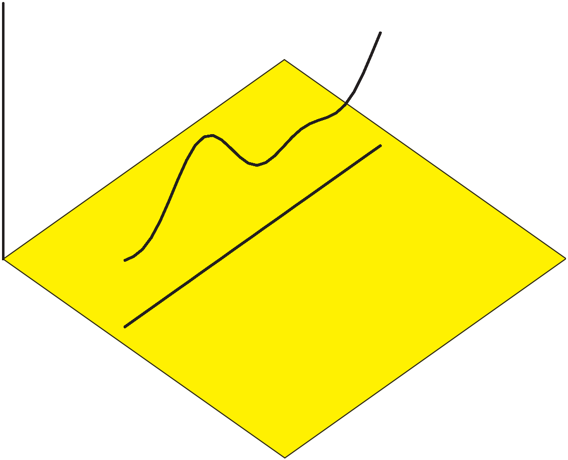


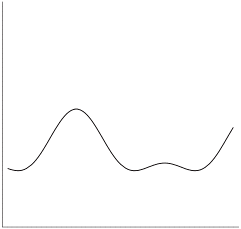












Věta 12.1 (vztah totálního diferenciálu a parciální derivace)

Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Potom existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$$

a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$L(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n.$$

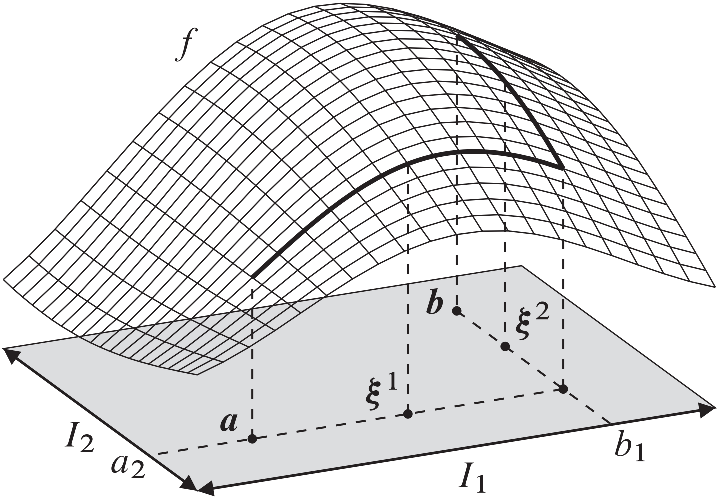
Věta 12.2

Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ totální diferenciál, je f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Lemma 12.3

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^n \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i)(b_i - a_i).$$



f
$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{\xi}^2$
$\boldsymbol{\xi}^1$
$\boldsymbol{a}$
I_2
a_2
I_1
b_1

Věta 12.4

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots,$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\boldsymbol{a}$.

Věta 12.4

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots,$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\boldsymbol{a}$. Potom má f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Definice

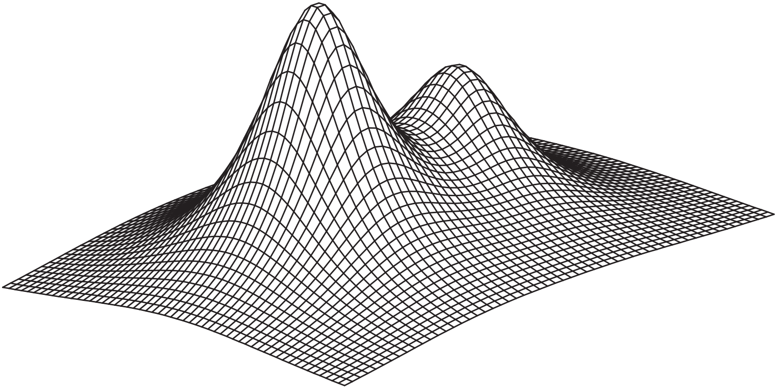
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rozumíme (vlastní) limitu

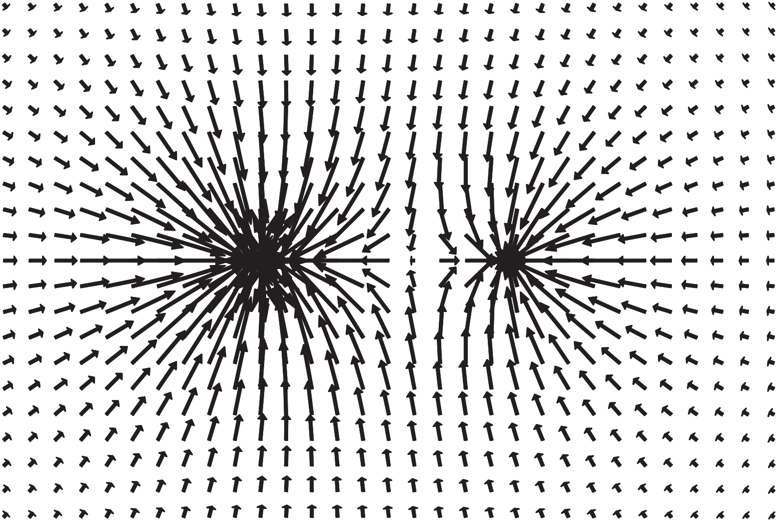
$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Definice

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$** jako vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) \in \mathbf{R}^n.$$





Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$.

Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Pak platí

(i) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,

Věta 12.5

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *a* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$*. Nechť existuje* $f'(\boldsymbol{a})$*. Pak platí*

(i) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,

(ii) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ ||\boldsymbol{v}|| = 1\} = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||$.

Definice

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení.

Definice

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení** F **v bodě** $\boldsymbol{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{||F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})||}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

Věta 12.6

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ derivaci L. Potom je L reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Věta 12.7

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $F'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

Věta 12.7

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $F'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

Věta 12.8

Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$, jsou spojité v $\boldsymbol{a}$. Potom $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.

Lemma 12.9

Nechť $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení. Pak existuje* $C \in \mathbf{R}$ *takové, že* $||L(\boldsymbol{x})|| \leq C||\boldsymbol{x}||$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$*.*

Lemma 12.9

Nechť $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení. Pak existuje* $C \in \mathbf{R}$ *takové, že* $||L(\boldsymbol{x})|| \leq C||\boldsymbol{x}||$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$*.*

Definice

Normou lineárního zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ rozumíme číslo

$$||L|| = \sup \left\{ \frac{||L(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||};\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \right\}.$$

Lemma 12.10

Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom existují $C \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí $||f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq C||\boldsymbol{h}||$.

Lemma 12.10

Nechť f *je zobrazení z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *a* $f'(\boldsymbol{a})$ *existuje. Potom existují* $C \in \mathbf{R}$ *a* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že pro každé* $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ *platí* $||f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq C||\boldsymbol{h}||$.

Věta 12.11 (derivace složeného zobrazení)

Nechť f *je zobrazení z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}^k$, g *je zobrazení z* $\mathbf{R}^k$ *do* $\mathbf{R}^s$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *a* $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^k$. *Jestliže existují* $f'(\boldsymbol{a})$ *a* $g'(\boldsymbol{b})$, *pak existuje* $(g \circ f)'(\boldsymbol{a})$ *a platí* $(g \circ f)'(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b}) \circ f'(\boldsymbol{a})$.

Důsledek 12.12 (řetízkové pravidlo)

Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *mají v bodě* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *totální diferenciál a funkce* g *z* $\mathbf{R}^k$ *do* $\mathbf{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \dots, f_k(\boldsymbol{a}))$ *totální diferenciál. Definujme funkci* h *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *předpisem*

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Důsledek 12.12 (řetízkové pravidlo)

Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *mají v bodě* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ *totální diferenciál a funkce* g *z* $\mathbf{R}^k$ *do* $\mathbf{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \dots, f_k(\boldsymbol{a}))$ *totální diferenciál. Definujme funkci* h *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}$ *předpisem*

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Potom má h *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *totální diferenciál a pro* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Věta 12.13 (o přírůstku funkce)

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$.

Věta 12.13 (o přírůstku funkce)

Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\xi \in L$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\xi)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Věta 12.14 (věta o přírůstku vektorové funkce)

Nechť $n, k \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\{||f'(\boldsymbol{x})||;\ \boldsymbol{x} \in G\} \leq K.$$

Definice

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Věta 12.14 (věta o přírůstku vektorové funkce)

Nechť $n, k \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\{||f'(\boldsymbol{x})||;\ \boldsymbol{x} \in G\} \leq K.$$

*Pak f je **lipschitzovské s konstantou** K, tj.*

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G:\ ||f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq K||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}||.$$