Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

LS 2014-15, verze C, 4. 6. 2015

---

1. Napište Taylorův polynom $T_4^{f,0}$, kde

$$f(x) = x\sqrt[3]{1-3x} - x\sqrt[4]{1-4x}, \quad x \in (-\infty, \tfrac{1}{4}).$$

Určete koeficient $a \in \mathbb{R}, a > 0$, tak, aby platilo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a\sin(\frac{x}{a}) - \sin x} = 6.$$

(15 bodů)

2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}\,\mathrm{d}x.$$

(15 bodů)

3. Vyšetřete konvergenci následujícího Newtonova integrálu v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^1 \log(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

(15 bodů)

4. Nechť $F = (F_1, F_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \left(x\sin y \cdot \sin z, x^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{pro } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \\ (0,0) & \text{pro } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

(a) Ukažte, že v bodě $(\pi, 1, 0)$ existuje derivace zobrazení F a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0,0)$, pokud existuje.

(15 bodů)