Matematická analýza 1
(velmi předběžná verze)

15. května 2015

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

KAPITOLA 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí) nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu** 1, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé." a „Praha je hlavní město Kanady." jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!" nebo „Kéž by už byl konec." nikoli. Tvrzení „Číslo π^π je iracionální." je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A." K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A.", případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne-". Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B." Dále používáme také obraty „Platí A a platí B.", „Platí A i B." Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B, pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B." Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo“ v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B.“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Místo výroku „Jestliže platí A, potom platí B.“ používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B. Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A, pak platí B.“ v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B, zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě.“ Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoliv pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [**16**, II.8].

1.1.7. Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Místo „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ používáme také následující obraty.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní s výrokem B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce)**.** Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
(b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
(c) $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \Leftrightarrow \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$
(d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
(e) $\big((A \vee B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big(A \vee (B \vee C)\big)$
(f) $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$
(g) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A, B a C.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ∎

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky $A_1, \dots, A_n$ pomocí konjunkce, nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge \big((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4\big), \qquad \big((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1\big) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ pro disjunkci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol $\wedge$ a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3." znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$."

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

(a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
(d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Platnost zbývajících výroků lze ověřit obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ■

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \tag{1.1}$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ■

1.1.14. Věta. Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(c) $\big((A \vee B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big)$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ∎

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. Výroková forma $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z něhož vznikne výrok, když za proměnné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme po řadě prvky z daných množin $M_1, M_2, \dots, M_n$. Takovou výrokovou formu s n proměnnými a příslušnými množinami $M_1, M_2, \dots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

1.1.17. Pojem množiny v předchozí definici používáme v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Zpřesňující výklad je uveden v Oddílu 1.3 a Dodatku A.

1.1.18. Příklad. Nechť výroková forma V má tvar „x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme prvky z množiny všech českých měst. Pak $V(\text{Praha})$ je pravdivý výrok, ale výrok $V(\text{Plzeň})$ neplatí.

1.1.19. Poznámka. Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V Příkladu 1.1.18 je predikátem „být hlavním městem České republiky“. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.20. Definice. Nechť $A(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(a) Výrok „Pro každé $x \in P$ platí $A(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in P : A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje $x \in P$ takové, že platí $A(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in P : A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

(c) Výrok „Existuje právě jedno $x \in P$ takové, že platí $A(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists! x \in P : A(x).$$

1.1.21. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly $\forall$ a $\exists$ otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.22 (kvantifikace přes prázdnou množinu)**.** Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Jestliže P je prázdná množina, potom výrok

$$\forall x \in P : V(x)$$

považujeme za pravdivý. Na druhé straně výrok

$$\exists x \in P : V(x)$$

je zřejmě nepravdivý.

1.1.23. Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky. Mějme výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{aligned} &\forall x \in M_1 : V(x, y), \qquad && \exists x \in M_1 : V(x, y), \\ &\forall y \in M_2 : V(x, y), && \exists y \in M_2 : V(x, y). \end{aligned}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x. Z těchto forem lze utvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x \in M_1 : \bigl(\forall y \in M_2 : V(x, y)\bigr), \qquad \exists y \in M_2 : \bigl(\exists x \in M_1 : V(x, y)\bigr).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \in M_1 \ \forall y \in M_2 \colon V(x,y), \qquad \exists y \in M_2 \ \exists x \in M_1 \colon V(x,y).$$

Analogicky můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.24 (intuitivní pojetí matematické logiky)**.** V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x“ a „existuje x“. Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [**14**] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.25 (zúžení výrokové formy)**.** Uveďme nejprve dvě následující vlastnosti. Nechť $V(x), x \in M_1$, je výroková forma a $M_2 \subset M_1$. Potom platí:

(a) $\big(\forall x \in M_1 \colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x \in M_2 \colon V(x)\big)$,
(b) $\big(\exists x \in M_2 \colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x \in M_1 \colon V(x)\big)$.

Výrok (a) říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny M_1, pak platí i pro každý prvek x z množiny M_2. Výrok (b) tvrdí, že pokud v podmnožině M_2 existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině M_1.

1.1.26 (pořadí kvantifikátorů)**.** Uveďme dále tři základní vlastnosti týkající se pořadí kvantifikátorů, které budeme často používat. Nechť $V(x,y), x \in M_1, y \in M_2$ je výroková forma. Potom platí:

- $\big(\forall x \in M_1 \ \forall y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y \in M_2 \ \forall x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1 \ \exists y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y \in M_2 \ \exists x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1 \ \forall y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Rightarrow \big(\forall y \in M_2 \ \exists x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$.

První dvě vlastnosti říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejného typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

1.1.27. Příklad. Nechť $A(m,d), m \in M, d \in D$, značí výrokovou formu

$$\text{„Muž } m \text{ je otcem dítěte } d\text{.“}, \quad m \in M, d \in D,$$

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D\ \exists m \in M : A(m,d), \qquad \exists m \in M\ \forall d \in D : A(m,d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.28. Označení. Nechť $V(x,y)$ je výroková forma, kde za proměnné x a y bereme prvky množiny A. V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A\ \forall y \in A : V(x,y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A : V(x,y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A\ \exists y \in A : V(x,y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A : V(x,y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.29. Označení. Nechť A a P jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Zápis

$$\forall x \in M, P(x) : A(x), \tag{1.2}$$

označuje výrok

$$\forall x \in M : \big(P(x) \Rightarrow A(x)\big).$$

Výrok (1.2) čteme: „Pro každé x z M splňující P platí $A(x)$." Zápis

$$\exists x \in M, P(x) : A(x) \tag{1.3}$$

označuje výrok

$$\exists x \in M : \big(P(x) \wedge A(x)\big).$$

Výrok (1.3) čteme: „Existuje x z M splňující P, pro které platí $A(x)$." Obdobnou symboliku používáme v případě, že A je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená konvence zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.30 (negace výroků s kvantifikátory)**.** Nechť V je výroková forma s proměnnou $x \in M$. Negaci výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M: \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg\big(V(x)\big)$. Podobně negaci výroku

$$\exists x \in M: V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x \in M: \neg V(x).$$

Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x): A(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x \in M: \big(P(x) \Rightarrow A(x)\big).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x \in M: \neg\big(P(x) \Rightarrow A(x)\big),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x \in M: \big(P(x) \wedge \neg A(x)\big).$$

Poslední formuli lze přepsat jako

$$\exists x \in M, P(x): \neg A(x).$$

Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x): A(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x): \neg A(x).$$

Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a znegujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.31. Příklad. Negaci výroku

$$\forall x \in M_1\ \exists y \in M_2\ \forall z \in M_3: V(x, y, z)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2\ \exists z \in M_3: \neg V(x, y, z).$$

Další příklady jsou uvedeny v Oddílu 1.9.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \ldots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odečítat, násobit a dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), $\cdot$ (krát) a $-$ (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Oddílu 1.5 a Dodatku B. Logická struktura hlavní linie výkladu však nebude narušena používáním dosud nedefinovaných pojmů a nedokázaných tvrzení.

1.2.2. V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.[1] **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku A.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,

[1] Slovo lemma je středního rodu.

- důkaz matematickou indukcí.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uveďme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz)**.** Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B. Při přímeme důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1, pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2, z něho pak dokážeme C_3, a tak dále až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B. Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1,\ C_1 \Rightarrow C_2,\ C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n,\ C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom nalezli vhodné střední členy $C_1, \dots, C_n$, které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz)**.** Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (viz Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoliv důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem)**.** Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ (viz Větu 1.1.12(c)). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C, který je neplatný, pak nemůže platit ani výrok $A \wedge \neg B$ (z platného výroku nelze odvodit výrok neplatný). Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozborem případů)**.** Má-li dokazované tvrzení tvar $(A \vee B) \Rightarrow C$, pak podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr C za předpokladu, že platí A. Pak dokazujeme C za předpokladu, že je splněn předpoklad díky B. Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $A \vee B$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. Zde opět není k dispozici žádný algoritmus, jak taková A a B nalézt, a je třeba použít vlastního důvtipu.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí)**.** Tuto metodu lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n), \tag{1.4}$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. V prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(1)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. **indukční předpoklad**) a odvodíme platnost $V(n+1)$. Z těchto dvou kroků pak vyplývá platnost výroku (1.4).

V případě, že chceme dokázat výrok tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: V(n),$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $V(n)$, $n \in \{j \in \mathbb{Z};\ j \geq n_0\}$, je výroková forma, pak v prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(n_0)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big).$$

Korektnost této důkazové metody souvisí podstatně s konstrukcemi množiny přirozených čísel a množiny celých čísel, kterým se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.8 (důkaz úplnou matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \tag{1.5}$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(1) platí $V(1)$,
(2) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\big(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n: V(j)\big) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (2) úplné matematické indukce se liší od kroku (2) matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali platnost pouze $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \ldots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (1) a (2). Ukážeme, že pak platí (1.5). Definujme výrokovou formu $W(n), n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: W(n). \tag{1.6}$$

Výrok $W(1)$ platí podle (1). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (2) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.6). Z výroku (1.6) pak okamžitě plyne (1.5).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.9).

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.9. Příklad. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ■

1.2.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $k < l$, a tedy $n = 2l - 1 \geq 2(k + 1) - 1 = 2k + 1 > 2k = n$, což není možné. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.11. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ je liché. Potom p^n je liché číslo. (Symbol p^n značí $\underbrace{p \cdots p}_{n \text{ krát}}$ a $p^0 = 1$. Podrobně je tento zápis zaveden v paragrafu 1.6.1(b).)

Řešení. Nechť $p \in \mathbb{N}$ je liché. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $p^1 = p$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n, tj. předpokládejme, že číslo p^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2l - 1$. Potom platí

$$p^{n+1} = p^n \cdot p = (2k - 1) \cdot (2l - 1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l-1) + l(k-1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo p^{n+1} je liché. ♣

1.2.12. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ je **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, značíme $d \mid n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě 1 i n dělitelem n. Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n. Například čísla $2, 3, 5, 7, 11$ jsou prvočísla.

1.2.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l - 1)$.

Řešení. K důkazu použijeme úplnou matematickou indukci. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^0(2 \cdot 1 - 1)$.

Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l-1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n+1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n + 1$ číslo liché, pak existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2l - 1$. Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n + 1$ sudé, pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l' - 1)$. Potom stačí položit $k = k' + 1$ a $l = l'$.

Zbývá dokázat, že čísla k, l jsou pro dané $n \in \mathbb{N}$ určena jednoznačně. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l - 1) = 2^{k'-1}(2l' - 1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l - 1 = 2^{k'-k}(2l' - 1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l - 1 = 2l' - 1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.14. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže je n^2 sudé, potom i n je sudé.

Řešení. Provedeme nepřímý důkaz tvrzení, tj. dokážeme tvrzení, že pokud je n liché, pak je i n^2 liché. Toto tvrzení ale platí podle Příkladu 1.2.11. ♣

1.2.15. Příklad (Hippasus[2]). Číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (viz Větu 1.6.30).

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom existují $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.13 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny $\mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že $p = 2^{k_1}(2l_1 - 1)$ a $2^{k_2}(2l_2 - 1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2-1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1-1)$ a $2l_2-1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z našeho předpokladu plyne, že $p^2 = 2q^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 dostáváme, že i p je sudé, a tedy $p^2 = 4k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Z výchozí rovnosti $p^2 = 2q^2$ dostáváme, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 je číslo q sudé. Odtud plyne, že p a q mají společného dělitele 2. To je ovšem spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ■

[2]Hippasus (5. stol. p. n. l.)

1.2.16. Příklad. Je-li $n \in \mathbb{N}$, potom je číslo $n(n+1)$ sudé.

Řešení. Provedeme důkaz rozborem případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n+1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n+1$ sudé, a proto je i číslo $n(n+1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.17. Při důkazu výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

1.2.18 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz)**.** Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.19. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmů uvedeme v Kapitole 5. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.11 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální a přitom by číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

bylo racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} \qquad \text{nebo} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([**7, 13**]). ♣

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu 1.1.17, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku. Doplňující informace jsou uvedeny v Dodatku A. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [**5**].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu 1.1.17 a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a **patří** do množiny A, značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A **nepatří**, zapíšeme ve formě $a \notin A$.

Množinu definujeme výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M;\ V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$. Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B, nebo, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy též píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,

- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovny, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B, nebo, že A je **vlastní podmnožinou** množiny B, jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Nechť X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X. Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \cdots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol $\supset$.

(b) Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Příklad. Nechť $\mathcal{A} = \big\{\{1,2,3\},\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5\}\big\}$. Potom $\bigcup \mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$.

1.3.8. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m$ jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m-tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n.

1.3.10. Poznámka. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0, 1]\}$, $B \times A = \{[1, 0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova[3] pravidla)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou z uvažovaných množin $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž celkem $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

1.4.1. Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Píšeme $a\ R\ b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A. Pokud nehrozí nedorozumění, budeme místo slovního spojení „binární relace“ používat slovo „relace“.

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

[3]Augustus de Morgan (1806–1871)

1.4.2. Definice. Nechť A je množina a nechť R je relace na A. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže platí
$$\forall x \in A \colon [x, x] \in R,$$
- **symetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A \colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$
- **tranzitivní**, jestliže platí
$$\forall x, y, z \in A \colon \big([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R\big) \Rightarrow [x, z] \in R,$$
- **antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A \colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$
- **slabě antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A \colon \big([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R\big) \Rightarrow x = y.$$

1.4.3. Definice. Nechť A je množina a nechť R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy též **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o částečné uspořádání takové, že pro každé dva prvky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.4. Příklady. (a) Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Toto uspořádání je navíc lineární. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

(b) Nechť X je množina. Pak relace
$$R = \big\{[A, B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X);\ A \subset B\big\}$$
je částečné uspořádání na $\mathcal{P}(X)$. Pokud má X alespoň dva prvky, pak toto uspořádání není lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

(c) Na množině $\mathbb{N}^2$ definujeme lexikografické uspořádání $\leq_{\mathrm{lex}}$ následujícím způsobem
$$[n_1, n_2] \leq_{\mathrm{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow \big(n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)\big).$$
Ověříme, že relace $\leq_{\mathrm{lex}}$ je opravdu uspořádání.

Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a tedy $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Uvažujme nyní prvky $[n_1, n_2]$, $[m_1, m_2]$, $[k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňující

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \qquad \text{a} \qquad [m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]. \tag{1.7}$$

Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$.

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.5. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.6. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

1.4.7. Poznámka. V předchozích dvou definicích jsme použili symbol $\leq$, který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.8. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní závorou. Supremum a infimum množiny A nemusejí existovat, pokud však existují, jsou určeny jednoznačně.

Odvoďme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Nechť g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání $\leq$ na množině X. Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A. Podle vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Slabá antisymetrie relace uspořádání pak dává $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání $\leq$) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A, značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uveďme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.9. Příklad. Nechť $\leq_{\text{lex}}$ je lexikografické uspořádání na množině $\mathbb{N}^2$ (viz Příklad 1.4.4(c)). Ukažte, že supremum množiny $A = \{[1, n] \in \mathbb{N}^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2, 1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1, n] \leq_{\text{lex}} [2, 1]$, čímž je ověřena první podmínka z definice suprema. Uvažujme prvek $[a, b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$ nebo platí $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n, neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ dostáváme $[2, 1] \leq_{\text{lex}} [a, b]$. Tím je ověřena i druhá podmínka z definice suprema. ♣

1.4.10. Věta. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $M \subset X$ je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny M. Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Důkaz. Množina M je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$, neboť $\inf M$ je dolní závorou M. Dále platí $a \leq \sup M$, neboť $\sup M$ je horní závorou M. Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf M \leq \sup M$. ■

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.11. Definice. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon\ \Big(\big([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F\big) \Rightarrow y_1 = y_2\Big).$$

1.4.12. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme ho $F(x)$.

1.4.13. Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon F(x) = y\}.$$
- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{H}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon F(x) = y\}.$$
- **Grafem zobrazení** F nazýváme množinu
$$\operatorname{graf}(F) = \big\{[x, F(x)] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F)\big\}.$$

1.4.14. Poznámky. (a) Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu tedy ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvkům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B. V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D, pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F, které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

1.4.15. Označení. Nechť A a B jsou množiny. Pak symbol $F\colon A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny** A **do množiny** B. Na rozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B, kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A, je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A.

1.4.16. Zobrazení $F\colon A \to B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:

$$x \mapsto (x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$x \mapsto x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.17. Definice. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení, $M \subset A$, $P \subset B$.

- **Obrazem množiny** M při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{y \in B;\ \exists x \in M: f(x) = y\},$$
kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem množiny** P při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{x \in A;\ f(x) \in P\},$$
kterou značíme $f^{-1}(P)$.

1.4.18. Definice. Řekneme, že zobrazení $f: A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže platí
$$\forall x, y \in A: \ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y),$$
- „**na**" (**surjektivní**), jestliže platí
$$\forall y \in B\ \exists x \in A: \ f(x) = y,$$
- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné zobrazení**), jestliže je prosté a „na".

1.4.19. Poznámka. Abychom mohli říci, že nějaké zobrazení je „na", musí být zadána koncová množina B. Odtud vyplývá, že pojmy surjektivity a bijektivity zobrazení zavedené v Definici 1.4.18 představují vlastnosti zobrazení f a zároveň množiny B.

1.4.20. Poznámka. Nechť $f: A \to B$ je prosté zobrazení. Potom f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.21. Definice. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g: C \to B$ definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C. Zobrazení g značíme $f|_C$.

1.4.22. Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

1.4.23. Definice. Nechť $f: A \to B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \to A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

1.4.24. Poznámka. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.25 (sjednocení a průnik indexovaného systému)**.** Nechť X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin**. Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A_\alpha;\ \alpha \in I\}$. Pak množinu $\bigcup \mathcal{A}$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap \mathcal{A}$ označujeme $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme definice dvou typů zobrazení, se kterými budeme často pracovat.

1.4.26. Definice. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^{n}$. Číslo a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.4.27. Posloupnost může být také definována **rekurentně**. Mějme neprázdnou množinu A. Při rekurentním zadání posloupnosti je obvykle explicitně předepsán člen $a_1 \in A$ nebo několik prvních členů a_1, $a_2, \dots,$ $a_n \in A$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a je stanoven předpis, podle kterého je možné pro každé $j \in \mathbb{N}, j > n$, určit hodnotu $a_{j+1} \in A$ na základě znalosti hodnoty a_j, případně některých dalších již známých hodnot a_k, kde $k \leq j$. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti vyplývá z následující věty.

1.4.28. Věta (rekurentně zadaná posloupnost)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, A je množina, $f : A^n \to A$ je zobrazení a $a_1, \dots, a_n \in A$. Potom existuje právě jedna posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující

- $\forall j \in \{1, \dots, n\}\colon x_j = a_j$,
- $\forall j \in \mathbb{N}\colon x_{n+j} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1})$.

Důkaz. Nejprve pomocí matematické indukce ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje právě jedno zobrazení $g_k\colon \{1, \dots, n+k\} \to A$ takové, že

(a) $\forall j \in \{1, \dots, n\}\colon g_k(j) = a_j$,
(b) $\forall j \in \{1, \dots, k\}\colon g_k(n+j) = f(g_k(j), g_k(j+1), \dots, g_k(j+n-1))$.

Pokud $k = 0$, pak je zobrazení g_0 jednoznačně určeno podmínkou (a). Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ podmínky jednoznačně určují zobrazení g_k.

Zobrazení g_{k+1} musí splňovat

$$g_{k+1}|_{\{1,\dots,n+k\}} = g_k \text{ a}$$
$$g_{k+1}(n+k+1) = f\big(g_{k+1}(k+1), g_{k+1}(k+2), \dots, g_{k+1}(k+n)\big).$$

Tím je zobrazení g_{k+1} jednoznačně určeno.

Hledanou posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ definujeme předpisem $x_j = g_j(j)$, $j \in \mathbb{N}$. Vzhledem k jednoznačnosti funkcí g_k platí $g_k|_{\{1,\dots,n+j\}} = g_j$ pro každé $k, j \in \mathbb{N}$, $j \le k$. Pro každé $k, j \in \mathbb{N}$, $j \le k$, tedy platí $x_j = g_k(j)$. Odtud plyne, že $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňuje požadované podmínky. ■

1.5. Množina reálných čísel

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku B. V tomto oddíle budeme předpokládat, že uvedené množiny již máme zkonstruovány, a uvedeme vlastnosti těchto množin, které budeme v dalším výkladu používat. V Dodatku B pak ukážeme, že tyto vlastnosti v jistém smyslu již jednoznačně určují uvažované číselné obory.

Naše číselné obory popíšeme jako množiny, na nichž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení** a relace **uspořádání**, které budeme značit obvyklým způsobem $+$, $\cdot$ a $\le$, přičemž jsou splněny následující skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah (viz 1.5.2),
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení (viz 1.5.7),
- vlastnost existence suprema (viz 1.5.9).

Definice množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou uvedeny v z 1.5.10–1.5.12).

Nyní popíšeme, jaké vlastnosti požadujeme po čtveřici $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$, kde $\mathbb{R}$ je množina, $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení a $\le$ je relace, která je podmnožinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a dále uvedeme vlastnosti množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

1.5.2 (**vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah**)**.** Zobrazení $+$, respektive $\cdot$, přiřazuje dvojici $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hodnotu v $\mathbb{R}$, kterou značíme $x+y$, respektive $x \cdot y$. Místo o zobrazeních $+$ a $\cdot$ budeme hovořit o **operacích** $+$ a $\cdot$.

(1) Sčítání reálných čísel je **asociativní**, neboli pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(2) Sčítání reálných čísel je **komutativní**, neboli pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$x + y = y + x.$$

(3) Existuje prvek $w \in \mathbb{R}$ takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x + w = x.$$

Prvek w je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky w_1 a w_2 mají uvedenou vlastnost, pak platí $w_1 + w_2 = w_1$ a také díky komutativitě sčítání $w_1 + w_2 = w_2 + w_1 = w_2$. Odtud plyne $w_1 = w_2$. Prvek w nazýváme **nulovým prvkem** a značíme ho symbolem 0.

(4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x + z = 0$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek z určen jednoznačně. Pokud totiž prvky z_1 a z_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě sčítání platí

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 + 0 = z_1 + (x + z_2) = (z_1 + x) + z_2 \\ &= z_2 + (z_1 + x) = z_2 + (x + z_1) = z_2 + 0 = z_2. \end{aligned}$$

Prvek z nazýváme **opačným číslem k číslu** x a značíme ho symbolem $-x$.

(5) Násobení reálných čísel je asociativní, neboli pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

(6) Násobení reálných čísel je komutativní, neboli pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(7) Existuje prvek $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$v \cdot x = x.$$

Prvek v je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky $v_1, v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňují právě uvedenou podmínku, potom platí $v_1 = v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2 = v_2$. Prvek v nazýváme **jednotkový** a označujeme ho symbolem 1.

(8) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje $y \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \cdot y = 1.$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek y určen jednoznačně. Pokud totiž prvky y_1 a y_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě násobení platí $y_1 = y_1 \cdot (x \cdot y_2) = (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = y_2$. Prvek y nazýváme **inverzním** prvkem k prvku x a značíme ho symbolem x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$.

(9) Sčítání a násobení splňují následující pravidlo **distributivity**. Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

1.5.3 (operace odčítání a dělení). Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. **Rozdíl** čísel x a y je definován jako číslo $x + (-y)$ a značíme ho symbolem $x - y$. Pokud navíc $y \neq 0$, pak je **podíl** čísel x a y definován jako číslo $x \cdot y^{-1}$. Místo $x \cdot y^{-1}$ používáme také symbol $\frac{x}{y}$ nebo (méně často) $x : y$ či x/y.

1.5.4. Z vlastností (1)-(9) vyplývají všechna obvyklá pravidla pro počítání s reálnými čísly. Jako příklad odvodíme následující čtyři pravidla. Důkazy dalších početních pravidel jsou obsaženy v Dodatku B.

1.5.5. Věta. Pro reálná čísla platí následující tvrzení:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -(-x) = x$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon (x^{-1})^{-1} = x$,
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\colon 0 \cdot x = 0$.
(d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz$.

Důkaz. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom $x + (-x) = 0$ podle (4). Pak díky (2) máme $(-x) + x = 0$, a tedy x je opačný prvek k prvku $-x$. Proto platí $-(-x) = x$.
(b) Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom $x \cdot x^{-1} = 1$ podle (8). Pak díky (6) máme $x^{-1} \cdot x = 1$, a tedy x je inverzní prvek k prvku x^{-1}. Proto platí $(x^{-1})^{-1} = x$.
(c) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Postupným použitím (7), (3), (9) a znovu (7) dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme

$$x + (-x) = (x + 0 \cdot x) + (-x).$$

Odtud pomocí (4) použité na levou stranu rovnosti a (1) a (2) použité na pravou stranu obdržíme

$$0 = 0 \cdot x + \big(x + (-x)\big).$$

Díky vlastnostem (4) a (3) odtud dostáváme dokazovaný vztah $0 \cdot x = 0$.

(d) Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují $x \leq y$ a $z \geq 0$. Přičtením prvku $-x$ k levé a pravé straně nerovnosti $x \leq y$ dostaneme $0 \leq y - x$. Potom podle vlastnosti (3) v 1.5.7 obdržíme $0 \leq (y - x)z = yz - xz$. Přičtením prvku xz k levé a pravé straně poslední nerovnosti dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.5.6. Poznámka. Někdy hovoříme o prvcích množiny $\mathbb{R}$ jako o bodech a o prvku 0 jako o počátku.

1.5.7 (**vztah uspořádání a operací sčítání a násobení**). (1) Relace $\leq$ je lineárním uspořádáním na množině $\mathbb{R}$.
(2) Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňující $x \leq y$ platí

$$x + z \leq y + z.$$

(3) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňující $0 \leq x$ a $0 \leq y$ platí

$$0 \leq x \cdot y.$$

1.5.8. Označení. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Symbol $x \geq y$ má stejný význam jako symbol $y \leq x$. Pokud $x \leq y$ a $x \neq y$, pak píšeme $x < y$ nebo $y > x$. Symboly $<$ a $>$ značí tzv. **ostrou nerovnost**.

(b) Pokud $x > 0$, respektive $x < 0$, pak nazýváme x **kladným**, respektive **záporným**, reálným číslem. Pokud $x \geq 0$, respektive $x \leq 0$, pak nazýváme x **nezáporným**, respektive **nekladným**, reálným číslem.

V Definicích 1.4.5 a 1.4.6 jsme zavedli pojem horní závory, dolní závory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní budeme tyto pojmy používat pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním $\leq$. Vlastnost existence suprema reálných čísel lze pak formulovat následovně.

1.5.9 (vlastnost existence suprema). Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

1.5.10 (zavedení množiny přirozených čísel). Množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ přirozených čísel splňuje tyto podmínky

(a) $1 \in \mathbb{N}$,
(b) $\forall x \in \mathbb{N}: x + 1 \in \mathbb{N}$,
(c) jestliže $A \subset \mathbb{R}$ splňuje
- $1 \in A$,
- $\forall x \in A: x + 1 \in A$,

potom $\mathbb{N} \subset A$.

Podmínky (a)–(c), které – jak bude ukázáno v Dodatku B – určují množinu přirozených čísel jednoznačně, lze neformálně popsat takto. Množina přirozených čísel obsahuje číslo 1 (vlastnost (a)) a pokud je nějaké reálné číslo x číslem přirozeným, pak také číslo $x + 1$ je číslem přirozeným. Vlastnost (c) říká, že množina přirozených čísel je nejmenší množina splňující podmínky (a) a (b). Tato vlastnost také zaručuje platnost principu matematické indukce (viz 1.2.7). Množina přirozených čísel, opět neformálně řečeno, tedy vznikla tak, že jsme do ní zařadili prvek 1 a pak všechny prvky, které vznikly postupným přičítáním 1, a žádné jiné. Místo $1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \ldots$ budeme samozřejmě psát $2, 3, 4, \ldots$

1.5.11 (zavedení množiny celých čísel). Množina celých čísel je definována jako

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R};\ -m \in \mathbb{N}\}.$$

1.5.12 (zavedení množiny racionálních čísel). Množina racionálních čísel je definována jako
$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

1.6. Vlastnosti reálných čísel

Poté co jsme popsali množinu reálných čísel, budeme pokračovat odvozením jejích základních vlastností.

Vlastnosti početních operací a uspořádání.

1.6.1. Označení. (a) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^{n} a_i$ značíme součet všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$
Je-li $m > n$, pak klademe
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0.$$

(b) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^{n} a_i$ značíme součin všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy
$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$
Je-li $m > n$, pak klademe
$$\prod_{i=m}^{n} a_i = 1.$$
Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin
$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$
Pokud $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin
$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případě, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \le n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k, předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

1.6.2. Poznámka. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n+1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 < n_2 < n_3$ jsou přirozená čísla a $a_{n_1}, \dots, a_{n_3}$ jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostačující.

Uveďme následující pozorování, které je užitečné při práci se součty reálných čísel.

1.6.3. Nechť $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \le n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla $a_m, \dots, a_n$.

1.6.4. Věta (binomická věta)**.** Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.8}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^0 = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Odtud dostáváme (1.8) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.8) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Podle pozorování v 1.6.3 obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \le n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

■

Následující tvrzení je zobecněním známých vztahů $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1.6.5. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned}
(a-b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k} \\
&= a^n + \sum_{k=2}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - b^n \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k} - b^n \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

♣

1.6.6. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.6.5 pro $a = 1, b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n+1$. Pak s pomocí 1.6.3 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1-q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1-q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1-q$. ♣

1.6.7. Věta. Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$, platí $x^k < y^k$.
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, platí $x \leq x^k$.
(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$, platí $x^k \leq x$.

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$. Podle Příkladu 1.6.5 platí

$$y^k - x^k = (y - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}.$$

Výraz $y - x$ je zřejmě kladný. Také výraz $\sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}$ je kladný, neboť všechny sčítance v této sumě jsou nezáporné a sčítanec pro $k = 1$ je kladný. Kladný je tedy i součin obou výrazů. Dostáváme $y^k - x^k > 0$, neboli $x^k < y^k$.

(b) Pokud $k = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Pokud $k > 1$, pak podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} \geq 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty 1.5.5(d) obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \geq x \cdot 1 = x.$$

(c) Pokud $k = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Pokud $k > 1$, pak podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} \leq 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty 1.5.5(d) obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \leq x \cdot 1 = x. \qquad \blacksquare$$

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.6.8. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.6.9. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $\big||x|\big| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu x od bodu y**.

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.6.10. Věta (trojúhelníková nerovnost)**.** Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|\,. \tag{1.9}$$

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Z definice absolutní hodnoty okamžitě vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a + b \leq |a| + |b|$. Opět z definice absolutní hodnoty snadno vyplývá, že platí $|a| \geq -a$ a $|b| \geq -b$. Odtud dostáváme $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a+b| = a+b$ nebo $|a+b| = -(a+b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.9) dokázána. ∎

1.6.11. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,. \tag{1.10}$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|\,. \tag{1.11}$$

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.9) nejprve $a = y$, $b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.9) dále položme $a = x$, $b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností již plyne (1.10).

(b) V (1.9) položíme $a = x - z$, $b = z - y$ a dostaneme požadovanou nerovnost. ∎

1.6.12. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.11).

1.6.13. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a - b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a-b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$. Odtud vyplývá $0 < a-b < \frac{1}{2}(a-b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b-a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ∎

Další vlastnosti suprema a infima.

1.6.14. Uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M : x > G'$.

Pokud je totiž G supremem množiny M, pak je G horní závorou M, a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M. Odtud plyne, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $G' < x$. Tím je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M. Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M. Chceme ukázat, že platí $G' \geq G$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání $\leq$ dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M.

Zdůrazněme, že linearitu uspořádání $\leq$ jsme využili v okamžiku, kdy jsme z předpokladu, že neplatí $G' \geq G$ odvodili nerovnost $G' < G$. Pro obecné uspořádání takové odvození nelze provést.

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(c) g je dolní závorou M,
(d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g \; \exists x \in M : x < g'$.

1.6.15. Věta (o existenci infima)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny A a označíme-li

$$-A = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in A\},$$

pak platí $\inf A = -\sup(-A)$.

Důkaz. Množina $-A$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny A. Pro každé $x \in -A$ platí $-x \in A$, takže $-x \geq K$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-A$. Množina $-A$ je tedy shora omezená. Z 1.5.9 plyne existence suprema množiny $-A$, které označíme symbolem G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny A tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.6.14.

Pro každé $x \in A$ platí $-x \in -A$, tedy $-x \leq G$, takže $x \geq g$. Číslo g je proto dolní závorou množiny A. Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g' > g$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.6.14 tedy vyplývá, že existuje $y \in -A$ takové, že $y > G'$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in A$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.6.14. Tím je důkaz proveden. ∎

1.6.16. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.
- Řekneme, že b je **nejmenší prvek** (**minimum**) množiny M, jestliže $b \in M$ a b je dolní závorou množiny M.

1.6.17. Pokud maximum a minimum množiny M existují, pak jsou určeny jednoznačně. Má-li totiž množina M dvě maxima G_1, G_2, pak G_1 i G_2 jsou horní závory M. Platí tedy $G_1 \leq G_2$ a $G_2 \leq G_1$, a proto $G_1 = G_2$. Obdobně se dokáže jednoznačnost minima. Minimum a maximum množiny M značíme $\max M$ a $\min M$.

1.6.18. Věta. Nechť má množina $M \subset \mathbb{R}$ maximum. Pak má i supremum, které je rovno jejímu maximu.

Důkaz. Předpokládejme, že $G = \max M$. Pak je G horní závorou M, a tedy je splněna podmínka (a) z 1.6.14. Je-li nyní $G' < G$, pak G je prvek M větší než G', a tedy je splněna i podmínka (b) z 1.6.14. Proto je číslo G supremem množiny M. ∎

1.6.19. Obdobně platí, že minimum množiny v $\mathbb{R}$ je jejím infimem.

1.6.20. Příklad. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A.

Řešení. Budeme postupovat rozborem případů. Mějme tedy prvky $x, y \in \mathbb{R}$. Z linearity uspořádání $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmě

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.6.21. Označení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \dots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

1.6.22. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pak množiny (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ a $[a, \infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

1.6.23. Poznámka. Poznamenejme, že prázdná množina je intervalem, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je intervalem, stačí ověřit podmínku ze znění lemmatu, která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi mezi x a y. Není tedy třeba hledat příslušné krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazech Vět 1.6.30 a 4.3.6.

1.6.24. Lemma. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M \ \forall z \in \mathbb{R} \colon (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.12}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pro ověření podmínky (1.12) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.12) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.12). Pokud $M = \emptyset$, pak je tvrzení zřejmé. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak existuje $x \in M$, $x < z$ (neboť M není zdola omezená) a také existuje $y \in M$, $y > z$ (protože M není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $y > z$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závorou M a G je horní závorou M. Množina M je tedy interval s krajními body g a G, přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do M.

V ostatních případech, kdy je M omezená pouze zdola a kdy je M omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ∎

1.6.25. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Pak $m \geq n + 1$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $m - n \geq 1$. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.6.26. Věta (existence celé části)**.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Nejprve dokážeme jednoznačnost čísla k s uvedenými vlastnostmi. Nechť existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $k \neq j$, $k \leq x < k+1$ a $j \leq x < j+1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $j > x - 1$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $k - j > 0$, plyne z Věty 1.6.25, že $k - j \geq 1$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. Dokázali jsme tedy, že existuje nejvýše jedno číslo s uvedenými vlastnostmi.

Nyní dokážeme, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ příslušné číslo existuje. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. Číslo x je horní závorou množiny M, a proto je M shora omezená. Nyní ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí, že $n > x$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tak existuje infimum $g \in \mathbb{R}$ množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme $n \geq g$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $n - 1 \geq g$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $n \geq g + 1$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná.

Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M. Potom existuje $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $k + 1 > G$, a tedy $k + 1 \notin M$. Odtud a z faktu $k \in M$ plyne $k \leq x < k + 1$. ■

1.6.27. Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.6.26), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme jej $[x]$.

1.6.28. Věta (Archimédova[4] vlastnost $\mathbb{R}$)**.** Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí položit $n = \max\{[x] + 1, 1\}$. ■

1.6.29. Lemma. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Dle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A. Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože

$$\forall b \in B : b \text{ je horní závorou } A,$$

platí

$$\forall b \in B : b \geq \sup A.$$

Tedy $\sup A$ je dolní závora B, z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ■

[4] Archimédés (287 př. n. l. – 212 př. n. l.)

1.6.30. Věta (existence n-té odmocniny)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$.

Důkaz. Položme
$$S = \{z \in [0, \infty);\ z^n \leq x\}.$$
Množina S je neprázdná, neboť obsahuje číslo 0. Dokážeme, že množina S je shora omezená. Pokud $z \in S$, potom buď $z < 1$ nebo $z \geq 1$. Ve druhém případě s pomocí Věty 1.6.7(b) platí $z \leq z^n \leq x$. Pro libovolné $z \in S$ tedy platí $z \leq \max\{1, x\}$.

Podle 1.5.9 tedy existuje $\sup S \in \mathbb{R}$. Označme $y = \sup S$. Ukážeme, že y je hledané nezáporné číslo splňující $y^n = x$. Nezápornost y plyne z faktu, že $0 \in S$. Postupně ukážeme, že nemůže platit $y^n > x$ ani $y^n < x$. Vyloučením těchto dvou možností dostaneme, že platí $y^n = x$.

Pro spor nejprve předpokládejme, že platí $y^n > x$. Potom platí $y^n - x > 0$, a tedy $\frac{ny^{n-1}}{y^n - x}$ je reálné číslo. Podle Věty 1.6.28 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{ny^{n-1}}{y^n - x}$. Podle vlastnosti suprema 1.6.14(b) existuje $z \in S$ takové, že $z > y - \frac{1}{m}$. Platí tedy $z^n \leq x$ a $y - z < \frac{1}{m}$. Odtud a podle Příkladu 1.6.5 dostáváme
$$\begin{aligned} y^n - x \leq y^n - z^n &= (y - z) \sum_{k=1}^{n} y^{n-k} z^{k-1} \leq (y - z) \sum_{k=1}^{n} y^{n-1} \\ &= (y - z) \cdot ny^{n-1} < \frac{1}{m} \cdot ny^{n-1} < y^n - x, \end{aligned}$$
což je spor.

Nyní předpokládejme, že platí $y^n < x$. Potom máme $x - y^n > 0$, a tedy $\frac{n(y+1)^{n-1}}{x - y^n}$ je reálné číslo. Podle Věty 1.6.28 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{n(y+1)^{n-1}}{x - y^n}$. Dále nalezneme $z \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < z - y < \frac{1}{m}$. Odtud a podle Příkladu 1.6.5 dostáváme
$$\begin{aligned} z^n - x < z^n - y^n &= (z - y) \sum_{k=1}^{n} y^{n-k} z^{k-1} \leq (z - y) \sum_{k=1}^{n} z^{n-1} \\ &= (z - y) \cdot n(y + 1)^{n-1} < \frac{1}{m} \cdot n(y + 1)^{n-1} < y^n - x. \end{aligned}$$
Odtud plyne $z^n < y^n$, což je spor.

Jednoznačnost vyplývá z Věty 1.6.7(a). ■

1.6.31. Definice. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom číslo $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^k = x$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.6.30), nazýváme k**-tou odmocninou** z čísla x a značíme jej $\sqrt[k]{x}$.

1.6.32. Věta (vlastnosti k-té odmocniny)**.** Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$, platí $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \leq x$.
(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \geq x$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z odpovídajících tvrzení pro k-tou mocninu reálného čísla, která jsou uvedena ve Větě 1.6.7. ∎

1.6.33. Věta (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Potom existuje $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$ a $x < r < y$.

Důkaz. Podle Věty 1.6.28 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{y-x}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{y-x} < n$. Je tedy $nx + 1 < ny$. Položíme $q = \frac{[nx]+1}{n}$. Potom $q \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.6.26 platí

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{[nx] + 1}{n} \leq \frac{nx + 1}{n} < \frac{ny}{n} = y.$$

Dále podle již dokázaného existuje racionální číslo $q' \in (q, y)$. Položme $r = q + \frac{q'-q}{\sqrt{2}}$. Podle Věty 1.6.32(a) použité pro $x = 1$, $y = 2$ a $k = 2$ dostáváme $\sqrt{2} > 1$. Tedy máme

$$x < q < r = q + \frac{q' - q}{\sqrt{2}} < q + (q' - q) = q' < y.$$

Kdyby bylo číslo r racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{q'-q}{r-q}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.15. Číslo r je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.6.34. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum množiny A.

Důkaz. Jelikož $A \subset \mathbb{N}$, je 1 dolní závorou A. Proto existuje infimum množiny A, které označíme symbolem g. Z definice infima existuje $a \in A$ splňující $g \leq a < g + \frac{1}{2}$. Dokážeme, že $a = \min A$. Nechť tedy $b \in A$ je libovolné. Chceme ukázat, že $b \geq a$. Tuto nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme tedy, že $b < a$. Platí $b \geq g$. Protože $a - b$ je kladné celé číslo, platí $a - b \in \mathbb{N}$. Tedy $a - b \geq 1$. Platí tak

$$1 \leq a - b < g + \frac{1}{2} - g = \frac{1}{2}.$$

Tedy $2 < 1$, což je spor s tím, že 1 je nejmenší přirozené číslo. Platí tedy $b \geq a$, a a je tak minimem množiny A. ∎

1.6.35. Věta. Nechť M je neprázdná množina a $f: M \to \mathbb{R}$ a $g: M \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezená, potom

$$\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezená, potom

$$\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B. Nechť $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f+g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Důkaz tvrzení (b) je obdobný důkazu tvrzení (a). ∎

1.6.36. Věta (Borelova věta)**.** Nechť $[a,b]$ je omezený uzavřený interval a $\mathcal{I}$ je systém neprázdných otevřených intervalů splňující $[a,b] \subset \bigcup \mathcal{I}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ takový, že $[a,b] \subset \bigcup \mathcal{J}$.

Důkaz. Položme

$$A = \left\{x \in [a,b];\ \text{existuje konečný systém } \mathcal{L} \subset \mathcal{I} \text{ splňující } [a,x] \subset \bigcup \mathcal{L}\right\}.$$

Množina A je neprázdná, neboť $a \in A$. Množina A je shora omezená, protože $A \subset [a,b]$. Existuje tedy supremum množiny A, které označíme symbolem s.

Ukažme nejprve, že platí $s \in A$. Nalezneme otevřený interval $(\alpha,\beta) \in \mathcal{I}$ takový, že $s \in (\alpha,\beta)$. Podle definice suprema existuje $x \in A$ takové, že $\alpha < x \leq s$. Poněvadž $x \in A$, lze nalézt konečný systém $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ splňující $[a,x] \subset \bigcup \mathcal{L}$. Potom je systém $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{(\alpha,\beta)\}$ konečný a platí

$$[a,s] = [a,x] \cup [x,s] \subset \left(\bigcup \mathcal{L}\right) \cup (\alpha,\beta) = \bigcup \mathcal{L}^*.$$

Tedy $s \in A$.

Dokažme nyní, že platí $s = b$. Předpokládejme, že $s < b$. Nalezneme $J \in \mathcal{I}$ splňující $s \in J$ a $x \in A \cap J$. Nechť $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ je konečný systém takový, že $[a,x] \subset \bigcup \mathcal{L}$. Položme $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{J\}$. Zvolme $y \in J \cap (s,b]$. Potom platí

$$[a,y] = [a,x] \cup [x,y] \subset \left(\bigcup \mathcal{L}\right) \cup J = \bigcup \mathcal{L}^*.$$

Tedy $y \in A$ a $y > s$, což je spor. Platí tedy $s = b$, tím je důkaz dokončen. ∎

1.7. Mohutnost množin

Pojem „počet prvků množiny" je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny". Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [**5**]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.7.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B, jestliže existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A a B nemají stejnou mohutnost. Značíme $A \prec B$.

1.7.2. Označení. Nechť A je množina. Zobrazení $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ definované předpisem $\mathrm{Id}_A(a) = a$, $a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.7.3. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \preceq A$,
(b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A, a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$, pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ∎

1.7.4. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \approx A$,
(b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,
(c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A, a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B. Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1}. Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a jeho obor hodnot je roven A. Zobrazení $f^{-1}\colon A \to B$

je tedy „na“. Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina A stejnou mohutnost jako množina B, tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$, pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté. Pro každý prvek $c \in C$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je „na“. Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je „na“. Potom platí $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy „na“. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.7.5. Věta (Cantorova[5]-Bernsteinova[6] věta)**.** Nechť X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a zároveň $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma.

1.7.6. Lemma. Nechť X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \tag{1.13}$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice $\mathcal{C}$. Díky (1.13) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.13) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H\big(H(C)\big)$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ∎

Důkaz Věty 1.7.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.7.6, s pomocí kterého nalezneme množinu

[5] Georg Cantor (1845–1918)
[6] Felix Bernstein (1878–1956)

$C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g\big(Y \setminus f(C)\big).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g\big(Y \setminus f(C)\big)$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$ je následující zobrazení $h\colon X \to Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in A \setminus C. \end{cases}$$ ■

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší" ve smyslu Definice 1.7.1.

1.7.7. Věta (Cantorova věta)**.** Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ■

1.7.8. Definice. Nechť A je množina. Řekneme, že množina A je

- **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$,
- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.7.9. Lemma. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ právě tehdy, když $m = n$.

Důkaz. Pokud $m = n$, potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ podle Věty 1.7.4(a).

Opačnou implikaci dokážeme pomocí matematické indukce podle m. Předpokládejme, že $m = 1$ a $\{1\} \approx \{1, \dots, n\}$. Potom existuje bijekce $\varphi\colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $\varphi(1) = 1 = n$, a tedy $m = n$.

Předpokládejme platnost tvrzení pro $m \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m + 1\}$. Existuje tedy bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, m + 1\} \to \{1, \dots, n\}$. Pak existuje jednoznačně určené číslo

$k_0 \in \{1, \dots, m+1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n-1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m+1), & \text{pokud } k = k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení ψ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n-1\}$. Zobrazení je „na“, neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n-1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$. Pokud $k = k_0$ musí být díky prostotě φ také $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě φ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení ψ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n-1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n - 1 = m$, a tedy $n = m + 1$. ■

1.7.10. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno podle Lemmatu 1.7.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.7.11. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak je počet jejích prvků roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že X má n prvků. Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.7.12. Poznámka. S pomocí Věty 1.7.4 dostáváme, že dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

1.7.13. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A.

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, n+1\} \to A$. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g'. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.6.20. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}\colon g \le \varphi(i) \le G.$$

Tedy g je dolní závora A a G je horní závora A. Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1,\dots,n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Tedy jsem nalezli minimum i maximum množiny A. Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ∎

1.7.14. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina $\mathbb{N}$ je konečná. Podle Věty 1.7.13 je potom množina $\mathbb{N}$ omezená, a tedy existuje její horní závora v $\mathbb{R}$, kterou označíme K. Potom podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > K$. Tudíž K není horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor. ∎

1.7.15. Lemma. Zobrazení $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n,m) = (n+m)^2 + n, \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ pro $(n,m), (n',m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$(n'+m'+1)^2 > (n'+m')^2+n' = \varphi(n',m') = \varphi(m,m) = (n+m)^2+n > (n+m)^2.$$

Odtud plyne nerovnost $n' + m' + 1 > n + m$. Potom máme $n' + m' \geq n + m$. Obdobně odvodíme nerovnost $n + m \geq n' + m'$. Musí tedy platit $n' + m' = n + m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. ∎

1.7.16. Lemma. Nechť A, B jsou množiny a $f : A \to B$ je zobrazení. Pak $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Korektní důkaz se opírá o axiom výběru, což je výrok, jehož platnost při práci s množinami předpokládáme. Zde je jedna z jeho možných formulací:

Je-li $\alpha \mapsto \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in I$, indexovaný systém neprázdných množin, potom existuje zobrazení $\varphi\colon I \to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ takové, že pro každé $\alpha \in I$ platí $\varphi(\alpha) \in A_\alpha$.

Další vysvětlení je uvedeno v DodatkuB. V našem důkazu pak položíme $I = f(A)$, $b \mapsto f^{-1}(\{b\})$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi\colon f(A) \to A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(b)$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f\big(\varphi(b)\big) = f\big(\varphi(b')\big) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. ∎

1.7.17. Věta (vlastnosti konečných množin)**.**

(a) Nechť A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ je konečná množina.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom $A_1 \times \dots \times A_n$ je konečná množina.
(d) Nechť A je konečná množina, B je množina a $f : A \to B$ je zobrazení. Potom $f(A)$ je konečná množina.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Nechť A je podmnožina množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$, pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí

$$A = \big(A \cap \{1, \dots, n\}\big) \cup \{n + 1\}.$$

Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny A na množinu $\{1\}$. Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi \colon \{1, \dots, k\} \to B$. Definujme $\psi : \{1, \dots, k+1\} \to A$ předpisem

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n + 1 & \text{pro } i = k + 1. \end{cases}$$

Pak ψ je bijekce $\{1, \dots, k + 1\}$ na A, a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi \colon A \to \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\psi = \varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ a bijekce $\omega \colon \varphi(B) \to \{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \psi$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Nechť tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha \colon C \to \{1, \dots, n\}$, $\beta \colon D \to \{1, \dots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma \colon D \setminus C \to \{n+1, \dots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x) + n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi \colon C \cup D \to \{1, \dots, n+m\}$ definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in C, \\ \gamma(x), & x \in D \setminus C, \end{cases}$$

je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \dots, n+m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C$, $\gamma|_{D \setminus C}$ jsou prostá a

$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \dots, n\} \cap \{n+1, \dots, n+m\} = \emptyset.$$

Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \dots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Množina $C \cup D$ je konečná, neboť podle Poznámky 1.4.20 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$.

Pokud je uvažovaný systém konečný, pak je buď prázdný nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je jeho sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $A_1, \dots, A_{n+1}$ jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je konečná množina. Pak je ale množina

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr) \cup A_{n+1}$$

konečná dle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Stejně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha\colon A \to \{1, \dots, n\}$, $\beta\colon B \to \{1, \dots, m\}$. Nechť φ je zobrazení z Lemmatu 1.7.15. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a,b) = \varphi(\alpha(a), \beta(b)), \quad (a,b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \dots, (n+m)^2 + n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Podle Lemmatu 1.7.16 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. $f(A)$ existuje prosté zobrazení $\psi\colon f(A) \to A$. Potom $\psi(f(A))$ je podmnožinou konečné množiny A, a je tedy podle (a) konečná. Množina $f(A)$ je tedy konečná, neboť $f(A) \approx \psi(f(A))$. ■

1.7.18. Lemma.

(a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \preceq \mathbb{N}$.

(b) Nechť A je neprázdná množina. Potom je množina A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f : \mathbb{N} \to A$, které je „na“.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě platí $A \preceq \mathbb{N}$. Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \preceq \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $f : A \to \mathbb{N}$ je prosté zobrazení. Množina $f(A)$ je buď omezená, nebo neomezená. Předpokládejme nejprve, že nastává první možnost.

Potom existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, které je horní závorou množiny $f(A)$. Podle Věty 1.6.28 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K < n$. Potom platí $f(A) \subset \{1, \dots, n\}$. Podle Věty 1.7.17(a) je $f(A)$ konečná množina. Vzhledem k tomu, že $A \approx f(A)$ podle Poznámky 1.4.20, dostáváme, že množina A je konečná, a tedy spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není omezená. Induktivně budeme konstruovat posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Položme $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definovány členy $n_1, \dots, n_k$. Množina $f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ je neprázdná, neboť $f(A)$ je neomezená. Položíme $n_{k+1} = \min\big(f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}\big)$. Tím je konstrukce posloupnosti provedena. Zobrazení $\varphi\colon k \mapsto n_k, k \in \omega$, je podle konstrukce prosté a platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Podle Poznámky 1.4.20 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle Poznámky 1.4.20. Množina A je tedy spočetná.

(b) $\Rightarrow$ Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g\colon A \to \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n) & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g) \\ a & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $\mathcal{H}(\mathbb{N}) = A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $f\colon \mathbb{N} \to A$ je zobrazení „na“. Potom podle Lemma 1.4.20 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ■

1.7.19. Věta (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) Nechť A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom B je spočetná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je spočetná množina.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou spočetné množiny. Potom $A_1 \times \dots \times A_n$ je spočetná množina.
(d) Nechť A je spočetná množina, B je množina a $f\colon A \to B$ je zobrazení. Potom $f(A)$ je spočetná množina.

Důkaz. (a) Nechť $B \subset A$ a A je spočetná. Potom $\mathrm{Id}_B\colon B \to A$ je prosté zobrazení, a platí tedy $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$, dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.7.3(b).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A};\ A \neq \emptyset\}$. Potom $\bigcup \tilde{A} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.7.18(b) zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \tilde{\mathcal{A}}$, které je „na“. Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ existuje zobrazení $g_A\colon \mathbb{N} \to A$, které je „na“. Definujme zobrazení

$\psi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n,m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je „na“. Pro každé $x \in \bigcup \mathcal{A}$, existuje $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n, m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n,m) = x$.

Podle Lemmatu 1.7.15 platí $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, a tedy existuje zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\bigcup \mathcal{A}$, což dokazuje její spočetnost.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.7.17 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a\in A}\{a\}\times B$. Zřejmě platí $\{a\}\times B \approx B$. Množina $A\times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Nechť A je spočetná množina a $f\colon A \to B$ je zobrazení. Víme z Lemmatu 1.7.16, že platí $f(A) \preceq A$. Protože $A \preceq \mathbb{N}$, podle Věty 1.7.3(b) dostáváme $f(A) \preceq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$, což jsme měli dokázat. ■

1.7.20. Příklad. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná, neboť je sjednocením množiny kladných čísel, množiny záporných čísel a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.7.19(d) spočetná. Zobrazení $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p,q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.7.19(e) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.7.21. Příklad. Nechť $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do spočetné množiny $\mathbb{Q}$, tedy $\mathcal{J}$ je také spočetná. ♣

1.7.22. Příklad. Nechť A je nekonečná množina. Potom A obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Řešení. Definujme induktivně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně. Zvolme $a_1 \in A$ libovolně. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ jsme již definovali prvky $a_1, \dots, a_n$. Množina $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ je neprázdná, neboť A je nekonečná. Prvek a_{n+1} zvolme libovolně z této množiny. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná dle Věty 1.7.14, a tím je důkaz proveden. ♣

1.7.23. Poznámka. Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v Příkladu **??** a jiným způsobem v Příkladu **??**.

1.8. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen funkce) je zobrazení $f: M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

V tomto oddílu uvedeme definice některých důležitých vlastností reálných funkcí. Dále se seznámíme s elementárními funkcemi, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, goniometrickými a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrn jejich základních vlastností, přičemž důkazy odložíme až do Kapitoly 5. Takový přístup nám umožní s těmito funkcemi pracovat (zejména v početních příkladech) již v této a následujících kapitolách. Tyto výsledky však nebudeme používat při dokazování nových vět, takže náš postup bude korektní.

1.8.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je

- **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.8.2. Definice. Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

1.8.3. Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$,
- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.8.4 (algebraické operace s funkcemi)**.** Nechť M je množina, $f: M \to \mathbb{R}$, $g: M \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg, cf na množině M

předpisy

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad x \in M,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \quad x \in M,\\ (cf)(x) &= cf(x), \quad x \in M.\end{aligned}$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in M.$$

1.8.5. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax + b$. Takto definovaná funkce se nazývá **afinní**. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice.

1.8.6. Definice. **Polynomem** budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \dots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu** P. **Reálným kořenem** polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$.

1.8.7. Věta. Nechť P je polynom tvaru (1.14), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 0$ je polynom P roven nenulové konstantní funkci. Nemá tedy žádný kořen a tvrzení je v tomto případě dokázáno.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a uvažujme polynom P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

kde $a_{n+1} \neq 0$. Pokud polynom P nemá žádný kořen, pak tvrzení platí. Předpokládejme, že existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ splňující $P(\alpha) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle Příkladu 1.6.5

$$\begin{aligned}P(x) &= P(x) - P(\alpha)\\ &= a_1(x-\alpha) + \cdots + a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n+1}(x^{n+1} - \alpha^{n+1})\\ &= (x-\alpha)\cdot\Big(a_1 + a_2(x+\alpha) + \cdots \\ &\qquad \cdots + a_n \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}\alpha^{k-1} + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x^{n+1-k}\alpha^k\Big).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Výraz v poslední závorce můžeme přepsat ve tvaru

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $b_n \neq 0$, neboť $b_n = a_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu má polynom Q nejvýše n kořenů. Podle (1.16) je každý kořen polynomu P roven α nebo jde o kořen polynomu Q. To znamená, že P má nejvýše $n+1$ kořenů, a věta je dokázána. ∎

1.8.8. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, potom $n = m$ a $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

Důkaz. Funkce $R = P - Q$ je nulový polynom tvaru

$$R(x) = c_0 + \dots + c_k x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $k = \max\{n, m\}$. Podle Věty 1.8.7 jsou koeficienty $c_0, \dots, c_k$ rovny 0. Odtud plyne $n = m$ a $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$. ∎

Vzhledem k Větě 1.8.8 existují pro každý nenulový polynom *jednoznačně určená* čísla $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, taková, že

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

a tedy je následující definice korektní.

1.8.9. Definice. Nechť P je polynom tvaru (1.14). Řekneme, že P je polynom **stupně** n, jestliže $a_n \neq 0$. Stupeň **nulového polynomu**, tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$, definujeme jako -1. Stupeň polynomu P značíme st P.

1.8.10. Lemma. Nechť P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz existence polynomů R a Z provedeme indukcí podle stupně P. Je-li $\operatorname{st} P = -1$, tj. P je nulový, pak položme $R = Z = 0$. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny polynomy P stupně menšího než k. Mějme polynom P stupně $k \geq 0$. Pokud $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, pak položme $R = 0$ a $Z = P$. V opačném případě označme $m = \operatorname{st} Q$ a a_k, resp. b_m, koeficient u členu x^k polynomu P, resp. u členu x^m polynomu Q. Položme

$$\tilde{P}(x) = P(x) - \frac{a_k}{b_m} x^{k-m} Q(x).$$

Potom st $\tilde{P} < k$, a proto podle indukčního předpokladu existují polynomy $\tilde{R}$ a Z takové, že platí $\tilde{P} = \tilde{R}Q + Z$ a st $Z <$ st Q. Nyní tedy stačí položit $R(x) = \frac{a_k}{b_m} x^{k-m} + \tilde{R}(x)$.

Zbývá dokázat jednoznačnost. Předpokládejme, že

$$P = R_1 Q + Z_1 = R_2 Q + Z_2$$

pro nějaké polynomy R_1, R_2, Z_1, Z_2, přičemž st $Z_1 <$ st Q a st $Z_2 <$ st Q. Pak platí $0 = (R_1 - R_2)Q + Z_1 - Z_2$. Polynom $R_1 - R_2$ je nutně nulový. Jinak by platilo $\operatorname{st}\big((R_1 - R_2)Q\big) \geq \operatorname{st} Q > \operatorname{st}(Z_1 - Z_2)$, což je spor s nulovostí $(R_1 - R_2)Q + Z_1 - Z_2$. Z toho již plyne $R_1 = R_2$ a $Z_1 = Z_2$. ■

1.8.11. Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty kořenů pomocí následujících vzorců.

Rovnice $a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ má právě jeden kořen $-\frac{a_0}{a_1}$. Odvození je snadné.

Uvažujme rovnici

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1.17}$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$. Taková rovnice se nazývá **kvadratická**. Označme $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$. Číslo D nazýváme **diskriminant** rovnice (1.17). Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2\big(x + \tfrac{a_1}{2a_2}\big)^2 - \tfrac{D}{4a_2}$$

Stačí tedy nalézt řešení rovnice

$$\big(x + \tfrac{a_1}{2a_2}\big)^2 = \tfrac{D}{4a_2^2}.$$

Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá řešení, neboť pro každé $z \in \mathbb{R}$ platí $z^2 \geq 0$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jedno řešení $x = -\frac{a_1}{2a_2}$. Pokud $D > 0$, pak má rovnice dvě řešení $\frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_2}$ a $\frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}$.

1.8.12. Poznámka. Lze odvodit i vzorce pro kořeny polynomů třetího a čtvrtého stupně, ty však jsou již výrazně komplikovanější. Pro kořeny polynomů pátého a vyššího stupně pak podobné vzorce nalézt nelze (viz například [,]).

Důkaz následující důležité nerovnosti lze provést pomocí odvozených výsledků o kvadratických funkcích.

1.8.13. Věta (Cauchyova nerovnost)**.** Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{1.18}$$

Důkaz. Pokud jsou všechna čísla $a_1, \dots, a_n$ rovna nule, pak v (1.18) nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel $a_1, \dots, a_n$ je různé od nuly. Uvažujme výraz

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2, \tag{1.19}$$

který lze přepsat na tvar

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)x + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

Koeficient u x^2 je nenulový a výraz (1.19) je nezáporný pro libovolné x reálné, takže rovnice

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 0$$

má nejvýše jeden reálný kořen. Diskriminant D této kvadratické rovnice je tedy menší nebo roven nule. Odtud plyne, že

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0,$$

což snadno dává (1.18). ■

1.8.14. Racionální funkcí rozumíme každou funkci tvaru $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) = 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě $\mathbb{R}$ vyjma nejvýše konečně mnoha bodů.

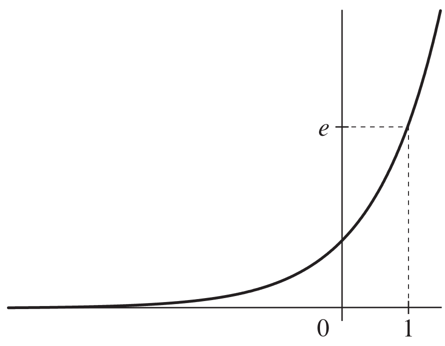
1.8.15. Exponenciální funkce, kterou budeme značit exp, má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven $(0, \infty)$. Tato funkce má následující vlastnosti:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x) \geq 1 + x$.

Z těchto vlastností lze snadno odvodit následující užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- exp je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp(nx) = (\exp(x))^n$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\colon\ \exp(x) > 1$.

Hodnotu funkce exp v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem.[7]



Obrázek 1. Graf exponenciální funkce

1.8.16. Logaritmická funkce, kterou budeme značit log, je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0,\infty)$ a obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Tato funkce má následující vlastnosti:

- $\forall x,y \in (0,\infty)\colon\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0,\infty)\colon\ \log(x) \le x - 1$.

Z těchto vlastností lze snadno odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce.

- funkce log je rostoucí na intervalu $(0,\infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0,\infty)\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \log(x^n) = n\log x$,
- $\forall x \in (1,\infty)\colon\ \log(x) > 0$.

1.8.17. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** a^x předpisem $a^x = \exp(x\log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.6.1. Pokud je $a > 0$ máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp\big(n\log(a)\big) = \exp\big(\log(a^n)\big) = a^n$.

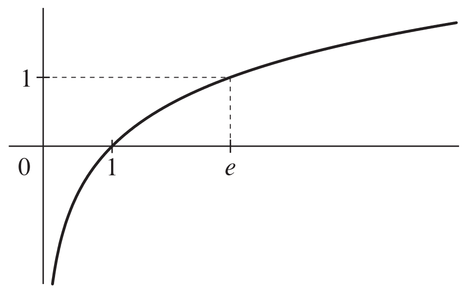
Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ platí

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

[7] Leonhard Euler (1707-1783)

Oba vztahy snadno ověříme použitím základních vlastností exponenciální a logaritmické funkce. Platí

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp\big((x+y)\log(a)\big) = \exp\big(x\log(a) + y\log a\big) \\ &= \exp\big(x\log(a)\big)\cdot\exp(y\log a) = a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= \exp\big(y\log(a^x)\big) = \exp\big(y\log(\exp(x\log a))\big) \\ &= \exp(yx\log a) = \exp(xy\log a) = a^{xy}. \end{aligned}$$



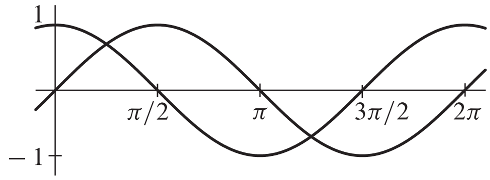
OBRÁZEK 2. Graf funkce logaritmus

1.8.18 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)**.** Funkce **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, mají definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven intervalu $[-1,1]$. Tyto funkce mají následující vlastnosti:

- funkce sin a cos jsou 2π-periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,
- existuje jednoznačně určené kladné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Z těchto vlastností lze snadno odvodit řadu dalších vlastností:

- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+\pi) = -\sin(x),\ \cos(x+\pi) = -\cos(x)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$,
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pi) = -1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$.

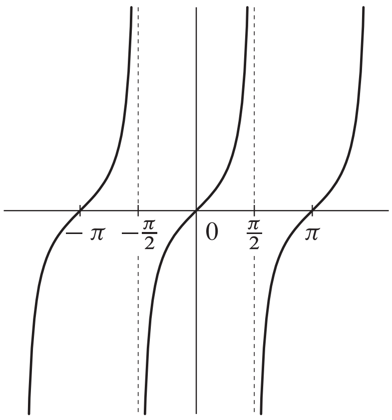


Obrázek 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

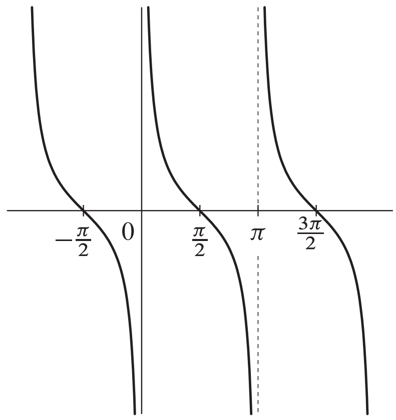
1.8.19 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens)**.** Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},\\
\operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

- funkce tg a cotg jsou π-periodické,
- $\forall x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\colon\ \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$.



Obr. 4. Graf funkce tangens



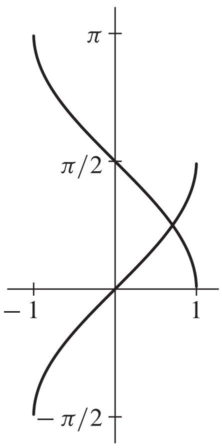
Obr. 5. Graf funkce kotangens

1.8.20. Cyklometrické funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

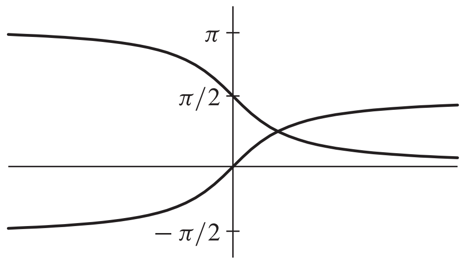
$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, & \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},\\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, & \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Uvedené definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté. Nyní uvedeme základní vlastnosti cyklometrických funkcí:

- funkce arcsin je lichá,
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(1) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 1]\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
- $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- arctg je rostoucí a lichá funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
- $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$,
- arccotg je klesající funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



OBRÁZEK 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.9. Příklady úvodní kapitoly

1.9.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon). \quad (1.20)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.30. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.30 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\neg\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \neg\big(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \neg\big(\forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \exists x \in \mathbb{R} \colon \neg\big(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon\big)$$

Podle Věty **??**(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \exists x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x-1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x-1| < \delta$. Navíc pro $|x-3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x-3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.20) neplatí. ♣

1.9.2. Příklad. Nechť $V(x)$, $x \in A$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists! x \in M \colon V(x) \quad (1.21)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.30.

Řešení. Výrok (1.21) lze zapsat ve tvaru

$$\Big(\exists x \in M : V(x)\Big) \wedge \Big(\forall y, z \in A : \big((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z\big)\Big) \tag{1.22}$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in A$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle 1.1.30 a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.22) ve tvaru

$$\Big(\forall x \in M : \neg V(x)\Big) \vee \Big(\exists y, z \in A : \big(V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z\big)\Big).$$

♣

1.9.3. Příklad (vlastnosti průniku)**.** Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
(b) $A \cap A = A$,
(c) $A \cap B = B \cap A$,
(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(e) $A \cap B \subset A$,
(f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
(g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cap B) \subset (C \cap D)$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.9.4. Příklad (vlastnosti sjednocení)**.** Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cup A = A$,
(b) $A \cup A = A$,
(c) $A \cup B = B \cup A$,
(d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $A \subset A \cup B$,
(f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,
(g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definice sjednocení a inkluze. ♣

1.9.5. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z Věty 1.6.4, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

♣

1.9.6. Příklad (součet aritmetické řady)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n. \tag{1.23}$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^{1} (ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Předpokládejme platnost vztahu (1.23) pro pevně dané n, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+2)a + 2b\big)(n+1). \tag{1.24}$$

Levou stranu (1.24) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \left(\sum_{i=1}^{n} (ai + b)\right) + \big(a(n+1) + b\big).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} (ai + b)\Big) + \big(a(n+1) + b\big) \\ &= \frac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n + \big(a(n+1) + b\big) \\ &= \frac{1}{2}\big((n+2)a + 2b\big)(n+1). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.9.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n + 1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.9.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Tvrzení platí pro $n = 3$, neboť

$$2 \cdot 3^2 = 18 \geq 16 = (3+1)^2.$$

Předpokládejme nyní platnost nerovnosti pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Předpokládáme tedy $2n^2 \geq (n+1)^2$. Potom

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2 &= 2n^2 + 4n + 2 \geq (n+1)^2 + 4n + 2 \\ &= n^2 + 6n + 3 = (n^2 + 4n + 4) + (2n - 1) \\ &= (n+2)^2 + (2n-1) \geq (n+2)^2. \end{aligned}$$

Tím je dokončen indukční krok. Z principu matematické indukce nyní vyplývá požadované tvrzení. ♣

1.9.9. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Opět použijeme princip matematické indukce popsaný v paragrafu 1.2.7, přičemž v prvním kroku dokážeme výrok pro $n = 4$. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$ a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.9.8 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle (modifikovaného) principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.9.10 (varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n) \tag{1.25}$$

dokázat pomocí následující varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.25). Matematickou indukcí ověřme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n-1) \tag{1.26}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Předpokládejme, že tvrzení (1.26) platí pro n, tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v 1.2.7, dokázán výrok (1.26).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n) \tag{1.27}$$

Nyní ověříme platnost (1.25). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.10 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k - 1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.25) podle 1.26 ve druhém případě podle 1.27. Tím je tvrzení (1.25) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.9.11. Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2, \infty) : (1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.28}$$

Řešení. Matematickou indukcí ve variantě z 1.9.10 dokážeme platnost (1.28) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ vztah (1.28) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.28) z následujících nerovností

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Tím je ověřen bod (1) v 1.9.10. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.28). Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1 + (n+2)x + (2+x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2+x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$. Tím je dokázána (2) podle 1.9.10, a tedy i Bernoulliova nerovnost. ♣

1.9.12. Příklad. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) platí

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

odtud plyne $2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost obdržíme

$$\begin{aligned}(n+1)! = n! \cdot (n+1) &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1)\\ &= \frac{2 \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

♣

1.9.13 (další varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \tag{1.29}$$

dokázat pomocí následující varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(1) platí $V(1)$,
(2) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
(3) pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (1)–(3) plyne (1.29). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N} : V(2^m). \tag{1.30}$$

Z (1) a (2) plyne platnost $V(2)$. Nechť nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (2). Tím je tvrzení (1.30) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.29) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N};\ j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B. Množina B je podmnožinou $\mathbb{N}$, takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.9.9 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.7.13. Označme $G = \max B$. Platí tedy $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.30) platí $V(2^{n_0})$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G+1)$ platí. Podle (3) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.9.14. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem). Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.31}$$

Řešení. Postupně ověříme (1)–(3) z 1.9.13, přičemž $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.31).

(1) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(2) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.31) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.9

$$\frac{A + B}{2} \geq \sqrt{AB}. \tag{1.32}$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n-tici $x_1, \dots, x_n$ a poté pro n-tici $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\Big(\tfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \tfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Nerovnost (1.32) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.33) dává

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (2).

(3) Předpokládejme, že platí $V(n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n-tici čísel $y_1, \dots, y_n$ definovanou předpisem

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}. \tag{1.34}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} &= \frac{(n-1)D + D}{n} = D \qquad \text{a} \\ \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}. \end{aligned}$$

Pak můžeme přepsat (1.34) ve tvaru

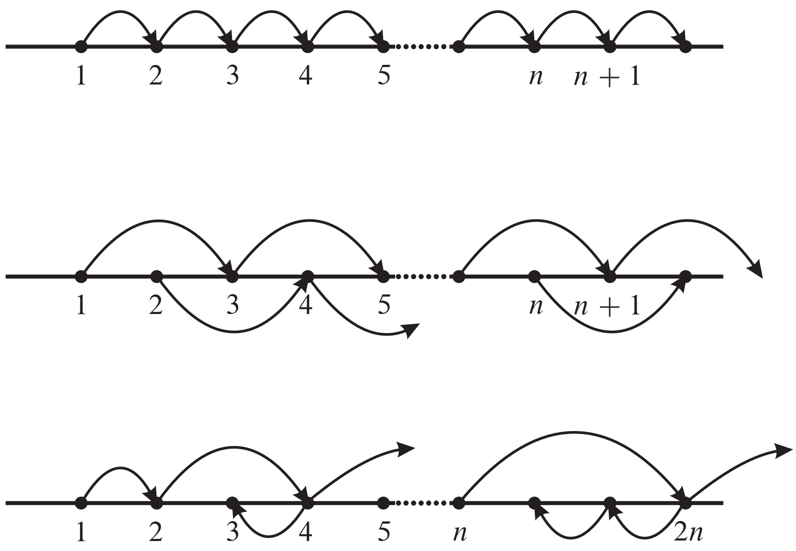
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\,\sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (3) matematické indukce. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. ♣

1.9.15. Poznámka. Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.9.13 a 1.9.13 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



Obrázek 8.

1.9.16. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dokažte, že pak existuje $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a^n \geq cn^2$.

Řešení. Označme $\delta = a - 1$. Potom $\delta > 0$, a tedy pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, podle binomické věty (Věta 1.6.4) platí

$$a^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 > \tfrac{1}{2}n(n-1)\delta^2.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, zřejmě platí $n(n-1) \geq \frac{1}{2}n^2$, a tedy dostáváme

$$a^n \geq \tfrac{1}{4}\delta^2 n^2. \tag{1.35}$$

Položme $c = \min\{\frac{1}{4}\delta^2, a\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí nerovnost $a^n \geq cn^2$ podle (1.35). Dokazovaná nerovnost platí i pro $n = 1$, neboť $a \geq c$. ♣

1.9.17. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci. Číslo 2 je prvočíslo, a proto tvrzení platí. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Nechť D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 1 < d < n+1$, která dělí $n+1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n+1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Vezměme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p, které dělí d. Protože d dělí $n+1$, dělí p také $n+1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.9.18. Příklad (Eukleidés[8]). Ukažte, že množina prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Nechť $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.9.17). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i(n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel $p_1, \dots, p_k$. To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.9.19. Příklad (obraz množiny a množinové operace). Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset X$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud $A \subset B$, pak platí $f(A) \subset f(B)$.
(b) Platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(c) Platí $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ukažte, že předchozí inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, tak platí $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

K sestrojení požadovaného příkladu uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f : X \to Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. ♣

1.9.20. Příklad (vzor množiny a množinové operace). Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset Y$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
(b) Platí $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(c) Platí $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
(d) Platí $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

[8]Eukleidés (asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l.)

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.9.21. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru)**.** Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení.

(a) Pro každé $A \subset X$ platí $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) Nechť $\mathcal{H}(f) = Y$. Pro každé $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
(c) Ukažte, že f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset X$ platí $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
(d) Ukažte, že f je „na" právě tehdy, když pro každou množinu $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in A$, potom $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Nechť $B \subset Y$. Pokud $y \in B$, pak díky surjektivitě existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Nechť $f : X \to X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$.

(d) Důkaz je podobný jako v (c). ♣

1.9.22. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$. Ukažte, že platí.

(a) Funkce f klesá na $(0, 1]$, roste na $[1, \infty)$ a v bodě 1 má minimum.
(b) Funkce $g = f|_{(0,1]}$, $h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
(c) Platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Najděte inverzní funkci k funkcím g a h.
(d) Najděte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.
(e) Rozhodněte, zda existuje funkce $\psi : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ splňující $\varphi = \psi \circ f$, pokud je funkce $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definována předpisem $\varphi(x) = x + \frac{2}{x} + 1$ nebo $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}$.

Řešení. (a) Vezměme $0 < x < y \leq 1$. Pak je nerovnost $f(x) > f(y)$ ekvivalentní s nerovností
$$\frac{(y-x)(1-xy)}{xy} > 0,$$
která platí díky nerovnosti $xy < y^2 \leq 1$. Obdobně ověříme, že f roste na intervalu $[1,\infty)$. V bodě 1 má tedy minimum, jehož hodnota je $f(1) = 2$.

(b) Funkce g je klesající na $(0,1]$ a funkce h rostoucí na $[1,\infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Protože je g klesající na $(0,1]$ a $f(1) = 2$, zjevně platí $\mathcal{H}(g) \subset [2,\infty)$. Mějme nyní dáno $y \in [2,\infty)$. Pak rovnice $x + \frac{1}{x} = y$ má dle 1.8.11 dva kořeny
$$x_1 = \frac{1}{2}\Big(y + \sqrt{y^2-4}\Big), \quad x_2 = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2-4}\Big).$$
Protože hledáme x splňující $g(x) = y$ v intervalu $(0,1]$, je tímto hledaným x číslo x_2, neboť $x_2 \in [0,1]$, jak lze snadno ověřit. Tedy $\mathcal{H}(g) = [2,\infty)$.

Pro $y \in [2,\infty]$ jsem nalezli $x = \frac{1}{2}\big(y - \sqrt{y^2-4}\big)$ splňující $g(x) = y$. Protože již víme, že $g\colon (0,1] \to [2,\infty)$ je bijekce, platí
$$g^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2-4}\Big), \quad y \in [2,\infty).$$
Obdobně odvodíme, že $\mathcal{H}(h) = [2,\infty)$ a $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\big(y + \sqrt{y^2-4}\big)$ pro $y \in [2,\infty)$. Zřejmě tedy $\mathcal{H}(f) = [2,\infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2,\infty) \subset (0,\infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0,\infty)$ platí
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) &= x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\\ &= \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1}.\end{aligned}$$
Dále platí dle (c) a (a)
$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \circ f) &= f\Big(f\big((0,\infty)\big)\Big) = f\big([2,\infty)\big)\\ &\subset [f(2),\infty) = \big[\tfrac{5}{2},\infty\big).\end{aligned}$$
Mějme nyní dáno $z \in \big[\frac{5}{2},\infty\big)$. Dle (b) a (c) existuje $y \in [1,\infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$, jinak by totiž platilo $z = f(y) < f(2) = \frac{5}{2}$, což by byl spor. Opět podle (c) existuje $x \in [1,\infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy
$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = z$$
a $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \big[\frac{5}{2},\infty\big)$. Tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \big[\frac{5}{2},\infty\big)$.

(e) Použijeme Příklad A.0.48, kde $A = (0, \infty)$, $B = [2, \infty)$, $C = \mathbb{R}$. Tedy $f : A \to B$ a $\varphi : A \to C$. Ověřme pro

$$\varphi(x) = x + \frac{2}{x} + 1 = \left(x + \tfrac{1}{x}\right)^2, \quad x \in (0, \infty),$$

podmínku (ii) Příkladu A.0.48. Zjevně totiž platí $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, kdykoliv platí $f(x_1) = f(x_2)$. Tedy Příklad A.0.48(i) říká, že požadovaná funkce $\psi : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ existuje. Naproti tomu funkce $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$, podmínku (ii) Příkladu A.0.48 nesplňuje. Například pro body $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 2$. Proto funkce $\psi : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ splňující $\varphi = \psi \circ f$ neexistuje. ♣

1.9.23. Příklad. Uvažujte předpis $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$. Určete definiční obor f, tj. určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která výraz $f(x)$ určuje reálné číslo. Ukažte, že funkce f je prostá, spočtěte inverzní funkci k f a určete $f\big((0, \infty)\big)$.

Řešení. Funkce $x \mapsto x^2 + x + 1$ nabývá pouze kladných hodnot, neboť diskriminant rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ je záporný a koeficient u členu x^2 je kladný. Čitatel uvažovaného výrazu je tedy definován pro každé $x \in \mathbb{R}$. Definiční obor funkce f je pak roven $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nechť platí rovnost $f(x) = y$, tj.

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} = y. \tag{1.36}$$

Poněvadž $x \neq 0$, je vztah (1.36) splněn právě tehdy, když platí

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = yx + 1. \tag{1.37}$$

Pokud je výraz $yx + 1$ nezáporný, pak je vztah (1.37) splněn právě tehdy, když platí

$$x^2 + x + 1 = y^2x^2 + 2yx + 1. \tag{1.38}$$

Pokud $y \notin \{1, -1\}$, pak musí x splňovat rovnost $x = \frac{2y-1}{1-y^2}$. Pokud $y \in \{1, -1\}$, pak neexistuje žádné $x \in \mathcal{D}(f)$ splňující uvedenou rovnost. Odtud plyne, že funkce f je prostá, neboť pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje nejvýše jedno $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(X) = y$. Nerovnost $yx + 1 > 0$ je splněna právě když je výraz $\frac{y^2-y+1}{1-y^2}$ nezáporný. Čitatel posledního výrazu je vždy kladný a jmenovatel je kladný, právě když $y \in (-1, 1)$. Odtud plyne, že $\mathcal{H}(f) = (-1, 1)$ a inverzní funkce má tvar $f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{1-y^2}$. Výraz $\frac{2y-1}{1-y^2}$ je v intervalu $(-1, 1)$ kladný, právě když $y > \frac{1}{2}$. Odtud plyne $f\big((0, \infty)\big) = (\frac{1}{2}, 1)$. ♣

1.9.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.6.18 také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M. Zdá se, že čísla z množiny M mohou být „libovolně malá“, a tedy žádné kladné číslo by nemělo být dolní závorou M. Proto je 0 vhodným kandidátem na infimum M. Ukážeme, že opravdu platí $\inf M = 0$. Ověříme platnost podmínek (c) a (d) z 1.6.14.

Platnost první podmínky plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \geq 0$. Pro ověření druhé podmínky musíme ukázat, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \ \exists x \in M : y > x.$$

Mějme tedy $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, dáno. Z Věty 1.6.28 plyne existence přirozeného čísla n splňujícího $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.6.14, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.9.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.6.18 také $\inf M = 0$. Snadno odhadneme, že supremem množiny M bude patrně 1. Tuto domněnku nyní dokážeme.

Platnost podmínky (c) z 1.6.14 plyne přímo z definice intervalu. Pro ověření podmínky (d) dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \ \exists x \in [0, 1) : y < x.$$

Nechť tedy $y \in \mathbb{R}$, $y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1 + y)\}$. Díky tomu, že platí $y < 1$, dostáváme $0 \leq x < 1$, a tedy $x \in [0, 1)$. Z nerovnosti $y < 1$ dále plyne odhad $y < \frac{1}{2}(1 + y)$, a proto $y < x$. Tím je podmínka (d) ověřena, a tedy skutečně $\sup M = 1$. ♣

1.9.26. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ je hodnota zlomku $\frac{p}{p+q}$ kladné číslo menší než 1.

Proveďme nyní následující neformální úvahu. Nechť $p = 1$ a q je „velké“ číslo. Pak zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude „blízko“ 0. Obdobně, je-li $q = 1$ a p je „velké“ číslo, pak je zlomek $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}$ „blízko“ 1. Jako rozumná se tedy jeví domněnka, že $\inf M = 0$ a $\sup M = 1$.

Dokážeme nejprve $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.6.14 plyne z nerovnosti $\frac{p}{p+q} \geq 0$, která platí pro každé $p, q \in \mathbb{N}$. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \ \exists p, q \in \mathbb{N} : y > \frac{p}{p+q}.$$

Mějme $y \in \mathbb{R}, y > 0$, dáno. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.6.28 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y-1}$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Tím jsem dokončili důkaz, že $\inf M = 0$.

Nyní ověříme, že $\sup M = 1$. Protože platí $\frac{p}{p+q} \leq 1$ pro každé $p, q \in \mathbb{N}$, je podmínka (a) z 1.6.14 splněna. Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \; \exists p, q \in \mathbb{N} : y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$. Z Věty 1.6.28 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

KAPITOLA 2

Limita posloupnosti

2.1. Úvod

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost meteorologických měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat jako je například inflace nebo nezaměstnanost a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Formální definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.26(a)).

2.1.1. Definice. **Konečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^{n}$. Číslo a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.26(b)).

2.1.2. Definice. **Nekonečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

V dalším textu budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost.

2.1.3. Nyní uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovnictví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1 + \tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n-tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1+\tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1+\tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1+\frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1+\frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n = \left(1+\frac{\tilde{p}}{n}\right)^n a$.

Nyní se můžeme ptát, zda budou hodnoty a_n nebo b_n s rostoucím n růst. Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze" nebo se budou „blížit" k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A, které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A. Takto postupoval Archimédés, který délku obvodu kruhu počítal přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečného obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme, jsme neformálně užili slov „blížit se" a „přibližovat se" o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obratům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále. Ještě před jeho zavedením se budeme krátce zabývat základními vlastnostmi posloupností.

2.1.4. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označuje posloupnost, tedy zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a jde tedy o podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak známe i $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

2.1.5. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá **konstantní**. Množina všech členů této posloupnosti je jednoprvková.

2.1.6. Příklad. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina $\mathbb{N}$, ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

Připomeňme, že podle 1.4.27 může být posloupnost definována také rekurentně. Příklad takto zadané posloupnosti následuje.

2.1.7. Příklad. Fibonacciova[1] posloupnost je dána rekurentním předpisem

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Začátek této posloupnosti má tvar

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Další informace o této posloupnosti lze nalézt například v knize [**6**].

Ještě jinou možnost zadání posloupnosti ilustruje následující příklad.

2.1.8. Příklad. V tomto příkladu definujeme posloupnost reálných čísel pomocí principu matematické indukce. Položíme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n. Podle Věty 1.9.18 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina

$$A_n = \{k \in \mathbb{N};\ k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$$

neprázdná. Podle Věty 1.6.34 má tato množina nejmenší prvek. Položíme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme podle principu matematické indukce definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n-té prvočíslo, tedy

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad p_5 = 11, \quad p_6 = 13, \quad \ldots$$

Podotkněme, že určit n-tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [**4**].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.9. Příklad. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ \ldots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením“ číslic v dekadickém zápisu členu a_n. Člen $a_1 = 1$ přečteme ve formě „jedna jednička“, což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Dále čteme „dvě jedničky“ a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička“, takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [**3**].

---

[1] Leonardo Fibonacci (asi 1170–1250)

Nyní zavedeme několik nových pojmů, které popisují důležité základní vlastnosti posloupností.

2.1.10. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.11. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

2.1.12. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ∎

2.1.13. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.1.14. Poznámka. Upozorněme na to, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.“ není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.“ Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.“ a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.“.

2.1.15. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n\colon a_m \leq a_n.$$

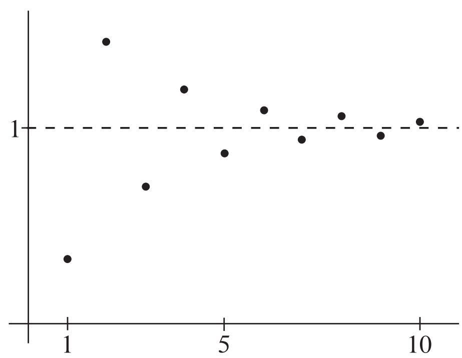
Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

2.1.16. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{cq^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**. Tato posloupnost je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $c = 0$.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Další výklad začneme dvěma příklady. Uvažujme nejprve posloupnost $\{(-1)^n\}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily" (viz Obrázek **??**).

Nechť nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



Obrázek 1.

V tomto případě se naopak zdá být zřejmé, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží" k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

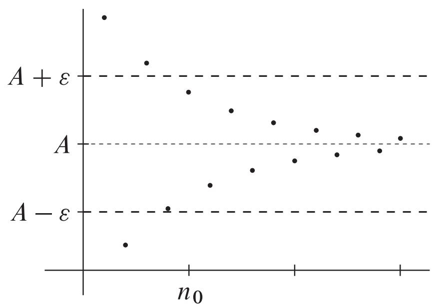
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.2.2. Jestliže tvrdíme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A, musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadané kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby každý prvek posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 se již od hodnoty A nevzdálil o více než o „maximální povolenou odchylku“ vymezenou číslem ε, tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

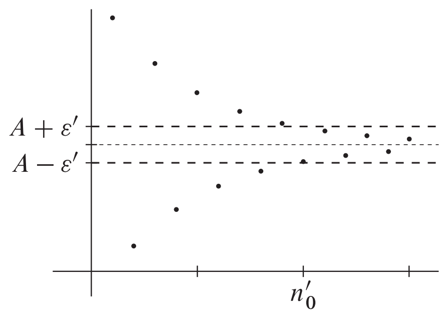
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε (viz následující dva obrázky).

Na Obrázku 2.2.2 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadané ε. Na Obrázku 2.2.2 bylo zadáno ε' menší než ε. Číslo n_0 však nesplňuje podmínku (2.2), kde ε je zaměněno za ε', neboť existují $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pro která nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Pro index n'_0 (větší než n_0) je podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n'_0, splněna.



Obrázek 2.



Obrázek 3.

2.2.3. Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (náš protivník) volí v prvním tahu hry kladné číslo ε. Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0. Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A. Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0, aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.4. Věta (jednoznačnost limity)**.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Nechť čísla $A, B \in \mathbb{R}$ jsou limity téže posloupnosti $\{a_n\}$. Dokážeme, že potom platí $A = B$.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ i $|a_n - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.10) máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.6.13 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ■

2.2.5. Označení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

2.2.6. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.4. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.7. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že **má vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Nyní vyšetříme konvergenci několika posloupností.

2.2.8. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

2.2.9. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Naším úkolem je nalézt n_0 takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Nerovnost $-\varepsilon < \frac{1}{n}$ je automaticky splněna pro každé $n \in \mathbb{N}$. Druhá nerovnost $\frac{1}{n} < \varepsilon$ platí právě tehdy, když $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy za n_0 stačí zvolit jakékoli přirozené číslo větší než $\frac{1}{\varepsilon}$, protože pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Existenci takového n_0 nám zaručuje Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.6.28). ♣

Příklad 2.2.9 ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.10. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

♣

2.2.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Je užitečné uvědomit si, jak vypadá negace výroku „$\{a_n\}$ je konvergentní". Posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje, tj. nemá vlastní limitu, právě tehdy, když platí

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

2.2.12. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.28) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy

$$\left|n^4 - A\right| \geq n^4 - A \geq |A| + 1 - |A| = 1.$$

Podle 2.2.11 tedy posloupnost $\{n^4\}$ diverguje. ♣

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé číslo $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. V předchozím příkladu bylo sice možné pracovat s libovolným kladným reálným číslem ε, ale v dalších dvou úlohách bude volba vhodného ε hrát důležitou roli.

2.2.13. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n liché. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n sudé. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu. ♣

2.2.14. Poznámka. Na rozdíl od Příkladu 2.2.12 nelze při řešení Příkladu 2.2.13 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“.

2.2.15. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right)\right\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = \frac{1}{36}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Předpokládejme nejprve, že $A \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ liché a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom $\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} > 0$, a tedy

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|(-1)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A\right)\right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

jinými slovy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Nyní předpokládejme, že $A < 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ sudé a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|\frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A\right| \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy opět $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Podle 2.2.11 tedy posloupnost $\{a_n\}$ nemá vlastní limitu. ♣

V Příkladu 2.2.10 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$ ve smyslu Definice 2.2.1. V Příkladech 2.2.12

a 2.2.15 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

Tedy $\lim b_n = A$. ■

2.2.17. Poznámka. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

Následující příklad je snadným důsledkem Příkladu 2.2.8 a Věty 2.2.16.

2.2.18. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek namísto podmínky původní.

2.2.19. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{2.3}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (2.3) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.3). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Dle (2.3) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy $\lim a_n = A$. ■

2.2.20. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.4) plyne z definice limity a 1.1.25, kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy dle (2.4) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ■

2.2.21. Poznámka. Z Lemmatu 2.2.20 plyne, že pro ověření existence limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je libovolně malé pevně stanovené číslo. V těchto případech se tedy stačí zabývat jen „malými hodnotami“ ε, což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.22. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.1) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Jestliže naopak platí (2.5), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.19 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztah mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.23. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.6.11(a) odhad $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \big||a_n| - |A|\big| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

2.2.24. Poznámka. Opačná implikace ve Větě 2.2.23 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (viz Příklad 2.2.13), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.25. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí: $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ \big||a_n|\big| < \varepsilon.$$

Protože $\big||a_n|\big| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ■

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.26. Věta. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Existuje tedy $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Dle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.7.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $|a_n| \leq K$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. ■

2.2.27. Poznámka. Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

2.2.28. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností z posloupnosti** $\{a_n\}$, případně **podposloupností posloupnosti** $\{a_n\}$.

2.2.29. Příklady. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

(a) posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$;
(b) posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k+1$, $k \in \mathbb{N}$;
(c) posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$;
(d) posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k-té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.30. Poznámka. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.28 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnosti $a_2, a_2, a_2, a_2, \dots$ nebo $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \dots$ obecně neurčují podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.31. Příklad. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je zadána předpisem $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme její podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní. K zadané posloupnosti jsme tedy nalezli dvě konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu divergentní podposloupnost.

Příklad 2.2.31 ukazuje, že podposloupnosti divergentní posloupnosti mohou konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.32. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí poslupnost přirozených čísel. Potom platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.33. Lemma. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Věty 1.6.25 plyne, že $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ∎

Důkaz Věty 2.2.32. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n^*\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.6}$$
Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.6) dostaneme $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ∎

2.2.34. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak posloupnost $\{a_n\}$ diverguje. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A, pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.32 limitu A, což by byl spor.

2.2.35. Příklad. Předchozí odstavec nám umožňuje dokázat divergenci posloupnosti $\{(-1)^n\}$ jiným způsobem než v Příkladu 2.2.13. Označíme-li $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak dle Příkladu 2.2.31 je $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, a tedy posloupnost $\{(-1)^n\}$ diverguje.

V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.36. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. (a) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti. Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.10) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.19 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.26 je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Zvolíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.10) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B|\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n b_n - AB| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.19 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}\,|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n|\,|B|}\,|b_n - B|\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podle definice limity existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{2}\,|B|$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.8}$$

Dle Důsledku 1.6.11(a) a (2.8) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\big||B| - |b_n|\big| \leq |B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.9}$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \leq \big||B| - |b_n|\big|$, dostáváme dle (2.9) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2}\,|B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{2.10}$$

Položme

$$K = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2\,|A|}{B^2}\right\}.$$

Pak podle (2.7) a (2.10) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &\leq \frac{2}{|B|}\,|a_n - A| + \frac{2\,|A|}{B^2}\,|b_n - B| \\ &\leq K(|a_n - A| + |b_n - B|). \end{aligned}$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_A, n_B\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, potom máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < 2K\varepsilon.$$

Tvrzení (c) pak plyne z Lemmatu 2.2.19. ■

2.2.37. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.9 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.38. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. V případě, kdy jedna či obě posloupnosti divergují, nelze o konvergenci posloupnosti definované jako jejich součet, součin či podíl obecně nic říci. Uvedeme několik příkladů.

- Nechť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Nechť $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty 2.2.26 a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.9.
- Nechť $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.37 a $\{a_n b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

2.2.39. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, nechť $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, a konečně nechť $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j .$$

Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Máme-li $l + 1$ posloupností $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l + 1$, pak platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n\to\infty}\Big(\big(\sum_{j=1}^{l} a_n^j\big) + a_n^{l+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j + \lim_{n\to\infty} a_n^{l+1} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{l} A_j\Big) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j ,\end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z Věty 2.2.36(a) a třetí z indukčního předpokladu.

Tvrzení týkající se součinu konečně mnoha posloupností lze dokázat obdobně. ■

2.2.40. Příklad. Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{n^2+n}{2n^2+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}.$$

Podle Příkladu 2.2.9 je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a podle Příkladu 2.2.8 je $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Podobně odvodíme $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{7}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{7}{n^2})} \tag{2.11}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \tag{2.12}$$

$$= \frac{1+0}{2+7\cdot 0} = \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.11), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.12) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu v (2.12) však již známe a výpočet (2.13) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti ve (2.13) a díky tomu i platnost rovnosti (2.12). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.11) a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění jako například v předchozím odstavci *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.41. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje číslo $K > 0$ splňující $|b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.19 platí $\lim a_n b_n = 0$. ■

2.2.42. Poznámka. Tvrzení Věty 2.2.41 neplyne z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ může být divergentní.

2.2.43. Příklad. Podle Věty 2.2.41 platí $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim \frac{1}{n} = 0$.

V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi pojmem limity a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.44. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$. Pak podle definice limity existují čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n < A + \frac{B-A}{2}$$

a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon B - \frac{B-A}{2} < b_n.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \frac{B-A}{2} = B - \frac{B-A}{2} < b_n.$$

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom dle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ■

2.2.45. Poznámky. (a) Věta 2.2.44 nám dává možnost odhadnout hodnotu limity dané konvergentní posloupnosti shora nebo zdola pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

(b) Ve Větě 2.2.44(b) nelze nerovnosti „$a_n \geq b_n$“ a „$A \geq B$“ nahradit nerovnostmi „$a_n > b_n$“ a „$A > B$“. Za protipříklad poslouží posloupnost $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ a posloupnost $\{b_n\}$, jejíž všechny členy jsou rovny nule. Pak zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale $A = B = 0$.

2.2.46. Věta (o dvou strážnících). Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergují a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom $\{c_n\}$ konverguje a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu dle předpokladu (b) existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. ■

2.2.47. Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle Věty 1.6.32 tedy pro pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$. ♣

2.2.48. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.44(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro taková $n \in \mathbb{N}$ ale díky monotonii odmocniny (Věta 1.6.32(a)) máme $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.6.5 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - A}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{A} + \cdots + \sqrt[k]{a_n}(\sqrt[k]{A})^{k-2} + (\sqrt[k]{A})^{k-1}}\right| \\
&\leq \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}}\,|a_n - A|\,.
\end{aligned}$$

Odtud a použitím rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}}\,|a_n - A| = 0$ obdržíme podle Věty 2.2.46 $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = 0$. Podle Věty **??** platí $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) dostáváme $\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. ♣

2.2.49. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí dle binomické věty (Věta 1.6.4)

$$n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $n - 1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (Věta 1.6.32(a)) pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Podle Příkladu 2.2.9, Příkladu 2.2.48 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.46 máme $\lim \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.50. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Nechť nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.28) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) a Příkladu 2.2.49 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Nechť nyní $c \in (0,1)$. Potom dle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) a dle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.28) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem $b_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

2.3.2. Příklad. Dokažte, že $\lim n = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n \geq n_0 > K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Naším cílem nyní bude rozšířit některé poznatky z předcházejícího oddílu i pro nevlastní limity. K tomuto účelu nejprve rozšíříme reálnou osu o prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme také operace sčítání a násobení a relaci uspořádání.

2.3.3. Definice. Rozšířenou reálnou osou budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}\colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R}\colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

2.3.4. Operace sčítání a násobení nejsou definovány pro všechny dvojice z $\mathbb{R}^*$. Přesněji, následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

2.3.5. Věta. Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí následující rovnosti, pokud je vždy alespoň jedna strana rovnosti definována:

(a) $x + y = y + x$,
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(c) $xy = yx$,
(d) $(xy)z = x(yz)$,
(e) $x(y + z) = xy + xz$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z Definice 2.3.3 a z vlastností sčítání a násobení reálných čísel pomocí rozboru jednotlivých případů, kdy postupně rozlišujeme, zda prvky x, y a z jsou reálné, nebo se rovnají ∞, nebo se rovnají $-\infty$. ■

Právě provedené rozšíření množiny reálných čísel nám umožňuje definovat pojmy suprema a infima pro libovolné podmnožiny $\mathbb{R}$.

2.3.6. Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a nechť $G \in \mathbb{R}^*$ má následující vlastnosti:

(a) $\forall a \in A\colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G \; \exists a \in A\colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Podobně definujeme **infimum** množiny A.

2.3.7. Je-li $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná a shora omezená, pak se pojem suprema zavedený v Definici 1.4.6 shoduje s pojmem zavedeným v Definici 2.3.6. Supremum shora neomezené množiny $A \subset \mathbb{R}$ je ∞. Supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Infimum zdola neomezené množiny $A \subset \mathbb{R}$ je $-\infty$. Infimum prázdné množiny je ∞. Ve zbytku textu budeme již vždy používat právě uvedenou rozšířenou definici suprema a infima. Budeme je však i nadále značit symboly sup a inf.

2.3.8. Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

2.3.9. Definice 2.3.1 je doplněním Definice 2.2.1 o případy, kdy limitou je buď ∞ nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.4) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.10. Věta (jednoznačnost limity)**.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{a_n\}$. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.4). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞. Podle Věty 2.2.26 je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, a tím spíš je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Ve zbývajících dvou případech je důkaz obdobný. ■

2.3.11. Poznámky. (a) Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.10. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu (vlastní či nevlastní), pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl (pro srovnání viz Poznámku 2.2.6).

(b) Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.12. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.3.13. Lemma. Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{|\tilde{A}-A|}{2}$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Nyní předpokládejme, že $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Odtud opět plyne $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$ je obdobný případu $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.12) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní) jedinou formulí. To je náplní následujícího lemmatu.

2.3.14. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom je výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.14) shodná a formulí (2.1).

Nechť nyní $A = \infty$. Dokážeme platnost formule (2.14). Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Víme, že pro $K = \frac{1}{\varepsilon}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$, a tedy formule (2.14) platí.

Nyní naopak předpokládejme, že platí (2.14). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí

$\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \geq K$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

V případě $A = -\infty$ je důkaz obdobný. ∎

Ve zbývající části tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity.

Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.16.

2.3.15. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2\colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$b_n = a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Tedy $\lim b_n = A$. ∎

2.3.16. Poznámka. Z předchozí věty plyne následující zobecnění Poznámky 2.2.17. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A.

Následující tvrzení je obdobou Věty 2.2.23.

2.3.17. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.23. Nechť $A = \infty$. Pak z předpokladu $\lim a_n = A$ plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.15 platí $\lim |a_n| = \lim a_n = \infty = |A|$.

Konečně nechť $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n \in B(\infty, \varepsilon) = B(|A|, \varepsilon)$. Dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ∎

Následující věta je jistou jednostrannou obdobou Věty 2.2.26.

2.3.18. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim a_n = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $\varepsilon = 1$. Dle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n \in B(\infty, 1)$. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.7.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \min\{M, 1\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq K$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ■

2.3.19. Obdobně jako ve Větě 2.3.18 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = -\infty$, potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená.

Věta 2.2.32 platí v nezměněné podobě i pro nevlastní limity.

2.3.20. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, která určuje naši vybranou posloupnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^*\colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.15}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.15) dostaneme $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ■

Tvrzení věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32 a 2.3.20) nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.21. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\left\{n_k^j;\ j \in \{1, \dots, l\},\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_1 \colon a_{n_k^1} \in B(A,\varepsilon), \\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_2 \colon a_{n_k^2} \in B(A,\varepsilon), \\ &\qquad\vdots \\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_l \colon a_{n_k^l} \in B(A,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky podmínce (2.16) existují $j \in \{1, \dots, l\}$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_k^j$. Potom platí

$$n_k^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí, a proto $k \geq k_j$. Podle j-té podmínky v (2.17) dostaneme $a_n = a_{n_k^j} \in B(A,\varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ∎

2.3.22. Poznámka. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = A.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Poznamenejme, že ve Větě 2.3.21 je důležité, aby počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty$, $\{n_k^2\}_{k=1}^\infty$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ byl konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí. Příslušný protipříklad je uveden v Příkladu 2.5.13.

Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36).

2.3.23. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat způsobem velmi podobným důkazu Věty 2.2.36. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b) v případě, kdy $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a $B = -\infty$.

Musíme tedy dokázat, že

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } A < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } A > 0. \end{cases}$$

Nechť nejprve $A < 0$ a nechť $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{A}{2}$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3A}{2}, \frac{A}{2})$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{Ab_n}{2} > K,$$

takže $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$.

V případě $A > 0$ je důkaz zcela obdobný. ■

2.3.24. Příklad. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) vynechat. Vskutku, nechť například $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$. Potom $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim(-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní.

2.3.25. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Tento příklad ukazuje, že z informace $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$ nelze odvodit hodnotu $\lim(a_n + b_n)$. Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby pro takové posloupnosti platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

2.3.26. Poznámka. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}^*$, $j = 1, \dots, l$, a dále $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j,$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností. Důkaz lze provést obdobně jako ve Větě **??**.

Příklad 2.3.24 ukazuje, že pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.23(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.27. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K němu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 : a_n > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2L}} = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nechť nyní $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$. Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 : a_n > 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ∎

Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.44.

2.3.28. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí je $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.29. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,

(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \geq L$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak máme $c_n \geq a_n \geq L$, čímž je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka" k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.30. Věta. Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,
(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny.

2.3.31. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí $G = \sup M$.
(ii) Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Je-li $G = \sup M$, pak G je zřejmě horní závorou M.

Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.29 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, pak podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M, je automaticky $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}, G' < G$. Pak z definice limity plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. (V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$.) Našli jsme tedy prvek z množiny M, který je větší než G', čímž jsme ověřili podmínku (b) z definice suprema. ■

2.3.32. Poznámka. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.33. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.48.

Nechť $A = \infty$ a nechť $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom dle monotonie odmocniny (Věta 1.6.32) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$, tedy $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ■

V následujících příkladech ukážeme použití výše vyložených vět.

2.3.34. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.2 a Příkladu 2.3.33 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32) dále plyne, že $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.23(c)) můžeme počítat

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.35. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right)$.

Řešení. Zde opět nemůžeme užít větu o limitě součtu, protože $\lim \sqrt{4n^2 - n} = \lim \sqrt{n(4n-1)} = \infty$ (Věta 2.3.23(b) a Příklad 2.3.33) a $\lim(-2n) = -\infty$. Nejprve rozšíříme n-tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}$$

a použijeme vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, kde položíme $a = \sqrt{4n^2 - n}$, $b = 2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = \left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} = \frac{-n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.23 a Příkladu 2.2.48

$$\lim\left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right) = \lim \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2} = -\frac{1}{4}.$$

♣

2.3.36. Příklad. Vypočtěte $\lim \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n, které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n: $n^{\frac{3}{2}}, n^{\frac{1}{3}}, n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak

$$\frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.23 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.33:

$$\lim \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim \sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\lim \sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim \sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \lim \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$

♣

2.3.37. Poznámka. Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazení množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do $\mathbb{R}$, přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy. Posloupnost tvaru $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (značíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) a pak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$.

V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili. V případech, které budou vyžadovat jisté modifikace, na ně vždy explicitně upozorníme.

2.4. Hlubší věty o limitách

Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající. Nechť navíc $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $a_{n_0} \geq K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí díky 2.1.15 pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} \geq K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je shora omezená, tedy $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označíme $A = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dle Věty 1.6.15 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.23(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a shora omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A. Z (2.18) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A, o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.2.44(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1, \infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje}, & \text{pokud } q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $q > 1$. Pak můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne $q^n = (1+h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim(1 + hn) = \infty$, a podle Věty 2.3.29 máme $\lim q^n = \infty$.

Pokud $q \in (0, 1)$, pak podle předchozího odstavce platí $\lim(q^{-1})^n = \infty$. Aplikací Věty 2.3.23 dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $q = -1$ plyne tvrzení z Příkladu 2.2.13. Pokud $q \in (-1, 0)$, pak $\lim |q^n| = \lim |q|^n = 0$, a tedy také $\lim q^n = 0$ (Věta ??).

Je-li konečně $q < -1$, pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.23(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

2.4.6. Příklad. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ má limitu. Pokud ano, vypočtěte ji.

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.41 má tedy posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ limitu rovnou 0. ♣

Nyní uvedeme jednu velice důležitou vlastnost omezených posloupností reálných čísel, jejíž význam se ukáže až v dalších kapitolách.

2.4.7. Věta (Bolzanova-Weierstrassova věta)**.** Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto existují $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že $A \leq x_n \leq B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zkonstruujeme posloupnost intervalů $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ splňující následující podmínky:

(i) množina $I_k = \{n \in \mathbb{N};\ x_n \in [a_k, b_k]\}$ je nekonečná pro každé $k \in \mathbb{N}$,

(ii) interval $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ je roven buď $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ nebo $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$.

Pro $k = 1$ stačí položit $a_1 = A$ a $b_1 = B$. Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ je interval $[a_k, b_k]$ splňující (i) definován. Je-li množina indexů $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]\}$ nekonečná, položíme $a_{k+1} = a_k$ a $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$. Není-li tomu tak, pak z vlastnosti (i) a Věty 1.7.17(b) plyne, že množina indexů $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]\}$ je nekonečná. V tomto případě položíme $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ a $b_{k+1} = b_k$. Tím je konstrukce posloupnosti intervalů završena.

Nyní (opět induktivně) zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Prvek n_k stačí volit libovolně z nekonečné (a tedy neprázdné) množiny $\{n \in I_k;\ n > n_{k-1}\}$.

Dále víme, že dle (ii) je posloupnost $\{a_k\}$ neklesající a omezená a posloupnost $\{b_k\}$ je nerostoucí a omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) platí, že obě posloupnosti mají vlastní limity. Označme $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$ a $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$. Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k - a_k = 2^{-(k-1)}(B - A)$. Potom máme $\lim(b_k - a_k) = 0$, což podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) znamená, že $\alpha = \beta$. Víme také, že $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) pak plyne, že posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k α. ■

Nechť $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost reálných čísel. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věty 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.8. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.9. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim}\ a_n$ a $\underline{\lim}\ a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.10. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n.$$

Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje posloupnost $\{(-1)^n\}$, pro kterou platí $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

2.4.11. Věta (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.26 omezená. Můžeme tedy definovat posloupnosti reálných čísel $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a posloupnost $\{c_n\}$ neklesající. Navíc zřejmě platí $c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.6.13 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.18). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Je-li $A = -\infty$, postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ Nejprve opět předpokládejme, že platí $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v předchozí části důkazu. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{R}$ a $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \in \mathbb{R}$, $c_n \leq a_n$ a $\lim c_n = \infty$, takže z Věty 2.3.29 dostáváme $\lim a_n = \infty$.

Jestliže $A = -\infty$, pak postupujeme obdobně, přičemž místo Věty 2.3.29 použijeme Větu 2.3.30. ∎

2.4.12. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost triviální. Nechť nyní $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou nyní obě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \tag{2.19}$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.6.35(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.28) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{2.20}$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.23(a)) pak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \tag{2.21}$$

Konečně z (2.19), (2.20) a (2.21) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.13. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti $\sup\{x_k;\ k \geq n\} \leq \sup\{y_k;\ k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$, a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)). ■

2.4.14. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.15. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty) \subset H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ rostoucí posloupnosti posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.16. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $m \in \mathbb{N}$ je pevné. Potom je $\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty$ podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$ a navíc platí

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty) = H(\{a_n\}_{n=1}^\infty).$$

Inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty) \subset H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$ plyne z Poznámky 2.4.15. Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $A \in H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$. Pak existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost $\{n_{k+m}\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.33 pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_{k+m} \geq k + m > m$, je

$\{a_{n_{k+m}}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_{k+m}} = A$, a proto $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty})$.

2.4.17. Věta (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \le A \le \limsup a_n$.

2.4.18. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom z Věty 2.4.17 plyne, že $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$. Navíc je $\limsup a_n$ horní závorou množiny $H(\{a_n\})$ a zároveň jejím prvkem, takže vlastně $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$, přičemž zde maximum uvažujeme v množině $\mathbb{R}^*$. Obdobně platí $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Důkaz Věty 2.4.17. Označme $\limsup a_n = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k;\ k \ge n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Ukážeme, že existují posloupnosti indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro každé $j \in \mathbb{N}$ následující podmínky:

(a) $|b_{m_j} - A| < \frac{1}{j}$,

(b) $|b_{m_j} - a_{n_j}| < \frac{1}{j}$,

(c) $m_j \le n_j < m_{j+1}$.

Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_{m_1} - A| < 1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \ge m_1$, splňující $b_{m_1} \ge a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Odtud plyne (b) pro $j = 1$.

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsme již nalezli přirozená čísla $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k-1}$ a $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ splňující (a)–(c) pro $j \in \{1,\dots,k-1\}$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $m_k > n_{k-1}$ a $|b_{m_k} - A| < \frac{1}{k}$. Z definice b_{m_k} vyplývá, že existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \ge m_k$, splňující $b_{m_k} \ge a_{n_k} > b_{m_k} - \frac{1}{k}$. Odtud plyne (b) pro $j = k$. Navíc platí $n_k \ge m_k > m_{k-1}$. Tím je podle principu matematické indukce konstrukce posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ provedena.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ podle (a) a (b) platí

$$|a_{n_k} - A| \le |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| < \frac{2}{k},$$

a tedy $\lim a_{n_k} = A$. Tím jsme dokázali, že $A \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená. Zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro každé $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_{n_k} > k$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je shora neomezená, a proto můžeme nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozená čísla $n_1 < \cdots < n_{k-1}$. Množina $\{a_j;\ j > n_{k-1}\}$ je shora neomezená, neboť jinak by shora neomezená množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ byla sjednocením shora omezené množiny $\{a_j;\ j > n_{k-1}\}$ a konečné množiny $\{a_j;\ j \leq n_{k-1}\}$, což by byl spor. Můžeme tedy nalézt $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, takové, že $a_{n_k} > k$. Podle Věty 2.3.29 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Konečně předpokládejme, že $A = -\infty$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k;\ k \geq n\}$. Pak podle definice limes superior je $\lim b_n = -\infty$. Ukážeme, že existují posloupnosti indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro každé $j \in \mathbb{N}$ následující podmínky:

(a) $b_{m_j} < -j$,
(b) $|b_{m_j} - a_{n_j}| < \frac{1}{j}$,
(c) $m_j \leq n_j < m_{j+1}$.

Protože $\lim b_n = -\infty$, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{m_1} < -1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Odtud plyne (b) pro $j = 1$.

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsme již nalezli přirozená čísla $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k-1}$ a $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ splňující (a)-(c) pro $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Protože $\lim b_n = -\infty$, existuje $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $m_k > n_{k-1}$ a $b_{m_k} < -k$. Z definice b_{m_k} vyplývá, že existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq m_k$, splňující $b_{m_k} \geq a_{n_k} > b_{m_k} - \frac{1}{k}$. Odtud plyne (b) pro $j = k$. Navíc platí $n_k \geq m_k > m_{k-1}$. Tím je podle principu matematické indukce konstrukce posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ provedena.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ podle (a) a (b) platí

$$a_{n_k} \leq b_{m_k} + |a_{n_k} - b_{m_k}| < -k + \frac{1}{k},$$

a tedy dle Věty 2.3.30 platí $\lim a_{n_k} = -\infty$. Tím jsme opět dokázali, že $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Zbývá dokázat, že $A = \max H(\{a_n\})$. Nechť je nejprve posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Předpokládejme, že $\tilde{A} \in H(\{a_n\})$. Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ splňující $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \tilde{A}$. Potom pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_i} \leq b_{n_i}$. Dále máme $\lim_{i\to\infty} b_{n_i} = A$, a tedy podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44) platí $\tilde{A} \leq A$. Tím je dokázáno $A = \max H(\{a_n\})$.

V případě, kdy posloupnost $\{a_n\}$ je neomezená, a tedy $\limsup a_n = \infty$, je maximalita prvku ∞ v množině $H(\{a_n\})$ zřejmá.

Důkaz tvrzení $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ je obdobný. ■

2.4.19. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Důkaz. Je-li $\lim a_n = A$, pak podle Věty 2.4.11 platí $\limsup a_n = \liminf a_n = A$, takže tvrzení plyne z Věty 2.4.17. ■

2.4.20. Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $H(\{a_n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{a_{2n}\}$ a $\{a_{2n+1}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$ splňují $\lim a_{2n} = 1$ a $\lim a_{2n+1} = -1$, dostáváme inkluzi $H(\{a_n\}) \supset \{-1, 1\}$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}^*$ takové, že $A \in H(\{a_n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Podle Lemmatu 2.3.13 existuje $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položíme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $a_{n_k} = 1$ nebo $a_{n_k} = -1$, a tedy $a_{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{a_n\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Na závěr tohoto oddílu uveďme ještě jeden pojem, tzv. Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Jeho význam ukazuje pak následující věta.

2.4.21. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.4.22. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka)**.** Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a označme tuto limitu A. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v textu před Definicí 2.4.8. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně,

$$\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}.$$

Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.11 platí $\lim a_n = A$. Jak víme, $A \in \mathbb{R}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu. ■

2.4.23. Příklad. Dokažte, že posloupnost

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

konverguje.

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme výraz

$$A_k = \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1}{j^2}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$A_k \leq \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Tudíž pro každé $M, N \in \mathbb{N}$, $M \leq N$, máme odhad

$$\sum_{k=0}^{N} A_{M2^k} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{M2^k} = \frac{1}{M}\left(2 - \frac{1}{2^N}\right) < \frac{2}{M}.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) existuje $M \in \mathbb{N}$ takové, že $M > \frac{2}{\varepsilon}$. Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq m \geq M$. Z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) pro $x = 1$ plyne, že $2^n \geq n + 1 > n$, a tedy $M2^n > n$. Potom

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=0}^{n} A_{M2^k} < \frac{2}{M} < \varepsilon.$$

Dokázali jsme, že $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Podle Věty 2.4.22 je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. ♣

2.4.24. Poznámka. Předcházející příklad ilustruje význam Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Dokázali jsme konvergenci posloupnosti, aniž bychom znali hodnotu její limity. S pomocí znalostí pokročilejších partií matematické analýzy je možné dokázat, že limita této posloupnosti je rovna číslu $\frac{\pi^2}{6}$. Ověřit definici limity je však v tomto případě podstatně těžší úloha než ověřit platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky.

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\}$ konečná.

Řešení. $\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\} + 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N};\ n \leq n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Potom je posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená. Tudíž jsou obě posloupnosti konvergentní. Navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n\frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Dokázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.23(c)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.3. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Z Příkladu 2.5.2 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo e nazýváme **Eulerovým číslem**.[2]

2.5.4. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Dokažte, že pro množinu hromadných hodnot této posloupnosti platí

$$H(\{a_n\}) = \{c \in \mathbb{R}^*;\ \liminf a_n \le c \le \limsup a_n\}.$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z Věty 2.4.17 plyne inkluze „$\subset$“ a fakt, že $a, b \in H(\{a_n\})$. Stačí proto dokázat, že každý prvek intervalu (a, b) leží v množině $H(\{a_n\})$. Nechť tedy $c \in (a, b)$ je dáno. Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující $a < c - \delta < c + \delta < b$. Hlavní myšlenka důkazu spočívá v ověření následujícího pozorování:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \delta)\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > k \ \&\ a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Abychom tento fakt dokázali, uvažujme dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $j_0 > k$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \ge j_0$, platí $\left|a_{j+1} - a_j\right| < \varepsilon$. Protože $a < c - \frac{\varepsilon}{2}$, z definice limes inferior existuje $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 > j_0$, splňující $a_{j_1} < c - \frac{\varepsilon}{2}$ a protože $c + \frac{\varepsilon}{2} < b$, z definice limes superior existuje $j_2 \in \mathbb{N}$, $j_2 > j_1$, splňující $a_{j_2} > c + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme

$$N = \left\{\mathbb{N} \cap [j_1, j_2] \colon a_j < c - \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Protože $j_1 \in N$, je N neprázdná konečná množina, a existuje tak $m = \max N$. Protože $j_2 \notin N$, platí $m < j_2$. Přirozené číslo $k = m + 1$ pak splňuje $j_1 < k \le j_2$ a $k \notin N$. Proto $a_k \ge c - \frac{\varepsilon}{2}$. Dostáváme tak

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \le a_k = a_{m+1} = a_{m+1} - a_m + a_m < \varepsilon + c - \frac{\varepsilon}{2} = c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Číslo k je tedy požadovaný index, neboť $k > m \ge j_1 > j_0 > k$ a

$$c - \varepsilon < c - \frac{\varepsilon}{2} \le a_k \le c + \frac{\varepsilon}{2} < c + \varepsilon.$$

Tím je důkaz pozorování dokončen.

---

[2] Leonhard Euler, 1707–1783.

Pomocí právě ověřeného pozorování již důkaz tvrzení snadno dokončíme. Položíme $\varepsilon_k = \frac{\delta}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, a induktivně nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ splňující $a_{n_k} \in (c - \varepsilon_k, c + \varepsilon_k)$. V prvním kroku indukce nalezneme pomocí pozorování použitého pro $k = 1$ index $n_1 > 1$ takový, že $a_{n_1} \in (c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1)$. Máme-li nyní již nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in (c - \varepsilon_j, c + \varepsilon_j)$ pro $j \in \{1, \ldots, k\}$, použijeme pozorování pro přirozené číslo n_k k nalezení indexu $n_{k+1} > n_k$ takového, že $a_{n_{k+1}} \in (c - \varepsilon_{k+1}, c + \varepsilon_{k+1})$.

Tím jsme nalezli posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k c, jelikož

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_{n_k} - c\right| \le \lim_{k\to\infty} 2\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta}{2^{k-1}} = 0.$$

Tedy $c \in H(\{a_n\})$ a důkaz tvrzení je dokončen. ♣

2.5.5. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Ukažte, že platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. Nejprve dokážeme první nerovnost. Označme $B = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud $B = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme nyní $B > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $B > K > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.13 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.50 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} K \left(K^{-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.11 tedy také platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge K.$$

Díky volbě K odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq B.$$

Tím je dokázána první nerovnost. Druhá nerovnost platí podle 2.4.10. Zbývá provést důkaz třetí nerovnosti. Označme $A = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom $A \in \mathbb{R}^*$, $A \geq 0$. Pokud $A = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.22}$$

Z Věty 2.4.13 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.50 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (A+\varepsilon)\left((A+\varepsilon)^{-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A+\varepsilon.$$

Podle Věty 2.4.11 tedy také platí

$$\limsup_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A+\varepsilon,$$

a tedy celkem dostáváme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A+\varepsilon.$$

Díky volbě ε odtud plyne, že $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Tím je dokázána třetí nerovnost. ♣

2.5.6. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti nezáporných reálných čísel. Předpokládejme, že výrazy $\liminf a_n \cdot \liminf b_n$, $\liminf a_n \cdot \limsup b_n$ a $\limsup a_n \cdot \limsup b_n$ jsou definovány. Dokažte, že potom platí

$$\begin{aligned}\liminf a_n \cdot \liminf b_n &\leq \liminf(a_n b_n) \leq \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n.\end{aligned}$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$, $b = \liminf b_n$, $A = \limsup a_n$ a $B = \limsup b_n$. Potom $a, b, A, B \in \mathbb{R}^*$ a $a, b, A, B \geq 0$.

Dokážeme první ze čtyř nerovností. Jestliže $a = 0$ nebo $b = 0$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že a, b jsou nenulová a zvolme $z \in \mathbb{R}$, $0 < z < ab$. Potom existují $a', b' \in \mathbb{R}$ taková, že $a' < a$, $b' < b$ a

$a'b' = z$. Z definice limes inferior plyne, že existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > a'$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n > b'$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \liminf a_n b_n.$$

Nechť $k_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $n_k \geq \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí

$$a_{n_k} b_{n_k} \geq a'b' = z.$$

Tedy

$$\liminf(a_n b_n) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} \geq z.$$

Protože z bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\liminf a_n \cdot \liminf b_n \leq \liminf(a_n b_n).$$

Dokažme nyní druhou nerovnost. Jestliže $B = \infty$, pak $a > 0$, neboť aB je definovaný výraz, a tedy nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $B < \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $M \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq M$, platí $b_n < B + \varepsilon$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Z Věty 2.4.17 víme, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_{n_k} b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je neprázdná. Nechť tedy h je libovolná hromadná hodnota této posloupnosti a $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} b_{n_{k_j}} = h.$$

Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $n_{k_j} \geq M$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí

$$b_{n_{k_j}} < B + \varepsilon.$$

Z Věty 2.4.17 dále víme, že $\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq h$. Celkově tedy dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq h = \lim_{j\to\infty}(a_{n_{k_j}} b_{n_{k_j}}) \leq \liminf_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} (B + \varepsilon) = a(B + \varepsilon).$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, platí také $\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq aB$.

Dokážeme třetí nerovnost. Označíme $c = \limsup a_n b_n$. Jestliže $c = \infty$ nebo $B = 0$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $c < \infty$ a $B > 0$. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = B$. Nechť h je libovolná hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$ a nechť $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = h$. Pak $h \geq a$ a navíc výraz $h \cdot B$ je dobře definován, protože v opačném případě by muselo platit $B = \infty$ a $h = 0$ (připomeňme, že

$B > 0$, takže možnost $h = \infty$ a $B = 0$ je vyloučena), a tedy také $a = 0$. To ale není možné, protože podle předpokladu je výraz $a \cdot B$ dobře definován.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n b_n < c + \varepsilon$. Nechť $j_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $n_{k_j} \geq n_0$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí

$$a_{n_{k_j}} b_{n_{k_j}} \leq c + \varepsilon,$$

a tedy, podle Věty 2.4.17 dostáváme

$$\begin{aligned}\liminf a_n \limsup b_n \leq h \cdot B &= \lim_{j \to \infty} a_{n_{k_j}} \lim_{j \to \infty} b_{nk_j} \\ &= \lim_{j \to \infty} a_{n_{k_j}} b_{n_{k_j}} \leq c + \varepsilon.\end{aligned}$$

Jelikož ε bylo zvoleno libovolně, platí požadovaná nerovnost.

Dokážeme poslední nerovnost. Jestliže je $A = \infty$ nebo $B = \infty$, pak nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $A < \infty$ a $B < \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon, \quad b_n < B + \varepsilon.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n b_n \leq (A + \varepsilon)(B + \varepsilon),$$

a tedy také

$$\limsup a_n b_n \leq (A + \varepsilon)(B + \varepsilon).$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

2.5.7. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti nezáporných reálných čísel. Předpokládejme, že existuje $\lim a_n$.

(a) Jestliže je definován výraz $\lim a_n \cdot \limsup b_n$, potom

$$\limsup(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \limsup b_n.$$

(b) Jestliže je definován výraz $\lim a_n \cdot \liminf b_n$, potom

$$\liminf(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \liminf b_n.$$

Důkaz. Tvrzení přímo plyne z Příkladu 2.5.6. ■

2.5.8. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných reálných čísel splňující

$$\limsup_{n \to \infty} a_n \cdot \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 1. \tag{2.23}$$

Dokažte, že potom existuje $\lim a_n$.

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z (2.23) plyne, že $b \in (0, \infty)$. Tedy platí $0 \leq a \leq b < \infty$. Stačí dokázat, že $a = b$. Předpokládejme pro spor, že $a < b$. Potom existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $a + \delta < b - \delta$. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_{n_k} < a + \delta$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{a_{n_k}} > \frac{1}{a+\delta} > \frac{1}{b-\delta}.$$

Tudíž

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \geq b \cdot \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_{n_k}} \geq \frac{b}{b-\delta} > 1,$$

což je spor s (2.23). Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.9. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $b_k \in H(\{a_n\})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť dále $b \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Dokažte, že potom $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Položme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_1} \in B(b, 1)$. Z definice hromadného bodu plyne, že pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$.

Nechť $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla $n_1, n_2, \cdots, n_j$. Potom existuje $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$. Nalezneme $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$.

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b$. Tedy b je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. ♣

2.5.10. Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$ je neprázdná množina splňující

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus M \ \exists \varepsilon > 0\colon B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset.$$

Dokažte, že pak existuje posloupnost $\{a_m\}$ taková, že $H(\{a_m\}) = M$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ položíme

$$I_{n,k} = [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}].$$

Označme $A = \{[n,k] \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z};\ I_{n,k} \cap M \neq \emptyset\}$. Pro každé $[n,k] \in A$ nalezneme $x_{n,k} \in I_{n,k} \cap M$. Označme

$$D = \{x_{n,k};\ [n,k] \in A\}.$$

Potom množina D je spočetná, a můžeme tedy její prvky označit symboly $y_1, y_2, \ldots$. Definujme posloupnost

$$y_1, y_2, y_1, y_3, y_2, y_1, y_4, y_3, y_2, y_1, \ldots,$$

a označme ji symbolem $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. V posloupnosti $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Zřejmě platí $D \subset H(\{a_m\})$. Dále je $\{a_m;\ m \in \mathbb{N}\} \subset M$, takže z Příkladu **??** plyne, že $H(\{a_m\}) \subset M$.

Nechť $b \in M \cap \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b \in I_{n,k} \subset B(b,\varepsilon)$. Z konstrukce posloupnosti $\{a_m\}$ pak plyne, že je množina $\{m \in \mathbb{N} : a_m \in B(b,\varepsilon)\}$ nekonečná. Protože ε bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $b \in H(\{a_m\})$. Takže jestliže $M \subset \mathbb{R}$, pak $H(\{a_m\}) = M$, a tedy $\{a_m\}$ je hledaná posloupnost.

Jestliže $\infty \in M$, pak položíme

$$a'_m = \begin{cases} m, & \text{pokud } m \text{ je sudé,} \\ a_m, & \text{pokud } m \text{ je liché.} \end{cases}$$

Pak zřejmě platí $H(\{a'_m\}) = M$, a tedy jednou z možných hledaných posloupností je posloupnost $\{a'_m\}$. Je-li $-\infty \in M$, postupujeme obdobně. ♣

2.5.11. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost nezáporných reálných čísel. Nechť pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_{nm} \geq n a_m$ a $\sup\{\frac{a_n}{n}\} < \infty$. Dokažte, že potom je posloupnost $\{\frac{a_n}{n}\}$ konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup\{\tfrac{a_n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Řešení. Označme $a = \sup\{\frac{a_n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Nechť $p \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $l_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $r_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ taková, že $n = p l_n + r_n$. Z předpokladů potom vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pl_n + r_n}}{pl_n + r_n} \geq \frac{a_{pl_n}}{pl_n + r_n} \geq \frac{l_n a_p}{l_n p + r_n} = \frac{a_p}{p + \frac{r_n}{l_n}} \geq \frac{a_p}{p + \frac{p-1}{l_n}}.$$

Zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p}{p + \frac{p-1}{l_n}} = \frac{a_p}{p}.$$

Odtud vyplývá, že $\frac{a_p}{p} \leq \liminf \frac{a_n}{n}$. Protože $p \in \mathbb{N}$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme

$$\sup\{\tfrac{a_p}{p} : p \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n},$$

a tedy také

$$\limsup_{p\to\infty} \tfrac{a_p}{p} \leq \sup\{\tfrac{a_p}{p} : p \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n}.$$

Z dokázaných nerovností vyplývá, že $\lim \frac{a_n}{n}$ existuje a je rovna hodnotě $\sup\{\frac{a_p}{p};\ p \in \mathbb{N}\}$. ♣

2.5.12. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel taková, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+m} \le a_n + a_m.$$

Dokažte, že potom existuje $\lim \frac{a_n}{n}$ a je rovna hodnotě $\inf\{\frac{a_n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \le a_n \le n a_1$. Speciálně tedy platí, že

$$\sup\{\tfrac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \le a_1.$$

Označíme-li $a = \limsup \frac{a_n}{n}$, pak odtud vyplývá, že $a \in \mathbb{R}$. Nechť $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k} = a$. Nechť $p \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $m_k > p$ existují $l_k \in \mathbb{N}$ a $r_k \in \{0, \dots, p-1\}$ taková, že $m_k = l_k p + r_k$. Potom platí

$$a_{m_k} = a_{l_k p + r_k} \le a_{l_k p} + a_{r_k} \le l_k a_p + a_{r_k},$$

a tedy

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \le \frac{l_k}{l_k p + r_k} a_p + \frac{1}{m_k} a_{r_k} \le \frac{a_p}{p} + \frac{\sup\{a_1, \dots, a_{p-1}\}}{m_k}.$$

Zřejmě platí $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$, a tedy

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k} \le \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{a_p}{p} + \frac{\sup\{a_1, \dots, a_{p-1}\}}{m_k} \right) = \frac{a_p}{p}.$$

Protože $p \in \mathbb{N}$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že platí

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n} \le \inf\{\tfrac{a_p}{p} : p \in \mathbb{N}\} \le \liminf_{p\to\infty} \tfrac{a_p}{p}.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Z následujícího příkladu vyplývá, že tvrzení Věty 2.3.21 neplatí pro nekonečně mnoho posloupností (viz též Poznámku 2.3.22).

2.5.13. Příklad. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ předpisem

$$n_k^j = \begin{cases} k, & k \le j, \\ 2k, & k > j. \end{cases}$$

Potom $\{n_k^j;\ j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = 1$, neboť pro $k \in \mathbb{N}$, $k > j$, je n_k^j sudé, a tedy $a_{n_k^j} = 1$. Nicméně $\lim a_n$ neexistuje.

Nyní dokážeme pomocné tvrzení o aproximaci reálných čísel, které se nám bude později hodit při vyšetřování hromadných bodů posloupností.

2.5.14. Lemma. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $q \leq m$ a $|q\alpha - p| < \frac{1}{m}$.

Důkaz. Pro $k \in \{0, \dots, m\}$ položme $x_k = \alpha k - [\alpha k]$. Pak pro každé takové k platí $x_k \in [0, 1)$. Interval $[0, 1)$ je sjednocením m intervalů tvaru $[0, \frac{1}{m}), [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}), \dots, [\frac{m-1}{m}, 1)$, které mají délku $\frac{1}{m}$. Existuje tedy alespoň jeden z uvedených intervalů, který obsahuje dva členy posloupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{m}$. Předpokládejme, že jde o prvky x_i a x_j, kde $i < j$. Pak platí $|x_i - x_j| < \frac{1}{m}$. Položíme $p = [\alpha j] - [\alpha i]$ a $q = j - i$. Potom platí

$$|q\alpha - p| = \big|(j - i)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha i])\big| = |x_i - x_j| < \tfrac{1}{m}.$$

Tvrzení lemmatu je tak dokázáno. ■

2.5.15. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že pro hromadné body posloupnosti $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$ platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$.

Řešení. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, a $x \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Z Lemmatu 2.5.14 vyplývá, že existují $p, q \in \mathbb{N}$ taková, že $|\alpha q - p| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$n_0(q\alpha - p) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \tag{2.24}$$

Potom $[n_0(\alpha q - p)] = 0$, a tedy $n_0 p = [n_0 \alpha q]$. Položme $n = n_0 q$. Potom z (2.24) vyplývá, že

$$a_n = n_0 \alpha q - [n_0 \alpha q] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

tedy $|a_n - x| < \varepsilon$. Podobně jako v řešení Příkladu 2.5.4 odtud vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$. Protože ε i $x \in (0, 1)$ byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $(0, 1) \subset H(\{a_n\})$. Dle 2.5.9 dostáváme $[0, 1] \subset H(\{a_n\})$. Inkluze $H(\{a_n\}) \subset [0, 1]$ plyne z Věty 2.2.44. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.16. Příklad (Stolzova věta)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim b_n = \infty$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Důkaz. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}.$$

Pro druhý sčítanec na pravé straně poslední rovnosti platí odhad

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \geq \alpha \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n}.$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A.$$

Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A.$$

Odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Tvrzení věty je dokázáno. ■

2.5.17. Příklad. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Nechť $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Dokažte, že potom

$$\lim_{j\to\infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha.$$

Řešení. Uvažujme nejprve případ, kdy $\alpha < \beta$. Dle Věty 2.3.28 existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha_j < \beta_j$ pro každé $j > j_0$. Od tohoto indexu tedy platí $\min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha_j$, z čehož okamžitě plyne, že $\lim \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, máme dáno, dle definice limity existují indexy $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_1$, platí $\alpha_j \in B(\alpha, \varepsilon)$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_2$, platí $\beta_j \in B(\beta, \varepsilon)$. Pro přirozená čísla $j \geq \max\{j_1, j_2\}$ pak dostáváme $\min\{\alpha_j, \beta_j\} \in B(\alpha, \varepsilon) = B(\beta, \varepsilon)$. ♣

2.5.18. Příklad. Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

Řešení. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Předpokládejme nejprve, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ největší prvek. Označme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n;\ n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$. Zvolíme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n;\ n \geq n_k + 1\}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_j} = \max\{a_n;\ n \geq n_{j-1} + 1\}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

Nyní předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ nemá největší prvek. Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$ nemá množina $\{a_n;\ n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$. Množina $\{a_n;\ n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k}.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je rostoucí. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.19. Příklad. Nechť $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, jsou omezené uzavřené intervaly splňující $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ neprázdný interval. Dokažte.

Řešení. Ověříme, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: a_1 \le a_n \le b_m \le b_1. \tag{2.25}$$

Vskutku, je-li $n \le m$, máme $a_n \le a_m \le b_m$, v případě $n > m$ platí $a_n \le b_n \le b_m$. Množiny $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $B = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ jsou tedy neprázdné a omezené. Položme $a = \sup A$ a $b = \inf B$.

Předpokládejme nejprve, že platí $b < a$, potom podle definice suprema existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $b < a_n < a$. Podle definice infima dále existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $b < b_m < a_n$. Poslední nerovnost je ale ve sporu s (2.25). Musí tedy platit $a \le b$. Podle definice suprema a infima pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le a \le b \le b_n$, a tedy $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Pokud $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le x \le b_n$. Číslo x je tedy horní závorou množiny A a dolní závorou množiny B, a proto $a \le x \le b$. Tím je dokázána inkluze $[a, b] \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ a důkaz je dokončen. ♣

2.5.20. Příklad. Nechť $A = \{x \in \mathbb{Q}: x \ge 0 \land x^2 < 2\}$. Pak A je shora omezená podmnožina v $\mathbb{Q}$, která v $\mathbb{Q}$ nemá supremum, tj. neexistuje racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ s vlastnostmi z Definice 1.4.6.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$, a shora omezená, a to například číslem 2. Pro každé číslo $x \in \mathbb{Q}$, které je větší než 2, totiž platí nerovnosti $2 \le 2^2 \le x^2$, a tedy takové x není prvkem množiny A.

Postupujme nyní sporem a předpokládejme existenci čísla $q \in \mathbb{Q}$, které by bylo nejmenší horní závorou množiny A. Ukážeme, že pak platí $q^2 = 2$. Pokud by totiž bylo $q^2 < 2$, tj. $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.6.33 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \le q'$ a $(q')^2 < 2$, tj. $q' \in A$. To je ovšem ve sporu s nerovností $q < q'$, tedy s faktem, že q je horní závora množiny A.

Pokud by bylo $q > \sqrt{2}$, opět díky Větě 1.6.33 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \le q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \le (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní závora množiny A, která je ostře menší než q, což je spor s faktem, že q je nejmenší horní závora množina A.

Zbývá tedy jediná možnost, totiž že $q^2 = 2$. To je ale spor s Větou 1.2.15, a proto supremum množiny A v množině racionálních čísel neexistuje. ♣

2.5.21. Příklad. Nechť $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, jsou omezené uzavřené intervaly splňující $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lim b_n - a_n = 0$. Dokažte, že je pak průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ jednobodový.

Řešení. Díky Příkladu 2.5.19 víme, že je $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ neprázdný interval $[a, b]$. Předpokládejme, že $a < b$. Pak máme

$$\forall n \in \mathbb{N}: b_n - a_n \ge b - a,$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n \geq b - a > 0$$

podle Věty 2.2.44. To je ale spor s předpokladem. ♣

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, a nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která reálná čísla x je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní a určete typ její monotonie v závislosti na parametru x.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$. Podle Příkladu 2.1.16 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je konstantní právě pro $q_x \in \{0, 1\}$. Bude užitečné si uvědomit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, platí

$$x^3 - 3x - 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Je-li $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$, je $q_x \geq 0$. Pro tato x dále platí, že $x^3 - 3x - 2 \geq 0$, tj. $q_x \geq 1$. Navíc $q_x > 1$ pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a $q_x = 1$ pro $x = 1$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a konstantní pro $x = 1$.

V případě $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$ platí $q_x \geq 0$ právě tehdy, když $x \leq 0$. Dále je $q_x > 1$ právě tehdy, když $x^3 - 3x + 2 < 0$, což nastává právě pro $x \in (-\infty, -2)$. Nakonec si povšimneme, že $q_x \in \{0, 1\}$ právě tehdy, když $x \in \{0, -2\}$. Zadaná posloupnost je proto rostoucí pro $x \in (-\infty, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$ a konstantní pro $x \in \{-2, 0\}$.

Srhneme-li přecházející úvahy, dostáváme, že

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{je rostoucí pro} & x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty), \\ \text{je klesající pro} & x \in (-2, 0), \\ \text{je konstantní pro} & x \in \{-2, 0, 1\}, \\ \text{není monotónní pro} & x \in (0, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

♣

2.6.2. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \log n = \infty.$$

Řešení. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Musíme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $\log n > K$. Tato nerovnost je podle vlastností logaritmu a exponenciální funkce (Věta 1.8.16(h)) ekvivalentní nerovnosti

$$n > e^K. \tag{2.26}$$

Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$ (například můžeme volit $n_0 = [e^K] + 1$). Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (2.26). Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.6.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodech n, přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3, tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0.
\end{aligned}$$

♣

2.6.4. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.9.16 víme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $cn^2 \leq a^n$, kde $c = \frac{(a-1)^2}{4}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tedy platí

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{1}{cn}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{cn} \text{ a } c_n = \frac{n}{a^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

♣

2.6.5. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

Řešení. Zvolme libovolné $l \in \mathbb{N}$, $l > k$. Potom pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2l$, platí $n - l \geq \frac{n}{2}$, a tedy

$$\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-l)}{l!} \geq \frac{(n-l)^l}{l!} \geq \frac{n^l}{2^l l!}.$$

Označme $\delta = a - 1$. Potom z binomické věty vyplývá, že pro každé $n \geq 2l$ platí

$$a^n = (1+\delta)^n \geq \binom{n}{l}\delta^l.$$

Kombinací odhadů tedy celkem máme pro každé $n \geq 2l$

$$a^n \geq \frac{\delta^l}{2^l l!} n^l,$$

a tedy

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{2^l l!}{\delta^l} \frac{1}{n^{l-k}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2^l l!}{\delta^l} \frac{1}{n^{l-k}} \text{ a } c_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2l$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc (neboť $l > k$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

♣

2.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Řešení. Nejprve pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme n-tý člen posloupnosti ve tvaru

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n}.$$

Postupně odhadneme každý činitel v tomto součinu a dostaneme

$$\frac{2^n}{n!} \leq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{4}{n} \text{ a } c_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

♣

2.6.7. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Řešení. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) vyplývá existence čísla $m \in \mathbb{N}$ splňujícího $m \geq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, potom platí

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq m-1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq a$$

a pro každé $j \in \mathbb{N}, m \leq j \leq n-1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq 1.$$

Celkem tedy dostáváme odhad

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^m}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{a^m}{n} \text{ a } c_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

♣

2.6.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Řešení. Nejprve pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme n-tý člen posloupnosti ve tvaru

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}.$$

Postupně odhadneme každý činitel v tomto součinu a dostaneme

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ a } c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

♣

2.6.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n\to\infty} 1}.$$

Podle Příkladu 2.6.7 pro $a = 3$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Podle Příkladů 2.6.5 a 2.6.6 a podle Věty o aritmetice součinu (Věta 2.3.23(b)) je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}\frac{2^n}{n!} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Řešení. Z věty o vlastnostech funkce sin (Věta 1.8.18(a)) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$-1 \le \sin(n!) \le 1.$$

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Z definice limity dokážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Vskutku, nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.28) plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left|-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n_0}} < \varepsilon,$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = 0.$$

Z Věty 2.2.23 pak vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ a } c_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0.$$

♣

2.6.11. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ a $0 < b < 1$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.6.6 plyne, že

$$\frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n} = \frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})}.$$

Z Příkladu 2.4.5 a Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} 1-a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} a \lim_{n\to\infty} a^n = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n\to\infty} 1-b^{n+1} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}(1-a^{n+1})}{\lim_{n\to\infty}(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}.$$

Odtud a z Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}}{200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{100 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) \frac{1}{n^{i-1}}}{200 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right).$$

Řešení. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$. Položíme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 3$. Potom zřejmě platí $n \geq n_0$ a

$$|\sin(\tfrac{n\pi}{2}) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 1$. Potom opět $n \geq n_0$ a navíc platí

$$|\sin(\tfrac{n\pi}{2}) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Z kombinace obou případů vyplývá výrok

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |\sin(\tfrac{n\pi}{2}) - A| \geq \varepsilon.$$

Z 2.2.11 vyplývá, že posloupnost $\sin(\frac{n\pi}{2})$ nemá vlastní limitu. Z vlastností funkce sin (Věta 1.8.18(a)) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin(\frac{n\pi}{2}) \leq 1$. Posloupnost je tedy omezená, a proto nemůže mít ani nevlastní limitu. ♣

2.6.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

Řešení. Bude užitečné si uvědomit, že větu o aritmetice limit (Věta 2.3.23) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 1} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 1}$$

není definován. Zapíšeme výraz $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\
&= \frac{n^2 + n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\
&= \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2},$$

plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}) &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♣

2.6.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Protože

$$(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}) = 1,$$

platí

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$1 \le \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \le \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} \le 1+\frac{1}{n},$$

a tedy z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} = 1.$$

Z Příkladů 2.2.37 a 2.2.48 vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0.$$

Kombinací odhadů pak pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}1}\\ &= \frac{0}{1+1+1}=0.\end{aligned}$$

♣

2.6.16. Příklad. Nechť $a_n = [\sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}]$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{6n^2}{(n^3+8n^2)^{\frac{2}{3}}+\big((n^3+8n^2)(n^3+2n^2)\big)^{\frac{1}{3}}+(n^3+2n^2)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{6}{(1+\frac{8}{n})^{\frac{2}{3}}+\big((1+\frac{8}{n})(1+\frac{2}{n})\big)^{\frac{1}{3}}+(1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Protože

$$3 < \left(1+\frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left((1+\frac{8}{n})(1+\frac{2}{n})\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $b_n < 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[b_n] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.9.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí

$$n^2 \leq 2^n \leq 3^n.$$

Pro každé takové $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n+3^n} = 3\sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.50 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) platí

$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{3} = 3.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 3, \quad b_n = \sqrt[n]{3}, \quad c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 3.$$

Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.18. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) tedy dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{2},$$

zatímco

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud a z Poznámky 2.2.34 plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní. ♣

2.6.19. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \right).$$

Řešení. Řešení příkladu započneme pozorováním, že

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \{4k;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \in \{4k+1;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & n \in \{4k+2;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & n \in \{4k+3;\ k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Díky Větě 2.3.23 a Příkladu 2.6.6 tak máme rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = \infty$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(-\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = -\infty.$$

Uvažujeme-li tedy vybrané podposloupnosti $\{a_{4k+1}\}$ a $\{a_{4k+3}\}$, z právě vypočtených limit dostáváme díky Větě2.3.20

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{4k+3} = -\infty.$$

Můžeme tedy z Věty 2.3.20 usoudit, že limita zadané posloupnosti neexistuje. ♣

2.6.20. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Odtud, z Příkladu 2.2.9, věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

2.6.21. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a^6 - b^6) = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \quad \text{a} \quad b = \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3+1)^8(n^2+1)^3} + \ldots + \sqrt[6]{(n^2+1)^{15}}}$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}) = \frac{-3+2\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}}+\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3}+\ldots+\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9, 2.2.37, 2.2.48 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) konečně dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.22. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, platí

$$1-\frac{1}{j^2} = \frac{j^2-1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Odtud, z Příkladu 2.2.9 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n b_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j} \leq \frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \leq b_n$. Tedy

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9 a 2.2.48 a vět o vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) a o aritmetice limit (Věta 2.3.23) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0.$$

♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že posloupnost má vlastní limitu, kterou označíme A. Kombinací Příkladu 2.2.29(b) a věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) pak dostaneme

$$\lim a_{n+1} = A.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) obdržíme

$$\lim \left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy

$$A = \lim a_{n+1} = \lim \left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A}.$$

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.25. Příklad. Nechť $a \in [1, \infty)$. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = a \quad \text{a} \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Obdobně jako v Příkladech 2.4.3 a 2.6.24 odvodíme, že má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu A, pak A je řešením rovnice $A = \frac{5A-3}{A+1}$, a tedy buď $A = 1$ nebo $A = 3$.

Předpokládejme nejprve, že $a \geq 3$. Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 3$. Pro $n = 1$ je tato nerovnost zřejmě splněna. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 3$. Pak

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} = 5 - \frac{8}{a_n + 1} \geq 5 - \frac{8}{3 + 1} = 3.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom nerovnost

$$a_n \geq a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}$$

platí právě tehdy, když

$$0 \geq \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{5a_n - 3 - a_n^2 - a_n}{a_n + 1} = \frac{-(a_n - 3)(a_n - 1)}{a_n + 1}.$$

To je ovšem pro $a \geq 3$ splněno pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy vyplývá, že pro každé $a \geq 3$ je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a platí $\lim a_n = 3$.

Nyní předpokládejme, že $a \in (1, 3)$. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < 3$. Tato nerovnost je zřejmě splněna pro $n = 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < 3$. Pak

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} = 5 - \frac{8}{a_n + 1} < 5 - \frac{8}{3 + 1} = 3,$$

a tedy tvrzení vyplývá z principu matematické indukce.

Dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom nerovnost

$$a_n < a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}$$

platí právě tehdy, když

$$0 < \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{5a_n - 3 - a_n^2 - a_n}{a_n + 1} = \frac{-(a_n - 3)(a_n - 1)}{a_n + 1}.$$

To je ovšem pro $a \in (1, 3)$ splněno pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy rostoucí a shora omezená. Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy vyplývá, že pro každé $a \in (1, 3)$ je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní. Označíme její limitu symbolem A. Podle úvahy uvedené v úvodní části důkazu pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 3$. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$a_n > a_1 > 1.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)) plyne, že $A \neq 1$. Tudíž $A = 3$.

Předpokládejme konečně, že $a = 1$. Potom $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim a_n = 1$. ♣

2.6.26. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána následujícím způsobem: $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, položíme

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}.$$

V prvním kroku indukce požadované nerovnosti snadno z předpokladu $a_1 < a_2$ ověříme. Předpokládejme, že nerovnosti platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$

Z této nerovnosti dále plyne

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2}, \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+4}.$$

Nakonec použijeme nerovnost $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ platnou díky indukčnímu předpokladu k ověření vztahu

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2},$$

z něhož plyne

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$

Tím je důkaz požadovaných nerovností dokončen.

Vyplývá z nich, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$. takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B.$$

Ze vztahu

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

vyplývá, že

$$B = \frac{A + B}{2},$$

a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned} &a_3 - a_2 = a_1 - a_3, \\ &a_4 - a_3 = a_2 - a_4, \\ &\dots \\ &a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-3} - a_{n-1}, \\ &a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n, \\ &a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud a z toho, že $\lim a_n = A$ nyní plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.27. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočtěte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0, 1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0, 1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0, 1]$ právě jeden kořen, a to c,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0, c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c, 1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená dle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (viz Věta 2.3.21). ♣

2.6.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Na většinu jednoduchých příkladů s celými částmi stačí použít elementární odhad

$$x - 1 \leq [x] \leq x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100}100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1\right)100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k $\lim_{n\to\infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.29. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Řešení. Máme-li sudé číslo $n = 2k$, pak můžeme odhadnout prvních k členů v součinu 1 a druhých k členů v součinu číslem k

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1) \cdots (2k) \geq (k+1) \cdots n \geq k^k \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Máme-li liché číslo $n = 2k + 1$, pak můžeme odhadnout prvních k členů v součinu 1 a druhých $k + 1$ členů v součinu číslem k

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1) \cdots (2k+1) \geq k \cdots n \geq k^{k+1} \geq \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Pro zadanou posloupnost máme tedy dolní odhad

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Z $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} = \infty$ dostáváme, že hledaná limita je rovna ∞ podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.30. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty\cdot 0$. Zkusíme si tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) &= \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{n}(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}.\end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0 \leq \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.31. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32), Příkladu 2.5.2, a Definicie 2.5.3 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.48 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.32. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Tedy jest
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}.$$
Díky Příkladu 2.5.2, Definici 2.5.3 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) víme, že
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$
Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) je tedy
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$
♣

2.6.33. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti
$$\frac{1}{k+1} < \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}.$$

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně zvoleno. Dle 1.8.16 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost
$$\log(1+x) \le x,$$
přičemž rovnost platí právě tehdy, když $x = 0$.Dosadíme-li speciálně $x = \frac{1}{k}$, dostaneme ihned druhou z dokazovaných nerovností. Dosadíme-li $x = -\frac{1}{k+1}$, pak je předpoklad $x > -1$ splněn, a tedy dostaneme
$$\log\left(1-\frac{1}{k+1}\right) < -\frac{1}{k+1},$$
to jest
$$-\log\left(1-\frac{1}{k+1}\right) > \frac{1}{k+1}.$$
Odtud a z vlastností logaritmické funkce (1.8.16) dostáváme
$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1-\frac{1}{k+1}\right) > \frac{1}{k+1},$$
což je první z dokazovaných nerovností. ♣

2.6.34. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \log n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

Řešení. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ pevně. Posčítáme nerovnosti v Příkladu 2.6.33 pro hodnoty $k = 1, \dots, n-1$. Dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Z vlastností logaritmické funkce (1.8.16) ale vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n-1}\right) = \log n.$$

Tím jsou obě nerovnosti dokázány. ♣

2.6.35. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$, definovaná předpisem

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

dle první nerovnosti v Příkladu 2.6.33 aplikované na $k = n$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy klesající. Dále platí dle Příkladu 2.6.34

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log n > 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená zdola (například konstantou 0). Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

2.6.36. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n).$$

Z Příkladu 2.6.35 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.[3] Přibližnou hodnotou konstanty γ je $0,577$ a není známo, zda je toto číslo racionální.

2.6.37. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}\right).$$

[3] Lorenzo Mascheroni, 1750–1800.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Potom je

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy dle věty o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) platí

$$\begin{aligned}\lim b_n &= \lim \left(a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n\right)\\ &= \lim \left(a_{2n} - a_n + \log\left(\frac{2n}{n}\right)\right) = \gamma - \gamma + \log 2\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

♣

2.6.38. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí nerovnost

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Řešení. Dokazovaná nerovnost zřejmě platí pro $n = 2$, neboť

$$2 = 2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Předpokládejme, že nerovnost je splněna pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{2^n}.$$

Díky monotonii posloupnosti $\{1 + \frac{1}{n}\}$ víme, že

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq 2.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{(n+1)^{(n+1)}}{2^n} \leq \frac{(n+2)^{(n+1)}}{2^{n+1}},$$

a tedy

$$(n+1)! < \frac{(n+2)^{(n+1)}}{2^{n+1}}.$$

Tvrzení tudíž plyne z principu matematické indukce. ♣

2.6.39. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí nerovnost

$$n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

Řešení. Nerovnost zřejmě platí pro $n = 2$, neboť

$$2 < e.$$

Předpokládejme, že nerovnost je splněna pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)e\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

Díky monotonii posloupnosti $\{1 + \frac{1}{n}\}$ víme, že

$$2 \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n ,$$

a tedy

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} .$$

Celkem tudíž máme

$$(n+1)! < e\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} ,$$

a tvrzení tedy plyne z principu matematické indukce. ♣

2.6.40. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí nerovnosti

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1} .$$

Řešení. Pro $n = 2$ tvrzení platí, neboť

$$\frac{4}{e^2} < 2 < \frac{8}{e}.$$

♣

Předpokládejme, že první nerovnost je splněna pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Z Příkladu 2.5.2 víme, že $e > (1 + \frac{1}{n})^n$, a tedy

$$n^n \geq \frac{(n+1)^n}{e}.$$

Odtud vyplývá, že

$$(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

a tedy celkem

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Platnost první nerovnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tudíž plyne z principu matematické indukce.

Nyní předpokládejme, že druhá nerovnost je splněna pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pak

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}.$$

Dle Příkladu 2.5.2 víme, že $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, a tedy

$$n^{n+1} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$(n+1)! < e^2\frac{(n+1)^{n+2}}{e},$$

čímž je ověřena platnost i druhé nerovnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

KAPITOLA 3

Číselné řady

3.1. Základní pojmy

3.1.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**, přičemž číslo a_n je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položíme-li pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

nazýváme číslo s_m m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součet nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m\to\infty} s_m = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

3.1.2. Poznámka. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak nekonečnou řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.3. Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{ pak řada } \textbf{diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada } \textbf{diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada } \textbf{diverguje (osciluje)}. \end{cases}$$

3.1.4. Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v Poznámce 2.3.37. Nechť

$k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v Poznámce 2.3.37). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje **nekonečnou řadu**, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde

$$s_m = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m,$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem nekonečné řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jejich případné zobecnění pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je většinou zcela přímočaré.

3.1.5. Příklad. Pro posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ platí:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje (osciluje).

3.1.6. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.7. Poznámka. Vzorec pro výpočet částečných součtů geometrické řady plyne z Příkladu 1.6.6.

3.1.8. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} = \frac{1}{1-q}, & \text{je-li } |q| < 1, \\ = \infty, & \text{je-li } q \geq 1, \\ \text{diverguje (osciluje),} & \text{je-li } q \leq -1. \end{cases}$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme symbolem s_n odpovídající n-tý částečný součet zadané geometrické řady. Nechť $q \neq 1$. Pak z Příkladu 1.6.6 dostáváme

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Je-li $|q| < 1$, potom

$$\lim s_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Je- li $q > 1$, pak

$$\lim s_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \infty.$$

Nechť $q \leq -1$. Pak existuje $a \geq 1$ takové, že $q = -a$. Potom (podobně jako v Příkladu 3.1.5)

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-a}{1-q}, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \frac{1+a}{1-q}, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Protože $\frac{1-a}{1-q} \neq \frac{1+a}{1-q}$, plyne odtud, že $\lim s_n$ neexistuje. Zbývá vyšetřit případ, kdy $q = 1$. Pak $s_n = n + 1$, a tedy $\lim s_n = \infty$.

Celkem máme

$$\lim s_n \begin{cases} = \frac{1}{1-q}, & \text{je-li } |q| < 1, \\ = \infty, & \text{je-li } q \geq 1, \\ \text{neexistuje}, & \text{je-li } q \leq -1. \end{cases}$$

Odtud vyplývá tvrzení. ♣

3.1.9. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}.$$

Řešení. Protože platí

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

vyplývá tvrzení z Příkladu 3.1.8. ♣

3.1.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je roven 1.

Řešení. Snadno zjistíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne, že s_n lze zapsat ve tvaru teleskopické sumy takto:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Dostáváme pak

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

3.1.11. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a její součet je ∞. Tato řada se nazývá **harmonickou řadou**.

Řešení. Nechť s_n označuje n-tý částečný součet této řady, tj.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí. Dokážeme, že není shora omezená. Matematickou indukcí odvodíme pro každé $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_{2^k} > \frac{k}{2}$. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, neboť $s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$. Odhadneme člen $s_{2^{k+1}}$ takto:

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}} &= s_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ sčítanců}} \\ &> s_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost dokázána, a posloupnost $\{s_n\}$ tedy není shora omezená.

Podle Věty 2.4.1 pak dostáváme, že $\lim s_n = \infty$. ♣

3.1.12. Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. V takovém případě je pro nás otázka konvergence řady velice důležitá.

3.1.13. Poznámka. Analogicky jako ve Větě 2.3.15 dostáváme, že konvergence řady či existence jejího součtu nezávisí na konečně mnoha členech. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet). Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.14. Věta (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Díky Větě 2.2.32 existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} =$

$\lim s_n$, a proto podle Věty 2.2.36 o aritmetice limit dostáváme $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ∎

3.1.15. Poznámka. Opačná implikace v předchozí větě neplatí. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.11 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní.

Větu 3.1.14 je možné *někdy* použít k odvození divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže totiž neplatí $\lim a_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. Například pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ není nutná podmínka konvergence splněna, neboť $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy tato řada diverguje. Věta 3.1.14 nám tak poskytuje alternativní důkaz k důkazu z Příkladu 3.1.5.

3.1.16. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n_0 \le n \le m\colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Označme posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako $\{s_m\}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Označme součet naší řady s. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n^*\colon\ |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = n^* + 1$. Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \le n \le m$. Potom máme

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = |s_m - s_{n-1}| \le |s_m - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a podmínka (ii) je ověřena.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ověříme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{s_n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle (ii) $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n_0 \le n \le m\colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Zvolme libovolná $n, m \in \mathbb{N}, n \ge n_0, m \ge n_0$. Pokud $n < m$, použijeme předchozí podmínku pro čísla $n+1$ a m.Obdržíme $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |s_m - s_n| < \varepsilon$. Pokud $n > m$, použijeme obdobně předchozí podmínku pro čísla $m+1$ a n. Pokud $n = m$, pak $|s_n - s_m| = 0 < \varepsilon$. Tím je Bolzanova-Cauchyova podmínka pro posloupnost částečných součtů ověřena a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Věty 2.4.22. ∎

3.1.17. Věta. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) pak dostáváme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} ca_n = \lim_{m\to\infty} cs_m = c \lim_{m\to\infty} s_m = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty}(s_m + t_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} s_m + \lim_{m\to\infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\end{aligned}$$

■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležité speciální případy nekonečných číselných řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady se vyznačují určitými specifickými vlastnostmi, které můžeme při práci s nimi (například při vyšetřování jejich konvergence či divergence) využít. V tomto oddílu budeme tyto řady podrobně studovat. Podstatným rysem řad s nezápornými členy je ten fakt, že všechny členy těchto řad jsou stejného znaménka. Všechny výsledky tohoto oddílu lze tudíž snadno modifikovat pro řady se členy nekladnými, těmi se však zabývat nebudeme.

3.2.1. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který může být konečný nebo nekonečný. To plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) a pozorování, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesající.

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a všimněme si, že $s_m \leq s_{n_0} + t_m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ díky předpokladu. Posloupnosti $\{s_m\}$ a $\{s_{n_0} + t_m\}$ jsou neklesající, a tedy mají limitu dle Věty 2.4.1. Tato limita je vlastní nebo ∞.

(a) Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom má posloupnost $\{s_{n_0} + t_m\}$ vlastní limitu, a tedy i posloupnost $\{s_m\}$ je konvergentní dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)).

(b) Tvrzení plyne z (a). ■

3.2.3. Poznámka. Předpokládáme-li ve Větě 3.2.2 platnost nerovnosti $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak pro součty řad platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, neboť příslušné částečné součty splňují nerovnost $s_n \leq t_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

3.2.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne z Příkladu 3.1.10 a Věty 3.1.17(a). Podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{\pi^2}{6}$, jak již bylo zmíněno v Poznámce 2.4.24.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.
(b) Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(c) Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{K}{2}$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3K}{2}. \tag{3.1}$$

Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $b_n < \frac{2}{K} a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{K} a_n$ dle Věty 3.1.17(a). Použitím Věty 3.2.2(a) pak obdržíme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom z druhé nerovnosti v (3.1) plyne, že $a_n < \frac{3K}{2} b_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a postupujeme obdobně jako v předcházejícím důkazu opačné implikace.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_n}{b_n} < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Stejně jako výše nyní podle Věty 3.2.2(a) odvodíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Důkaz posledního tvrzení je prakticky stejný jako důkaz tvrzení předešlého. Použijeme definici limity a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_n}{b_n} > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a postupujeme obdobně jako výše. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní dle Příkladu 3.2.4, a proto je i zkoumaná řada konvergentní podle Věty 3.2.5(a). ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+100}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, jak je ukázáno v Příkladu 3.1.11. Z Věty 3.2.5(c) plyne tedy divergence zadané řady. ♣

Základním nástrojem pro zkoumání konvergence řad s nezápornými členy je srovnávací kritérium, případně limitní srovnávací kritérium (Věty 3.2.2 a 3.2.5). Pro jejich používání však potřebujeme dostatečně rozsáhlou škálu řad, o nichž již víme, zda jsou konvergentní či divergentní. Takovou informaci zatím máme k dispozici pouze pro geometrickou řadu (Příklad 3.1.8). Využijeme ji nyní k odvození dvou velmi užitečných kritérií, totiž Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria.

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. (a) Uvažujme $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ dle předpokladu. Pak

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon 0 \leq a_n \leq q^n.$$

Protože je $q \in (0,1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ též konvergentní podle Věty 3.2.2(a).

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A,1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n};\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Závěr proto plyne z předešlého tvrzení (a).

(c) Podle Věty 2.4.11 platí $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, a tedy tvrzení plyne z (b).

(d) Protože $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$ (viz Věta 2.4.17). Tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, je $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$, tudíž také $a_{n_k} > 1$. To znamená, že posloupnost a_{n_k} nekonverguje k 0, a tedy podle Věty 2.2.32 ani posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1.14), a tedy naše řada diverguje.

(e) Podle Věty 2.4.11 je tvrzení okamžitým důsledkem (d). ■

3.2.9. Poznámka. Pokud $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ nebo $\lim \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, pak nelze Cauchyovo kritérium použít. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Přitom ale platí $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

3.2.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konverguje.

Řešení. Označme $a_n = \frac{n^3}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Z Příkladu 2.2.49 víme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, a tedy

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Podle Cauchyova kritéria (Věta 3.2.8(c)) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}$ konverguje.

Řešení. Spočteme nejprve

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}},$$

abychom mohli použít Větu 3.2.8. Uvědomme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí nerovnosti

$$2(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2,$$

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^{24}} \leq \sqrt[n]{(n^4+1)^6} \leq \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6}(\sqrt[n]{n})^{24}.$$

Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), Příkladů 2.2.50 a 2.2.49 a věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} = 2.$$

Zadaná řada tedy diverguje podle Věty 3.2.8(e). ♣

3.2.12. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3.2}$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.2) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázáno (3.2).

Podle Příkladu 3.1.8 a Věty 3.1.17(a) je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Poznámky 3.1.13 konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$. Díky Větě 3.2.2(a) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak podle definice limes superior existují $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Závěr nyní plyne z předešlého tvrzení (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak podle definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Podobně jako v bodě (a) lze matematickou indukcí odvodit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$. Jelikož $a_{n_0} > 0$, neplatí $\lim a_n = 0$, a tudíž není splněna nutná podmínka konvergence řady (viz Věta 3.1.14). Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.13. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ konverguje.

Řešení. Naše řada má kladné členy. Použijeme podílové kritérium (Věta 3.2.12). Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, máme

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostáváme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{27}$, což zaručuje podle Věty 3.2.12 konvergenci zkoumané řady. ♣

3.2.14. Poznámky. (a) Pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje, pak nemůžeme na základě podílového kritéria o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout. To lze opět ukázat na řadách $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

(b) V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.12 upozorněme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n-1}, & n \text{ liché}, \\ 2^{-n+1}, & n \text{ sudé}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tato řada má tedy tvar

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \le a_n \le 2^{-n+1}$, a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{-2k+1}}{2^{-(2k-1)-1}} = \lim_{k\to\infty} 2 = 2.$$

3.2.15. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10000)^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000}{n+1} = 0.$$

Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria (Věta 3.2.12(c)). ♣

3.2.16. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.5 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že pokud lze použít d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.2.12(c), (d)), pak lze použít i Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 3.2.8(c), (e)). Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být někdy podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, označme

$$\begin{aligned} s_k &= a_1 + \cdots + a_k, \\ t_k &= 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Pokud $k, m \in \mathbb{N}$, $m < 2^k$, potom platí

$$\begin{aligned} s_m &\le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \le \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} < \infty. \end{aligned}$$

Protože ke každému $m \in \mathbb{N}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$, je posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená, a proto podle 3.2.1 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Rightarrow$ Pokud $k, m \in \mathbb{N}$, $m > 2^k$, potom platí

$$\begin{aligned} s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{t_k}{2}, \end{aligned}$$

a odtud plyne $t_k \leq 2s_m \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Posloupnost $\{t_k\}$ je tedy shora omezená, a proto podle 3.2.1 řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. ■

Již jsme dokázali, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.11), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.4). Charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ podává následující věta.

3.2.18. Věta. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Je-li $\alpha \leq 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1^\alpha} = 1$, takže členy posloupnosti $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ nekonvergují k 0. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ tudíž nesplňuje nutnou podmínku konvergence, a tedy podle Věty 3.1.14 diverguje.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in (0, \infty)$. Pak $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.8 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Vyšetřeme chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$.

Řešení. Jedná se o řadu s kladnými členy. Odhadneme, že naši řadu bychom mohli srovnat s řadou tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}},$$

o níž již podle Věty 3.2.18 víme, že konverguje. Položíme

$$a_n = \frac{1 + \sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt{n^3}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

a vypočteme

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1+n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-\frac{1}{3}}}{1+n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje dle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5). ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud a z předpokladu věty plyne díky Větě 2.4.1 rovnost $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = 0$. Potom tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $\{s_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{2(k+1)} - s_{2k} &= a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0, \\ s_{2k+1} - s_{2k-1} &= -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0, \end{aligned}$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.20) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Jelikož ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Větě 2.3.21 (viz též Poznámku 2.3.22) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-a_n)$ konverguje. Podle Věty 3.1.17(a) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Protože je posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ nerostoucí a konverguje k 0, plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ z Věty 3.3.1. ♣

3.3.3. Poznámka. Předpoklad monotonie ve Větě 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché.} \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.11 je $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení **??**.

3.3.4. Lemma (Abelova parciální sumace)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{3.4}$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{3.5}$$

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m\\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \cdots\\ &\qquad \cdots + (\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) b_{m-1} + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m\\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \sigma_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots\\ &\qquad \cdots + \sigma_{m-2}(b_{m-2} - b_{m-1}) + \sigma_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m\\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali vzorec (3.4).

(b) Podobně jako výše počítejme

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m\\ &= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \cdots\\ &\qquad \cdots + (s_{m-1} - s_{m-2}) b_{m-1} + (s_m - s_{m-1}) b_m\\ &= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + s_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots\\ &\qquad \cdots + s_{m-2}(b_{m-2} - b_{m-1}) + s_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + s_m b_m\\ &= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.\end{aligned}$$

Tím je dokázán vztah (3.5). ■

3.3.5. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí. Pokud by posloupnost $\{b_n\}$ byla neklesající, pracovali bychom s posloupností $\{-b_n\}$ a závěr odvodili pomocí Věty 3.1.17(a). Tvrzení věty dokážeme nejprve za předpokladu platnosti podmínky (A) a potom za předpokladu (D). V obou případech ověříme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Konvergence řady řady pak vyplyne z Věty 3.1.16.

(A) Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, a proto existuje $C \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| < C$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, takže můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq m$, platí $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$. Zvolme nyní $n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m$, pevně a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \ldots, m$. Platí tedy $|\sigma_k| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, $n \leq k \leq m$. Z Lemmatu 3.3.4(a) pak dostáváme

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|\left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1})\right) + \sigma_m b_m\right| \\
&\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1})\right) + |\sigma_m||b_m| \\
&\leq \varepsilon\left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1})\right) + \varepsilon|b_m| = \varepsilon((b_n - b_m) + |b_m|) \\
&\leq \varepsilon\,(|b_n| + 2|b_m|) \leq 3C\varepsilon,
\end{aligned}
$$

čímž je důkaz proveden.

(D) Z předpokladu snadno vyplývá, že členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nezáporné. Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_n| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $n_0 \leq n \leq m$. Pak díky tvrzení (b) Lemmatu 3.3.4 máme

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|-s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m\right| \\
&\leq M b_n + \sum_{j=n}^{m} M(b_j - b_{j+1}) + M b_m \\
&= M b_n + M\,(b_n - b_m) + M b_m \\
&= 2M b_n < 2M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

3.3.6. Poznámky. (a) Podmínka (D) ve Větě 3.3.5 hovoří o omezenosti posloupnosti *částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nikoliv o omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$.

(b) Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je okamžitým důsledkem Věty 3.3.5(D). Máme-li totiž řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, kde $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost konvergující k nule, má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ omezenou posloupnost částečných součtů, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

3.3.7. Příklad.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\sin kx &= \cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x,\\ 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos kx &= \sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x.\end{aligned}$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\sin kx &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x\bigr)\\ &= \cos(1-\tfrac{1}{2})x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x\\ &= \cos\tfrac{1}{2}x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x,\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x\bigr)\\ &= -\sin(1-\tfrac{1}{2})x + \sin(n+\tfrac{1}{2})x\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Je-li $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. Naproti tomu řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx = \sum_{n=1}^{\infty}1$ zjevně nemá omezenou posloupnost částečných součtů.

Pokud $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, ze vzorce (3.6) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \le \frac{\left|\cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x\right|}{\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}$$

a ze vztahu (3.7) nerovnost

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x\right|}{\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}.$$

♣

3.3.8. Příklad.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Použijeme Dirichletovo kritérium (Věta 3.3.5(D)) pro $a_n = \sin nx$ a $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená díky Příkladu 3.3.7. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a $\lim b_n = 0$. Dostáváme tak konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

(b) Obdobně lze ukázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, je pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní podle Příkladu 3.1.11. ♣

3.4. Absolutní konvergence řad

3.4.1. Definice (absolutní a neabsolutní konvergence)**.** Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Poznámka. Všimněme si, že řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Tedy dle Věty 3.1.16 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Vzhledem k tomu, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right|,$$

splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Podle Věty 3.1.16 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ∎

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.4. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty **??** pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tvrzení (e) lze dokázat obdobně. ∎

3.4.5. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\lim |a_n| = \infty$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.12(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.12(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty **??** pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ∎

3.4.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

Řešení. Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, tj. zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Pro vyšetření neabsolutní konvergence použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} - \frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}. \tag{3.8}$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2)\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) + 1 \geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (3.8). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje.

Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.7. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(-1)^{[\sqrt{n}]}\right| \leq 1 \qquad \text{a} \qquad 0 \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}. \tag{3.9}$$

Věta 3.2.18 říká, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní. Z nerovnosti (3.9) a Věty 3.2.2 plyne absolutní konvergence zkoumané řady. ♣

3.4.8. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.8. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}.$$

Tedy, kdyby konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.8 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{n} + \frac{\cos 2n}{n}.$$

Kdyby tedy konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by podle Věty 3.1.17(b) i harmonická řada. To by však byl spor s Příkladem 3.1.11. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$, pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců $a_1, \ldots, a_n$. Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \ldots, n\}$ na sebe, pak platí $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** původní řady.

3.5.2. Příklad. Uvažujme například bijekci $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n - 1, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots\end{aligned}$$

Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a;\ a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f\big(\{1, \dots, n\}\big) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

3.5.4. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje. Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je tudíž konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

∎

3.5.5. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{m} \left|a_{\pi(j)}\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud podle 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Pro důkaz druhé části tvrzení označme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n, & t_n &= a_{\pi(1)} + \cdots + a_{\pi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n, & t &= \lim_{n\to\infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemmatu 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \ge n$ a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{3.11}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{3.12}$$

Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \ge k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, n\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(n)\} \setminus \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Pak podle (3.12) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N};\ i > m\}$ a podle (3.11) je $B \subset \{\pi(j);\ j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{n} a_{\pi(j)}\right| = \left|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_{\pi(j)}\right| \le \sum_{i\in A} |a_i| + \sum_{j\in B} \left|a_{\pi(j)}\right| \\ &\le \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} \left|a_{\pi(j)}\right| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdots,$$

neboli řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1}=\frac{1}{n}, a_{2n}=-\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1}=\frac{1}{n}$ a $s_{2n}=0, n\in\mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.21 plyne, že $\lim s_n=0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0$.

Nyní uvažujme následující přerovnání uvedené řady

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots,$$

neboli řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$, kde bijekce π je definována předpisem

$$\pi(n)=\begin{cases} 4k-3, & \text{pokud } n=3k-2, k\in\mathbb{N},\\ 4k-1, & \text{pokud } n=3k-1, k\in\mathbb{N},\\ 2k, & \text{pokud } n=3k, k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)}=\frac{1}{2k-1},\qquad a_{\pi(3k-1)}=\frac{1}{2k},\qquad a_{\pi(3k)}=-\frac{1}{k},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí

$$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\pi(3k-2)}+a_{\pi(3k-1)}+a_{\pi(3k)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{3.13}$$

$$\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}, \tag{3.14}$$

$$\sigma_{3n+2}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}. \tag{3.15}$$

Protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k}\leq\frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.13) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n}=s\in(0,\infty)$. Nyní snadno podle (3.14) a (3.15) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+2}=s$. Podle Věty 2.3.21 obdržíme $\lim\sigma_n=s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady.

Následující věta ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu je pro neabsolutně konvergentní řady typické.

3.5.7. Věta (Riemann). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-,\ (-x)^+ = x^-,\ (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují, a jsou buď konečné nebo rovné ∞. Označme tyto součty po řadě s_+ a s_-. Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Věty 3.1.17(b) řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ∎

3.5.10. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ∎

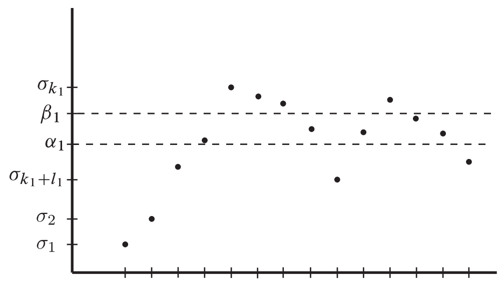
Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

3.5.11. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ platí $\liminf \sigma_n = \alpha$ a $\limsup \sigma_n = \beta$.

Důkaz. Nalezneme posloupnosti reálných čísel $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N};\ a_n \geq 0\} \qquad \text{a} \qquad M = \{n \in \mathbb{N};\ a_n < 0\}.$$

Technické provedení důkazu Věty 3.5.11 je poměrně obtížné, ale základní myšlenka je jednoduchá. Množiny P a M rozdělí množinu $\mathbb{N}$ na dvě disjunktní podmnožiny. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(k_1)$ z množiny P, kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1+1) < \pi(k_1+2) < \cdots < \pi(k_1+l_1)$ z množiny M, kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \ldots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M, přičemž každý vybereme právě jednou. Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



Obrázek 1.

Zřejmě $\mathbb{N} = P \cup M$ a $P \cap M = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a M jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina M je konečná.

Podle Věty **??** nalezneme bijekci ρ množiny $\mathbb{N}$ na P a bijekci τ množiny $\mathbb{N}$ na M. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme podle Lemmatu 3.5.3 $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1,\dots,m\} \cap P \subset \{\rho(1),\dots,\rho(n)\}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\rho(k)} \geq \sum_{k=1}^{m} a_k^+.$$

Odtud, z Věty 2.2.44(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\rho(k)} = \infty. \tag{3.16}$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)} = -\infty. \tag{3.17}$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)} \geq \beta_j, \tag{3.18}$$

(b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \leq \alpha_j. \tag{3.19}$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.16). Nyní s pomocí (3.17) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{\tau(k)} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.16) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.17) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{\tau(k)} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno.

Konstrukce bijekce π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \tag{3.20}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = \big(k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}\big] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = \big(k_j + l_{j-1}, k_j + l_j\big] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.20) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} \rho(n - l_{j-1}), & \text{pokud } n \in A_j, \\ \tau(n - k_j), & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Surjektivita π. Přímo z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \rho\big((k_{j-1}, k_j] \cap \mathbb{N}\big) \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \tau\big((l_{j-1}, l_j] \cap \mathbb{N}\big). \tag{3.21}$$

Zobrazení π je tedy na, neboť podle předchozího platí

$$\pi(\mathbb{N}) = \rho(\mathbb{N}) \cup \tau(\mathbb{N}) = P \cup M = \mathbb{N}.$$

Injektivita π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}, \pi|_{B_j}$ prostá, neboť τ a ρ jsou prostá zobrazení. Dále máme $\pi\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \cap \pi\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = P \cap M = \emptyset$ a navíc podle (3.21) pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n-tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_{j-1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \tag{3.22}$$

Je-li $j \in \mathbb{N}$, pak platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. Předpokládejme, že nastává první případ. Potom $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmínce minimality v (b), platí $\sigma_{k_j+l_j-1} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j+l_j-1} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \beta_j$ podle (3.18). Odtud plyne $\sigma_{k_j+l_j-1} \geq \min\{\alpha_j, \beta_j\}$, a tedy

$$\begin{aligned}\alpha_j \geq \sigma_{k_j+l_j} &= \sigma_{k_j+l_j-1} + a_{\pi(k_j+l_j)} \\ &\geq \min\{\alpha_j, \beta_j\} + a_{\pi(k_j+l_j)}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Podle Příkladu 2.5.17 platí $\lim_{j\to\infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.14). Užitím Lemmatu 3.5.10 obdržíme $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) plyne $\lim_{j\to\infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.23) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) snadno dostaneme

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \tag{3.24}$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.17) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^{n} a_{\rho(i-l_{j-1})} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{\rho(i-l_{j-1})}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{n} a_{\tau(i-k_j)} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{\tau(i-k_j)} = \sigma_{k_j+l_j},\end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{\tau(i-k_j)}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \tag{3.25}$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.24) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \colon \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \tag{3.26}$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.25) a (3.26) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ∎

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.11.

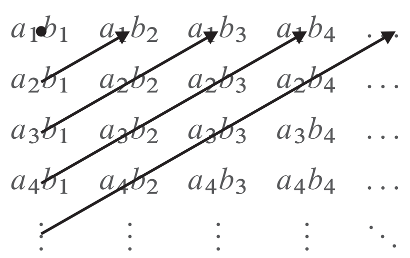
Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.11 existuje bijekce $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.11 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ∎

3.6. Součin řad

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_n\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} a_i b_j. \tag{3.27}$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.27) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.



Obrázek 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách" a dostáváme tak posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i.$$

Nakonec sečteme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Právě uvedená možnost násobení řad není jediná.

3.6.1. Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad \tilde{A} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|,$$
$$B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j, \qquad B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \qquad \beta_k = B_k - B,$$
$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \qquad C_k = \sum_{j=1}^{k} c_j.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\
&= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\
&= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\
&= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\
&= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \qquad (3.28) \\
&= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\
&= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} \beta_j.
\end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \left|\sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right| \left|\beta_j\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon\tilde{A}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Podle Věty 3.1.14 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.32 také pro každé $j \in \{1, \ldots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.23)dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{3.30}$$

Díky Poznámce 2.4.12, (3.29) a (3.30) pak platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon\tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim_{k\to\infty} |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty **??** dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.28) pak dostáváme z Věty 2.2.36 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \left|b_j\right|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}|\,|b_i|\right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ■

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, ale Cauchyův součin této řady se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1).

Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.9.14) dostaneme odhad

$$\begin{aligned} \sqrt{(k+1-i)i} &\leq \frac{(k+1-i)+(i)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, takže podle Věty 3.1.14 Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje. ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole 7.

3.6.5. Věta (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

3.7. Zobecněné řady

Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

3.7.2. Definice. Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(x,\varepsilon).$$

V takovémto případě pak píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Pokud je konvergentní zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, nazveme zobecněnou řadu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **absolutně konvergentní**.

3.7.3. Poznámka. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada“ často psát jen „řada“.

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu zobecněné řady)**.** Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(x,\varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(y,\varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha \in F_1 \cup F_2} x_\alpha \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ■

3.7.5. Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

3.7.6. Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \in B\left(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \varepsilon\right)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je analogií Věty 3.1.17 pro zobecněné řady.

3.7.7. Věta (linearita zobecněného součtu)**.** Nechť řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ mají součet.

(a) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

(b) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

(a) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 \colon \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left| \sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha - y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} (x_\alpha + y_\alpha) - (x+y)\right| \leq \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'} y_\alpha - y\right| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nalezneme konečnou množinu $F_1 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 \colon \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \tag{3.31}$$

Dále nalezneme konečnou množinu $F_2 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\right| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha > y - 1. \tag{3.32}$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme díky (3.31) a (3.32) nerovnost

$$\sum_{\alpha\in F'} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha\in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme.

(b) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} c x_\alpha - c x\right| = |c|\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha\in I} c x_\alpha = c x$.

Případ $x = -\infty$, $c < 0$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I)$, $F' \supset F$, pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'} c x_\alpha > -c\frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě. ∎

3.7.8. Věta (vlastnosti zobecněného součtu)**.** Pro zobecněnou řadu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ platí následující tvrzení.

(a) Jsou-li čísla x_α, $\alpha \in I$, nezáporná, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}. \tag{3.33}$$

(b) Zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.34}$$

(c) Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. V tomto případě pak platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.35}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I)\colon \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \le s. \tag{3.36}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.36) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.34) plyne z Věty 3.7.7(a), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I;\ x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I;\ x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha\in M} x_\alpha. \tag{3.37}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\Big\} = \Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\Big\}, \tag{3.38}$$

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\Big\} = \Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\Big\}, \tag{3.39}$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ &= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\Big\} && \text{(podle (3.38))} \\
&= \sum_{\alpha\in P} x_\alpha, \\
-\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- &= -\sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\Big\} \\
&= -\sup\Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\Big\} && \text{(podle (3.39))} \\
&= \inf\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\Big\} && \text{(podle (\textbf{??}))} \\
&= \sum_{\alpha\in M} x_\alpha.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Nechť $F \subset I$ je konečná.

Z (3.37) plyne

$$\sup\left\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(P \setminus F)\right\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha > -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha + 1.$$

Z (3.37) dále plyne

$$\inf\left\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(M \setminus F)\right\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy nalezli $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha > 1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 3.7.7.

Rovnost (3.35) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.7, neboť $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-, \alpha \in I$. ■

Z Věty 3.7.8(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.9. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady)**.** Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a nechť platí $y_\alpha \le x_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.8(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Odtud pomocí Věty 3.7.8(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ■

3.7.10. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady)**.** Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.8(c) řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.8(b) i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \leq x_\alpha^+ \leq |x_\alpha|$ a $0 \leq x_\alpha^- \leq |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.9 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.8(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. ■

3.7.11. Věta (přerovnání zobecněné řady)**.** Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.12. Věta. Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I;\ x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.10. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$I_n = \left\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| \geq \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha\in F} 1 = n \sum_{\alpha\in F} \tfrac{1}{n} \leq n \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \leq ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.7.19(b) množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.13. Poznámka. Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.12 plyne, že pro pro každé $c \in \mathbb{R}, c > 0$, je množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.14 pro konvergentní zobecněné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z Definice 3.7.2. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.14. Věta (zobecněný součet na $\mathbb{N}$). Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.

(a) Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. V tomto případě pak platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
(b) Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) Podle Věty 3.7.10 konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ právě tehdy, když konverguje absolutně. Řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje absolutně podle Věty 3.7.8(a) právě tehdy, když

$$\sup\left\{\sum_{i\in F} |x_i|;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|;\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Poslední nerovnost nastává právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergentní, tedy když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní. Tím je proveden důkaz ekvivalence.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. Označme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dokážeme rovnost $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku konvergence řady (Věta 3.1.16(ii)). Můžeme tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left|x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{i=n_0}^{n} |x_i| < \varepsilon.$$

Položme nyní $F = \{1, \dots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná množina obsahující F. Označme $F'' = \{i \in F';\ i > n_0\}$. Pak pro F' máme odhad

$$\begin{aligned}\Bigl|x - \sum_{i\in F'} x_i\Bigr| &= \Bigl|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i - \sum_{i\in F''} x_i\Bigr| \le \Bigl|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\Bigr| + \Bigl|\sum_{i\in F''} x_i\Bigr| \\ &\le \Bigl|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\Bigr| + \sum_{i\in F''} |x_i| \\ &\le \Bigl|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\Bigr| + \sum_{i=n_0+1}^{\max F'} |x_i| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$.

(b) Díky tvrzení (a) zbývá ověřit případ, kdy je součet zobecněné řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nevlastní. Předpokládejme nejprve, že platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $s \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{n\in F'} x_n > s.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i > s$. Tím jsme ukázali, že částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergují k ∞.

Je-li $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$, platí díky Větě 3.7.7(b) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) = \infty$, a tedy víme z předešlého, že $\sum_{n=1}^{\infty}(-x_n) = \infty$. Z Věty 2.3.23 plyne $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$. ∎

3.7.15. Příklad. Tvrzení (b) Věty 3.7.14 nelze obrátit, jak ukazuje libovolná neabsolutně konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.14(b). Pomocí Riemannovy Věty 3.5.7 bychom našli bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \ne s$. Podle Věty 3.7.11 ale platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.14(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad)**.** Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i zobecněná řada $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta = \Bigl(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{\beta\in J} y_\beta\Bigr).$$

Důkaz. Ověříme nejprve absolutní konvergenci řady $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$ a $t = \sum_{\beta\in J} |y_\beta|$. Máme-li dánu konečnou množinu

$F \subset I \times J$, najdeme pomocí Věty **??** konečné množiny $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ splňující $F \subset F_1 \times F_2$ a odhadneme

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in F} |x_\alpha y_\beta| \leq \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} |x_\alpha y_\beta| = \left(\sum_{\alpha\in F_1} |x_\alpha|\right) \cdot \left(\sum_{\beta\in F_2} |y_\beta|\right) \leq s \cdot t < \infty.$$

Zde jsme použili absolutní konvergenci obou řad plynoucí z Věty 3.7.10. Z tvrzení Věty 3.7.8(a) plyne absolutní konvergence řady $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$, a tedy i její konvergence (viz znovu Věta 3.7.10).

Ukážeme nyní požadovanou rovnost. Označíme

$$x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \qquad y = \sum_{\beta\in J} y_\beta, \qquad z = \sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$$

a pro dané kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ najdeme konečné množiny $F \subset I \times J$, $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ takové, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I \times J), F' \supset F\colon \left|\sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - z\right| < \varepsilon, \tag{3.40}$$

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1\colon \left|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\right| < \varepsilon, \tag{3.41}$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(J), F_2' \supset F_2\colon \left|\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y\right| < \varepsilon. \tag{3.42}$$

Nalezneme konečné množiny $F_1' \subset I$ a $F_2' \subset J$ splňující $F \subset F_1' \times F_2'$. Potom platí

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2'} y_\beta. \tag{3.43}$$

Odhadneme

$$\begin{aligned} |z - xy| &= \left|z - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta + \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - xy\right| \qquad \text{(podle (3.43))} \\ &\leq \left|z - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - xy\right|. \end{aligned}$$

První výraz odhadneme podle (3.40) a dostaneme

$$\left| z - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta \right| < \varepsilon. \tag{3.44}$$

Nyní odhadneme druhý výraz

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - xy \right| &\le \left| \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y \right) + \left(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x \right) \cdot y \right| \\
&\le \sum_{\alpha\in F_1'} |x_\alpha| \cdot \left| \sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y \right| + \left| \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x \right| \cdot |y| \\
&\le s\varepsilon + \varepsilon\,|y|\,.
\end{aligned}$$

Tedy $z = xy$ a důkaz je hotov. ∎

3.7.17. Věta (asociativita zobecněného součtu)**.** Nechť J je množina a $\{I_\beta;\ \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$. Nechť $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$, $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\beta\in J} y_\beta$.

Důkaz. Zvolme $\beta \in J$. Podle Věty 3.7.8(b) mají řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ součet. Pomocí (3.33) odhadneme

$$0 \le \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+ \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ < \infty \quad \text{a} \quad 0 \le \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^- \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- < \infty.$$

Odtud plyne, že i řady $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^-$ konvergují. Tedy dle Věty 3.7.8(c) řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Čísla y_β, $\beta \in J$, jsou tedy dobře definována.

Označme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{\beta\in J} y_\beta = x$. Je-li $I = \emptyset$, pak pro každé $\beta \in J$ platí $I_\beta = \emptyset$, takže $y_\beta = 0$. Potom máme

$$\sum_{\beta\in J} y_\beta = \sum_{\beta\in J} 0 = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0.$$

Nechť $I \neq \emptyset$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou neprázdnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \left| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.45}$$

Označme $G = \{\beta \in J;\ F \cap I_\beta \neq \emptyset\}$. Množina G je konečná, neboť systém $\{I_\beta;\ j \in \beta\}$ je disjunktní a množina F je konečná. Nechť $G' \in \mathcal{F}(J)$, $G' \supset G$. Počet prvků G' označme n. Pro každé $\beta \in G'$ nalezneme konečnou množinu $F_\beta \subset I_\beta$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I_\beta), F' \supset F_\beta: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - y_\beta \right| < \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3.46}$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{\beta \in G'} F_\beta$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$, neboť $F \subset \bigcup_{\beta \in G} I_\beta \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - x \right| &\le \left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\
&\le \left| \sum_{\beta \in G'} \Big(y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \Big) \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\
&\le \sum_{\beta \in G'} \left| y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right|.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.45)

$$\left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $\beta \in G'$ platí $F_\beta \subset F^* \cap I_\beta$, a proto podle (3.46) platí

$$\left| y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.47) pak plyne

$$\left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - x \right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.7.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněné řady)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \emptyset: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| < \varepsilon. \tag{3.48}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že pro každou konečnou množinu $F'' \subset I$ obsahující F

platí $|\sum_{\alpha\in F''} x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro konečnou množinu $F' \subset I$ disjunktní s F pak platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| = \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| \\ &\le \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x\right| + \left|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

tedy podmínka (3.48) je splněna.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ splňuje podmínku (3.48). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.48) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I),\ F' \cap F_n = \emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}. \tag{3.49}$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left|\sum_{\alpha\in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n, dostáváme podle (3.49) odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge n_0$, $n \ge n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.22 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $F' \subset I$ je konečná množina obsahující

F_{n_0}. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha - x\right|\\ &\leq \left|\sum_{\alpha\in F_{n_0}} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right|\\ &= \left|y_{n_0} - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right|.\end{aligned}$$

Podle (3.49) platí

$$\left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.19. Příklad. Zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2}$ není konvergentní.

Řešení. Protože řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Naším cílem je ukázat, že je roven nekonečnu. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1, \dots, 2j\} \times \{j+1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in I_j} \frac{1}{n^2+m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2+m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2}\\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Potom množiny I_{2^j}, $j \in \mathbb{N}$, jsou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^{k} I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(viz definici zobecněné řady)}\\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(disjunktnost } I_{2^j},\ j\in\mathbb{N})\\
&\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8} && \text{(viz (3.50))}\\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty.
\end{aligned}$$

♣

3.7.20. Příklad. Zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Položme

$$N_k = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \max\{m,n\} = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k-1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{m,n\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}.$$

Nechť $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{j=1}^{k} N_j$, a dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in F} \frac{1}{n^3+m^3} &\leq \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^{k} N_j} \frac{1}{n^3+m^3} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in N_j} \frac{1}{n^3+m^3}\\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{j^3} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3}.
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. Z (3.33) tedy máme

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3} < \infty.$$

♣

3.7.21. Příklad. Nechť Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Pak zobecněná řada $\sum_{q\in Q} q$ má součet roven nekonečnu.

Řešení. Protože racionálních čísel větších jak $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q;\ q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle Poznámky 3.7.13. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q\in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.8(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

3.8.1. Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy.

- Pokud $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.
- Pokud $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$. Najdeme $q \in (1,\infty)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové,

$$\forall n \geq n_0\colon n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq q.$$

Tedy

$$\forall n \geq n_0\colon n a_n - (n+1)a_{n+1} \geq (q-1)a_{n+1}.$$

Proto pro $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - n a_n &= \sum_{k=n_0}^{n-1} (k a_k - (k+1)a_{k+1}) \\ &\geq (q-1)\sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$

To ale znamená, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

Předpokládejme nyní, že pro jisté $n_0 \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall n \geq n_0 \colon n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1.$$

Pak

$$\forall n \geq n_0 \colon \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Tedy pro $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{n+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Jelikož je řada

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{k+1} a_{n_0} = n_0 a_{n_0} \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

divergentní, ze srovnávacího kritéria (viz Věta 3.2.2) plyne divergence řady $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{k+1}$, a tedy i řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Poslední tvrzení pak plyne přímo z předcházejícího. ♣

3.8.2. Příklad. Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Ukažte, že pokud řada $\sum b_n$ konverguje, koneverguje i řada $\sum a_n$.

Dokažte pomocí tohoto tvrzení d'Alambertovo kritérium 3.2.12(c), (d).

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je libovolné. Pak dle předpokladu platí

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n_0}} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \\ &\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Konverguje-li tedy řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum a_n$.

Předpokládejme nyní, že řada $\sum a_n$ má kladné členy a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q \in [0, 1)$. Díky Větě 2.2.44 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum q^n$ konverguje (viz Věta 3.1.8). Podle výše dokázaného tvrzení řada $\sum a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.16. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m\colon \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{2}. \tag{3.51}$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim \left(1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}\right) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.51). ♣

3.8.4. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Potom existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0.$$

♣

3.8.5. Příklad. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Pak existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k\colon c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \le n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Pro takto definované b_n platí $b_n \le \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}$. Pak máme pro každé $l \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n_l} b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \le \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.\end{aligned}$$

Tedy je vybraná posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$ omezená, což znamená, že řada $\sum b_n$ konverguje. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.6. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada s kladnými členy. Označme $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j$, $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ diverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konverguje.

Řešení. Posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a platí $\lim r_n = 0$. Ukážeme, že první řada nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$, $m \ge n$, takové, že $\frac{r_{m+1}}{r_n} < \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{j=n}^{m} \frac{a_j}{r_j} \ge \sum_{j=n}^{m} \frac{a_j}{r_n} = \frac{r_n - r_{m+1}}{r_n} = 1 - \frac{r_{m+1}}{r_n} > \frac{1}{2}.$$

Naše řada je tedy divergentní.

Nyní ukážeme konvergenci druhé řady. Zřejmě platí $a_n = r_n - r_{n+1}$, a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}} = (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})\frac{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}} \leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}).$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ konverguje, neboť její k-tý částečný součet je roven $2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_{k+1}})$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ tedy konverguje podle srovnávacího kritéria. ♣

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti zadaných řad.

3.8.7. Příklad. Existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Položme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že platí

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ a $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Pak $e = \lim a_n$ dle Příkladu 2.5.2. Pak pro $n \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\ &< s_n. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $a_n < s_n$ pro $n > 1$. Nechť nyní $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, je pevné. Je-li $n > k$, platí

$$a_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}). \tag{3.52}$$

Provedeme-li limitní přechod pro $n \to \infty$ v (3.52), dostaneme z Věty 2.2.44

$$e \geq s_k.$$

Tedy máme

$$a_n < s_n \leq e, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dalším limitním přechodem obdržíme

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

♣

3.8.9. Příklad. Ukažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.8

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdots(k+j)} < \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^j},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{kk!},$$

Předpokládejme, že $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$. Potom tedy

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{kk!},$$

kde poslední rovnost vyplývá ze vzorce pro součet geometrické řady (Příklad 3.1.9). Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $qk!$ a dostaneme

$$qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < pk! < qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!},$$

pak

$$m < pk! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ pak dostáváme $pk! \in (m, m+1)$. To je ale spor, protože obě čísla $m = qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}$ i $pk!$ jsou zřejmě přirozená. ♣

3.8.10. Příklad (číselné rozvoje). Nechť $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $P = \{0, \dots, p-1\}$. Nechť

$$\mathcal{P} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in P^{\mathbb{N}};\ \{a_n\} \text{ nekončí výrazem } 000\dots\}.$$

- Zobrazení $\varphi : P^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ definované jako
$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$
je dobře definované. (Zápis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1a_2a_3\dots$ se nazývá **p-adickým rozvojem čísla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$**.)
- Jsou-li $a = \{a_n\}$ a $b = \{b_n\}$ v $P^{\mathbb{N}}$ různé posloupnosti, pak $\varphi(a) = \varphi(b)$ právě tehdy, když platí
$$a = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, 0, 0, 0\dots) \quad \text{a}$$
$$b = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, p-1, p-1, p-1, \dots),$$
kde $k \in \mathbb{N}$ a $a_k > 0$.
- Zobrazení $\varphi\colon \mathcal{P} \to (0,1]$ je bijekce.

Řešení. Povšimněme si nejprve, že zobrazení φ je dobře definované zobrazení do $[0,1]$ díky odhadu

$$\varphi(\{a_n\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Nyní ověříme druhé tvrzení. Nejprve si uvědomme, že pro posloupnosti a, b výše popsaného tvaru platí

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \frac{1}{p^k} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\
&= \varphi(b).
\end{aligned}$$

Obráceně, nechť $\varphi(a) = \varphi(b)$ pro dvě různé posloupnosti $a, b \in P^{\mathbb{N}}$. Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $b_k < a_k$. Nechť dále existuje $l > k$ takové, že $b_l < p - 1$. Pak máme

$$\begin{aligned}
\varphi(b) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \\
&< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k} \\
&\leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\
&\leq \varphi(a),
\end{aligned}$$

což je spor s předpokladem $\varphi(a) = \varphi(b)$. Tedy $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = p - 1$ a

$$\varphi(b) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k}.$$

Protože

$$\begin{aligned}
\varphi(b) = \varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\
&\geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_{k+1}}{p^k} \\
&= \varphi(b),
\end{aligned}$$

máme

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0 \quad \text{a} \quad a_k = b_k + 1.$$

Tím je druhé tvrzení je ověřeno.

K důkazu třetího tvrzení stačí dokázat, že φ je surjekce $\mathcal{P}$ na $(0, 1]$. Nechť $x \in (0, 1]$ je dáno. Induktivně definujeme posloupnost $\{a_n\}$ takto: Položme

$$a_1 = \max\{i \in P;\ \frac{i}{p} < x\}.$$

Máme-li čísla $a_1, \dots, a_n$ již nalezena, definujme

$$a_{n+1} = \max\{i \in P;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{i}{p^{n+1}} < x\}.$$

Povšimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}}. \tag{3.53}$$

Z definice posloupnosti $\{a_n\}$ totiž platí první nerovnost v (3.53). Abychom ověřili nerovnost druhou, předpokládejme, že

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pokud $a_{n+1} < p-1$, vede tato nerovnost okamžitě ke sporu s definicí a_{n+1}. Pokud $a_{n+1} = p-1$, pak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^n}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_n+1}{p^n}.\end{aligned}$$

Z definice čísla a_n dostaneme $a_n = p-1$. Induktivně pak obdržíme

$$a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = p-1.$$

Proto

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{p-1}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}} = \frac{p-1}{p}\frac{\frac{1}{p^n}-1}{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p^n} = 1,$$

což je spor. Tedy (3.53) platí.

Z těchto nerovností vidíme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy pomocí Věty 2.2.44 máme

$$\varphi(\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy φ je zobrazení na. ♣

3.8.11. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ a $x \in [0,1]$ má p-adický rozvoj $0.a_1a_2a_3\dots$. Ten nazveme **periodickým**, pokud existují přirozená čísla $k \geq 0$, $r > 0$ taková, že pro $n > k$ platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že x má periodický rozvoj právě tehdy, když je racionální.

Řešení. Nechť nejprve rozvoj $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ je periodický, tj. existují $k, r \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+r} = a_n$ pro $n > k$. Potom ale díky absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ lze použít Větu 3.7.17 a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{p^{3r}} \cdots\right) \\ &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p^r}}, \end{aligned}$$

což je racionální číslo.

Nechť je nyní číslo $x \in [0,1]$ racionální. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in (0,1)$, tj. $x = \frac{u}{v}$, kde $u, v \in \mathbb{N}$ a $u < v$. Nechť $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ je p-adický rozvoj x. Jsou-li všechna a_n od jistého místa rovna 0 nebo jsou od jistého místa rovna $p-1$, je zřejmě rozvoj x periodický. Předpokládejme tedy, že tomu tak není, tj. $\{a_n\} \in \mathcal{P}$ (viz Příklad 3.8.10) a $\{a_n\}$ nekončí opakováním cifry $p-1$. Označme $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$0 \leq x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k}.$$

Tedy

$$0 \leq p^k(x - s_k) < 1.$$

Dále máme

$$p^k(x - s_k) = p^k\frac{u}{v} - p^k s_k = \frac{c_k}{v}, \tag{3.54}$$

kde c_k je celé číslo. Protože $0 \leq p^k(x - s_k) < 1$, je $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$. Tedy pro každé $k \in \{1, \dots, v+1\}$ platí $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$.

Proto existují indexy $k, l \in \{1, \dots, v+1\}$, $k < l$, takové, že $c_k = c_l$. Položme $r = l - k$, pak $c_k = c_{k+r}$. Z (3.54) máme

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{v} &= p^k(x - s_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k}}{p^j}, \\ \frac{c_{k+r}}{v} &= p^{k+r}(x - s_{k+r}) = \sum_{n=k+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k+r}}{p^j}. \end{aligned}$$

Máme tedy dva rozvoje čísla $\frac{c_k}{v}$ nekončící cifrou $p-1$, a tedy se dle Příkladu 3.8.10 musí rovnat. Proto pro $n > k$ platí $a_n = a_{n+r}$ a x je periodické. ♣

3.8.2. Řady s obecnými členy.

3.8.12. Lemma. Nechť $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $0 \le \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+i} \le a_n$.

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pokud $k = 0$, pak jsou nerovnosti

$$\sum_{i=0}^{0}(-1)^i a_{n+i} = a_n \begin{cases} \ge 0 \\ \le a_n \end{cases}$$

zřejmé.

Předpokládejme nyní, že uvedené tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k+1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \le \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i a_{n+i} \le a_n. \tag{3.55}$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \le \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+1+i} \le a_{n+1}. \tag{3.56}$$

Potom díky (3.56) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \ge a_n - a_{n+1} \ge 0 \\ \le a_n \end{cases}, \tag{3.57}$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ∎

Alternativní důkaz Věty 3.3.1. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (ii) Věty 3.1.16. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \colon a_n < \varepsilon. \tag{3.58}$$

Vezměme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n \leq m$. Pak z Lemmatu 3.8.12 plyne, že

$$\left|\sum_{i=n}^{m}(-1)^i a_i\right| = \sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Díky (3.58) tedy pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq m$, máme

$$\left|\sum_{i=n}^{m}(-1)^i a_i\right| < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v prvním důkazu Věty 3.3.1. ■

3.8.13. Příklad. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ omezenou posloupnost částečných součtů.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Důkaz. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$ a $|t_n| \leq M$.

(a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} ca_k\right| = |cs_n| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů dokázána.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right| \leq |s_n| + |t_n| \leq 2M$$

a tvrzení je dokázáno. ■

3.8.14. Příklad. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rosotucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\sum b_k = \sum a_n$.

(b) Ukažte, že sestává-li řada $\sum a_n$ z nezáporných čísel a $\{n_k\}$ a b_k jsou jako výše, pak $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum b_k$ konverguje.

(c) Nalezněte divergentní řadu $\sum a_n$ a rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $n_1 = 1$ a řada $\sum b_k$ konverguje (b_k jsou definovány jako v (a)).

Řešení. Nechť $\{s_u\}$ a $\{t_v\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Rozmyslíme si nejprve, že

$$t_v = \sum_{k=1}^{v} b_k = \sum_{k=1}^{v} \sum_{n_k \le j < n_{k+1}} a_j = \sum_{j=1}^{n_{v+1}-1} a_j = s_{n_{v+1}-1}, \quad v \in \mathbb{N}. \tag{3.59}$$

Přistupme nyní k důkazu tvrzení (a). Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, existuje vlastní limita $a = \lim_{u\to\infty} s_u$. Z Věty 2.2.32 a (3.59) pak dostáváme

$$\lim_{v\to\infty} t_v = \lim_{v\to\infty} s_{n_{v+1}-1} = a.$$

Řada $\sum b_k$ tedy konverguje.

(b) Díky (a) stačí dokázat, že řada $\sum a_n$ konverguje, konverguje-li řada $\sum b_k$. Označme $b = \lim_{v\to\infty} t_v$. Jelikož má řada $\sum a_n$ nezáporné členy, existuje $a = \lim_{u\to\infty} s_u$. Z rovnosti (3.59) pak plyne

$$\lim_{v\to\infty} s_{n_{v+1}-1} = \lim_{v\to\infty} t_v = b,$$

tj. posloupnost $\{s_u\}$ má konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{v+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.20) a řada $\sum a_n$ konverguje.

(c) Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.14). ♣

3.8.3. Miscelanea.

3.8.15. Příklad. Ukažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $\mathcal{Z}$ značí množinu všech zobrazení $\mathbb{N}$ do $\{0,1\}$. Pak $\mathcal{Z} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (viz důkaz Příkladu A.0.40)Pro $z \in \mathcal{Z}$ definujme $\varphi\colon \mathcal{Z} \to [0,1]$ jako

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Ukažme, že φ je prosté. Mějme tedy dvě zobrazení $z, z' \in \mathcal{Z}$ a nechť $n \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $z(n) \neq z'(n)$. Můžeme předpokládat, že $z(n) = 1$

a $z'(n) = 0$. Pak

$$\begin{aligned}
\varphi(z') &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z'(k)}{3^k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
&< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z(k)}{3^k} \\
&= \varphi(z).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{Z} \preceq [0,1] \preceq \mathbb{R}.$$

Dále musíme dokázat, že $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Protože $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (Příklad 1.7.20), stačí ověřit $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. K tomuto účelu položme

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q};\ q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Díky Větě 1.6.33 je ψ prosté, a tak $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Z Věty 1.7.5 plyne závěr. ♣

3.8.16. Příklad. Ukažte, že platí

$$\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}.$$

Řešení. Zjevně platí $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$. Dále uvažujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ definované jako

$$\psi(x,y) = \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2;\ (p < x) \wedge (q < y)\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pak z Věty 1.6.33 plyne prostota ψ. Protože $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$ dle Věty 1.7.19(d) a Příkladu 1.7.20, máme tak

$$\mathbb{R}^2 \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Protože $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dle Příkladu 3.8.15, plyne tvrzení z Věty 1.7.5. ♣

3.8.17. Příklad. Ukažte, že Cauchyův součin divergentních řad $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ je konvergentní.

Řešení. Označíme-li členy řady $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ jako a_k, členy řady $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ jako b_k a c_k, $k \in \mathbb{N}$, nechť jsou členy Cauchyova součinu, máme $c_1 = -2$, zatímco

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2\colon c_k &= (a_1 b_k + \cdots a_k b_1) = a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

Cauchyův součin zadaných řad tedy konverguje. ♣

3.8.18. Příklad. Nechť Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$. Pak existují bijekce π a σ množiny $\mathbb{N}$ na Q takové, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ reálných čísel z intervalu $[0, 1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} < 2^{-(k+1)}$. Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l\colon P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q\in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q\in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1}^{n_k+l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} \leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 3.\end{aligned}$$

Konstrukce σ. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma\colon \mathbb{N} \to Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^{m} q_k^{2k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.8.19. Věta (Toeplitzova). Nechť $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

(a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
(c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| < \infty$.

Nechť $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \le C \cdot \sup\{|a_k|;\ k \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Nyní navíc předpokládejme, že $\lim a_k = 0$. Zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \ge k_0\colon\ |a_k| < \varepsilon. \tag{3.60}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n| &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big|\end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má pevný konečný počet sčítanců a lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.60)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}| \varepsilon \le C\varepsilon.\end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.12 máme

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n| \le \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k\Big| + \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \le C\varepsilon$$

pro libovolné kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim b_n = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k\to\infty}(a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.8.20. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$$

nazýváme **posloupností cesàrovských**[1] **součtů** posloupnosti $\{a_n\}$.

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty, z něhož vyplývá, že cesàrovské součty konvergentní posloupnosti mají stejnou limitu, jako zadaná posloupnost.

3.8.21. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \leq n, \\ 0 & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.8.19). Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1,$$

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

[1] Ernesto Cesàro, 1859–1906

pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty. ■

3.8.22. Poznámka. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(-1)^n}{n}$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0,$$

přestože posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu. Tvrzení Věty 3.8.21 tedy nelze obrátit.

3.8.23. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečným součinem**. Pokud existuje limita $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu. Je-li tato hodnota reálné číslo, pak říkáme, že uvedený nekonečný součin **konverguje**.

3.8.24. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. $\Leftarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \geq \prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^{k} a_n \geq \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \leq x$ (viz 1.8.16) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\log\Big(\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\Big) = \sum_{n=1}^{k} \log(1 + a_n) \leq \sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.25. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n-té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{p_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{p_n}\right)^k \Bigr)$$

je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{p_n}\right)^k \Bigr) = \prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{p_n}\right)^k \Bigr).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}, l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla z množiny $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}, j \leq n_0\}$ v mocnině nejvýše n_0. Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{p_n})^k \Bigr) \geq \prod_{n=1}^{n_0} \Bigl(\sum_{k=0}^{n_0} (\tfrac{1}{p_n})^k \Bigr) \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

3.9. Početní příklady k číselným řadám

3.9.1. Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

Řešení. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že naše řada bude velmi blízko řadě s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Tento svůj odhad ověříme pomocí limitního srovnávacího kritéria pro konvergenci řad (Věta 3.2.5). Označme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1 \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje, právě tehdy když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.11, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Použijeme podílové kritérium (Věta 3.2.12) a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. K vyšetření konvergence této řady použijeme odmocninové kritérium (Věta 3.2.8). Pomocí Příkladu 2.2.50 dostáváme

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro velké hodnoty n se jmenovatel posledního zlomku chová zhruba jako $\sqrt{n}$, a proto zkusíme použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5) pro

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Podle Věty 3.2.18 zadaná řada konverguje, právě tehdy když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n \log^2 n}\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Věty 3.2.18 a Věty 3.1.17(a). Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Nejprve výraz upravíme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n} = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}}{\log^2 n} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)\log^2 n}. \end{aligned}$$

Položme $b_n = \frac{1}{n \log^2 n}$. Snadno spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2})\log^2 n}}{\frac{1}{n \log^2 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{1}{2} \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje podle Příkladu 3.9.5, a tedy konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Použijeme podílové kritérium. Počítejme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.6.4 platí, že $\lim \frac{n}{2^n} = 0$, a tedy

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \lim \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$.

Řešení. Funkce kosinus nabývá hodnot v intervalu $[-1,1]$ a pro všechna $t \in [-1,1]$ platí

$$0 \le \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \le 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \le \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Geometrická řada s kvocientem $\frac{2}{3}$ konverguje, a proto konverguje i zadaná řada podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

Řešení. Využijeme vzorec $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ a členy zadané řady upravíme

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} \\
&= (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1})\frac{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \\
&= \frac{(n^2+5)-(n^2+1)}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \\
&= \frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}.
\end{aligned}$$

Čitatel posledního zlomku je konstanta a jmenovatel se chová při pomyslném zanedbání konstant řádově jako $n^{\frac{4}{3}}$. Zkusíme tedy zadanou řadu porovnat s řadou $\sum b_n$, kde $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$, a dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{5}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}} = \frac{4}{3} \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle základní srovnávací škály (Věta 3.2.18), a proto konverguje i naše řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Podle Příkladu 2.6.5 platí $\lim_{k\to\infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Speciálně tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená $k \geq k_0$ platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Pokud je tedy $n_0 = k_0^3$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pak pomocí elementárního odhadu celé části $x - 1 \leq [x] \leq x$ dostáváme

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{(\sqrt[3]{n})^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}] + 1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{(2[\sqrt[3]{n}])^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6.$$

Pro $n \geq n_0$ tedy máme odhad

$$e^{-\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria pro řady (Věta 3.2.2) dostáváme i konvergenci původní řady. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1}$.

Řešení. Označme $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Upravme a_n pomocí vzorce $a^6 - b^6$, kde $a = \sqrt{n^2+3}$, $b = \sqrt[3]{n^3+1}$, jako

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \frac{(n^2+3)^3 - (n^3+1)^2}{a^5 + a^4 b + \cdots + a b^4 + b^5}\\ &= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{a^5 + a^4 b + \cdots + a b^4 + b^5}.\end{aligned}$$

Zjevně jsou tedy hodnoty posloupnosti $\{a_n\}$ od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné. Porovnáme-li $\sum a_n$ s řadou $\sum \frac{1}{n}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Protože $\frac{3}{2}$ je kladné konečné číslo a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 3.1.11), zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria (viz Věta 3.2.5). ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=\infty.$$
Podle Příkladu 3.8.1 tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.13. Příklad. Nechť $a, b, d \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde
$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou zřejmě kladné a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+(n+1)d}{a+(n+1)d},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Pak
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{b-a}{a+(n+1)d}=\frac{b-a}{d}.$$
Je-li tedy $\frac{b-a}{d}>1$, tj. $b-a>d$, zadaná řada dle Příkladu 3.8.1 konverguje a pro $b-a<d$ řada diverguje. Je-li $b=a+d$, dostaneme
$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)(a+(n+1)d)}=\frac{a}{a+(n+1)d},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Srovnáním s řadou $\sum\frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) obdržíme divergenci dané řady i v tomto případě. ♣

3.9.2. Řady s obecnými členy.

3.9.14. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}=\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Absolutně nekonverguje, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18. ♣

3.9.15. Příklad. Nechť $\alpha\in\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Potom mají řady $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx+\alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx+\alpha)$ omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Nechť $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladu 3.3.7. Dále pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí
$$\sin(nx+\alpha)=\sin nx\cos\alpha+\cos nx\sin\alpha,$$
$$\cos(nx+\alpha)=\cos nx\cos\alpha-\sin nx\sin\alpha.$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení snadno plynou pomocí Příkladu 3.8.13. ♣

3.9.16. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Díky součtovým vzorcům platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnosti $(-1)^n \sin nx = \sin n(x+\pi)$ a $(-1)^n \cos nx = \cos n(x+\pi)$. Tvrzení pak plynou okamžitě z Příkladu 3.9.15. ♣

3.9.17. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má pro každé $x \in \mathbb{R}$ omezenou posloupnost částečných součtů dle Příkladu 3.9.16. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ zjevně konverguje monotónně k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)). ♣

3.9.18. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.17 konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Dále posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$$

a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Tedy je posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ omezená a neklesající. Dle Abelova kriteria (Věta 3.3.5(A)) je proto i zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.19. Příklad. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4}) \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right) \frac{n^2+n}{n^2+2}$$

konverguje pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Označme pro $n \in \mathbb{N}$ postupně $a_n = \cos(nx + \frac{\pi}{4})$, $b_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n$ a $c_n = \frac{n^2+n}{n^2+2}$. Upravme

$$b_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}.$$

Tedy $\lim b_n = 0$.

Dále zkoumejme pro $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $b_{n+1} \leq b_n$. Ta je ekvivalentní s následujícími nerovnostmi:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(n+1)^2+\sqrt{n+1}}-(n+1) \leq \sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n \Leftrightarrow \\
&(n+1)^2+\sqrt{n+1} \leq n^2+\sqrt{n}+1+2\sqrt{n^2+\sqrt{n}} \Leftrightarrow \\
&2n+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n^2+\sqrt{n}} \Leftrightarrow \\
&4n^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2+\frac{4n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 4n^2+4\sqrt{n} \Leftrightarrow \\
&\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 4.
\end{aligned}$$

Jelikož levá strana poslední nerovnosti konverguje k 2 pro n jdoucí do nekonečna, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, poslední nerovnost platí. Tedy pro tato n máme $b_{n+1} \leq b_n$.

Dále platí, že $\sum a_n$ má díky Příkladu 3.9.15 omezenou posloupnost částečných součtů. Tedy je z Věty 3.3.5(D) řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \cos(nx+\frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n)$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx+\frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n)$.

Konečně vyšetříme chování posloupnosti $\{c_n\}$. Zjevně $\lim c_n = 1$, a tedy je $\{c_n\}$ omezená. Dále zkoumejme její monotonii, konkrétně nerovnost $c_n \geq c_{n+1}$. Ta je ekvivalentní s následujícími nerovnostmi:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2+n}{n^2+2} \geq \frac{(n+1)^2+(n+1)}{(n+1)^2+2} \Leftrightarrow \\
&(n^2+2n+3)(n^2+n) \geq (n^2+2)(n^2+3n+2) \Leftrightarrow \\
&n^4+3n^3+5n^2+3n \geq n^4+3n^3+4n^2+6n+4 \Leftrightarrow \\
&n^2 \geq 3n+4 \Leftrightarrow \\
&1 \geq \frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tato nerovnost platí. Pro tato n tedy máme $c_n \geq c_{n+1}$, tj. $\{c_n\}$ je od indexu n_0 nerostoucí. Proto dle Věty 3.3.5(A) konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

Nechť nyní $x \in \{2k\pi;\ ,k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dále máme pro nezápornou posloupnost $\{b_n\}$ rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

Řada $\sum b_n$ proto diverguje podle Vět 3.2.5 a 3.2.18.

Protože $\lim c_n = 1$ a $\{c_n\}$ je od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ neklesající, je i posloupnost $\{\frac{1}{c_n}\}$ omezená a monotónní. Pokud by konvergovala řada $\sum b_n c_n$, dle Věty 3.3.5(A) by konvergovala i řada $\sum b_n = \sum b_n c_n \frac{1}{c_n}$. Ta ale diverguje. Proto řada $\sum b_n c_n$ diverguje. ♣

3.9.20. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim a_n = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria. Podle Příkladu 1.9.9 pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge 4$, platí $n^2 \le 2^n$, a tedy také $n \le n^2 \le 2^n \le e^n$. Odtud dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\log n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n} \ge \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Zadaná řady tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\} = \{(\sqrt[n]{3}-1)\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.50. Řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1).

Ukážeme, že zadaná řada nekonverguje absolutně. Použijeme vzorec z Věty 1.6.5 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[n]{3}-1 &= (\sqrt[n]{3}-1)\cdot\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\dots+1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\dots+1} \\ &= \frac{3-1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\dots+1} = \frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\dots+1} \ge \frac{2}{3n}. \end{aligned}$$

Pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}a_n \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n}.$$

Poslední řada je divergentní, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right|$ diverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(b)). ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $z \neq 0$ má řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.5). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $x \neq 0$ má tato řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.5). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Analogickým způsobem lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $z \neq 0$ má řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.5). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^n \frac{z^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

Pro $|z| < 1$ tedy zadaná řada konverguje dokonce absolutně a pro $|z| > 1$ zadaná řada diverguje. Zbývá vyšetřit případy $z = 1$ a $z = -1$. Pro $z = -1$ obdržíme divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pro $z = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ jejíž konvergence snadno plyne z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1), ale absolutně zřejmě nekonverguje díky divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Zadaná řada konverguje právě tehdy, když platí $z \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $z \in (-1, 1)$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. V případě, že $z \neq 0$, jsou členy řady nenulové a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.5):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}|z|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!}|z|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) \frac{1}{(n+1)^2} |z| = 4|z| \,.\end{aligned}$$

Pro $|z| < \frac{1}{4}$ tedy zadaná řada konverguje absolutně a pro $|z| > \frac{1}{4}$ zadaná řada diverguje. Zbývá vyřešit případy $z = \frac{1}{4}$ a $z = -\frac{1}{4}$. Položme $a_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Přímočarý výpočet ukazuje, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = \tfrac{2n+1}{2n+2} a_n. \tag{3.61}$$

Matematickou indukcí dokážeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ následující odhad

$$\frac{1}{2n} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{3.62}$$

Pro $n = 1$ nerovnosti triviálně platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$a_{n+1} = \tfrac{2n+1}{2n+2} a_n \begin{cases} \geq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n+2} \\ \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \end{cases} .$$

Z rekurentního vztahu (3.61) vyplývá, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Z odhadu (3.62) a věty o dvou strážnících plyne $\lim a_n = 0$. Podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ je podle srovnávacího kritéria divergentní díky odhadu (3.62).

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $z \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a a absolutně konverguje právě tehdy, když $z \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7(a) má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Naše řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)).

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin 2n| \geq \sin^2 2n = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(4n)) \geq 0.$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}. \tag{3.63}$$

Opět podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) a s využitím Příkladu 3.3.7 snadno odvodíme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$. Kdyby řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ konvergovala, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což by byl spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje, a proto podle srovnávacího kritéria diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(2n)}{n}\right|$. Zadaná řada tak konverguje neabsolutně. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (Příklad 3.3.7), $\{b_n\}$ je klesající a $\lim b_n = 0$. Jsou tedy splněny všechny předpoklady Dirichletova kritéria, a proto naše řada konverguje. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\cos\left(n\tfrac{\pi}{4}\right)\right| \geq \cos^2\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(n\tfrac{\pi}{2})).$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)} \right| &\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + \cos(n\frac{\pi}{2})}{2\log(\log n)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2\log(\log n)} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Konvergence druhé řady plyne opět z Dirichletova kritéria.

Analogicky Příkladu 3.9.20 dostaneme odhad $n \leq e^n \leq e^{e^n}$, a tedy dvojím zlogaritmováním této nerovnosti dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2\log(\log n)} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$$

Za pomoci odhadu (3.64) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \operatorname{arctg} n$. Posloupnost $\{b_n\}$ je zřejmě monotónní a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Zadaná řada tedy skutečně konverguje podle Abelova kritéria.

Na vyšetření absolutní konvergence využijeme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctan n \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{2\sqrt{n}} .$$

Druhá řada konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco první řada diverguje. Proto zadaná řada není absolutně konvergentní. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{\sin n}{n+10 \sin n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$.

Řešení. Nechť $b_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a uvažujme řadu $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$. Ta je dle Příkladu 3.3.8 konvergentní a přitom platí

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{-10(\sin n)^2}{n(n+10\sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n-10)}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11.$$

Označíme-li $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, dostáváme díky srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$ (viz Věta 3.2.5 a Věta 3.2.18), že $\sum |c_n|$ konverguje. Proto je i řada $\sum |a_n - b_n|$ konvergentní (viz Věta 3.2.2), z čehož díky Větě 3.4.3 plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Vyšetřeme nyní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n|$. Dokážeme-li, že je řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10 \sin n}$ divergentní, ověříme díky odhadu

$$\left| \frac{\sin n}{n+10\sin n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11,$$

a Větě 3.2.2 absolutní divergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Uvědomme si, že platí

$$\frac{\sin^2 n}{n+10\sin n} = \frac{1}{2(n+10\sin n)} - \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11.$$

Konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)}$ ověříme podobně jako konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10\sin n)}$ diverguje, což plyne ze srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.18 a 3.2.5). Z toho dostáváme, že řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}$ diverguje, jelikož v opačném případě by řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10\sin n)} = \sum_{n=11}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n+10\sin} + \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)} \right)$$

konvergovala. Tím je řešení příkladu dokončeno. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Z Příkladu 3.9.15 víme, že řada $\sum \sin(2n+1)$ má omezené částečné součty. Dále z rovností

$$(-1)^n \sin(2n+1) = (-1)^n \sin 2n \cos 1 + (-1)^n \cos 2n \sin 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

a Příkladu 3.9.16 odvodíme omezenost částečných součtů řady $\sum (-1)^n \sin(2n+1)$. Upravme výraz $\frac{1}{2n+(-1)^n n}$ jako

$$\frac{1}{2n+(-1)^n n} = \frac{2n-(-1)^n n}{3n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(2n+1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin n}{3n} \right).$$

Posloupnost $\{\frac{2}{3n}\}$ konverguje monotónně k 0, a tedy řada $\sum \frac{2\sin(2n+1)}{3n}$ konverguje díky Větě 3.3.5(D). Podobně ověříme konvergenci řady $\sum \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n}$. Dostáváme tedy, že řada $\sum \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n}$ konverguje. Nakonec použijeme Větu 3.3.5(A) k odvození konvergence zadané řady (posloupnost $\{\operatorname{arctg}(n^2)\}$ je monotónní a omezená). ♣

KAPITOLA 4

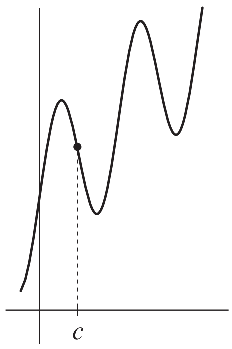
Limita a spojitost funkce

4.1. Definice a základní vlastnosti

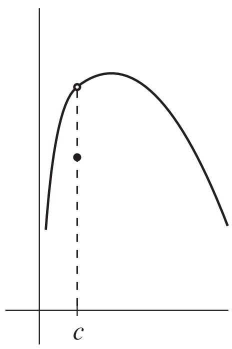
4.1.1. Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

V této kapitole budeme psát stručněji jen **funkce**. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

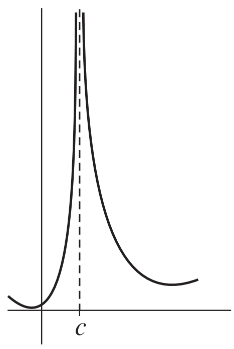
Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c. Na prvém obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c, blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c. Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c. Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázkům pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



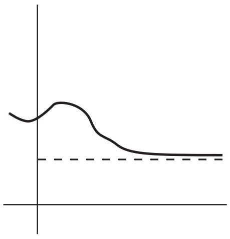
Obrázek 1.



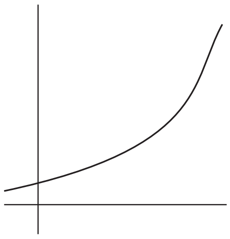
Obrázek 2.



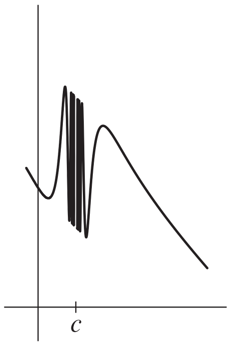
Obrázek 3.



Obrázek 4.



Obrázek 5.



Obrázek 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c. Přitom si ale nebudeme všímat funkční hodnoty v bodě c, ale pouze samotného faktu „blížení se“. Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.2. Definice. Připomeňme, že v Definici 2.3.12 jsem definovali pojem okolí pro body z $\mathbb{R}^*$. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Prstencové okolí bodu** c definujeme jako $P(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\}$.

Prstencové okolí bodu ∞ (respektive $-\infty$) definujeme takto

$$P(\infty,\varepsilon) = B(\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty),$$
$$P(-\infty,\varepsilon) = B(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}).$$

4.1.3. Poznámky. (a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c,\varepsilon_1) \subset B(c,\varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněte si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset.$$

V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{(|c_2|+2)}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \le c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{1/(|c_2|+2)} \le \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1, \varepsilon)$, $y \in B(c_2, \varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.4. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon). \tag{4.1}$$

4.1.5. Věta (jednoznačnost limity)**.** Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně existuje $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon_1) \cap B(A_2, \varepsilon_2) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.6. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

4.1.7. Poznámky. (a) Jestliže $\lim_{x \to c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c. V bodě c funkce nemusí být vůbec definována.

(b) Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \textbf{ve vlastním bodě}\text{, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}, \end{cases} \\ \textbf{v nevlastním bodě}\text{, tj. } c = \pm\infty \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

Uvědomme si, že pro $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Obdobně platí $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists L \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} \colon x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.8. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_0)$ platí $f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Nyní položíme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $x \in P(c, \delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A, \varepsilon)$. ■

4.1.9. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} x = c$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(c, \varepsilon)$ platí $x \in P(c, \delta) = P(c, \varepsilon) \subset B(c, \varepsilon)$. ■

4.1.10. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu volme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(\infty, \delta)$ platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0, \varepsilon)$. ■

4.1.11. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Důkaz. Ukážeme, že formule (4.1) je splněna pro funkci $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $c = 0$ a $A = \infty$. Zvolme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

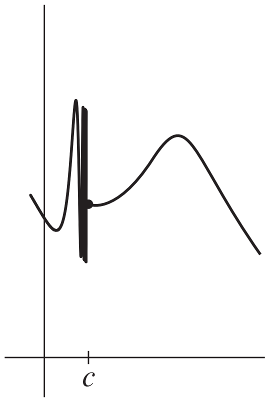
$$\forall x \in P(0, \delta) \colon \frac{1}{x^2} \in B(\infty, \varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0, \delta) \colon \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ■

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.12. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B_+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P_+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B_-(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B_+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P_-(\infty, \varepsilon) = B_-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P_+(-\infty, \varepsilon) = B_+(-\infty, \varepsilon)$.

4.1.13. Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in P_+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.14. Poznámka. Obdobně jako ve Větě 4.1.5 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \to c_-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x \to c_+} f(x)$.

4.1.15. Věta. Funkce f má limitu v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají.

Potom navíc platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

neboť $P_+(c,\delta) \subset P(c,\delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x\to c_-} f(x) = A$ dokážeme obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta_1)\colon\ f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c,\delta_2)\colon\ f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Potom $P(c,\delta) \subset P(c,\delta_1) \cup P(c,\delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $f(x) \in B(A,\varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. ■

Nyní dokážeme jednoduchý, ale užitečný princip, který je obdobou Věty 2.2.25 pro funkce. Nejprve zformulujeme pomocné tvrzení.

4.1.16. Lemma. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí ekvivalence

$$y \in B(0,\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |y| \in B(0,\varepsilon).$$

Důkaz. Nechť $y \in \mathbb{R}$. Potom $y \in B(0,\varepsilon)$ právě tehdy, když $-\varepsilon < y < \varepsilon$, což zřejmě platí právě tehdy, když $-\varepsilon < -y < \varepsilon$. Odtud a z definice absolutní hodnoty reálného čísla plyne tvrzení. ■

4.1.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu c. Potom platí:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$

právě tehdy, když

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Z definice limity plyne, že $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když platí (4.1) pro speciální volbu $A = 0$. Dle Lemmatu 4.1.16 ovšem $f(x) \in B(0,\varepsilon)$ platí právě tehdy, když $|f(x)| \in B(0,\varepsilon)$. Tedy $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta)\colon |f(x)| \in B(0,\varepsilon),$$

což podle Definice 4.1.4 znamená, že $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$. ■

4.1.18. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c_+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x\to c_-} f(x) = f(c)$).

4.1.19. Poznámka. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in B(c,\delta)\colon f(x) \in B(f(c),\varepsilon).$$

(iii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Porovnejte poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.20. Příklady. (a) Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tuto funkci nazýváme **signum** a značíme ji sign. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign} x = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign} x = -1.$$

Funkce sign je tedy v bodě 0 nespojitá.

(b) Afinní funkce $f\colon x \mapsto ax+b$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Udělejme to podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a každé $x \in (c-\delta, c+\delta)$ platí

$$f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x-c) < f(c) + a\delta.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, plyne z předchozí nerovnosti, že pro každé $x \in (c-\delta, c+\delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

4.2.1. Věta (vlastní limita a omezenost)**.** Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje $P(c,\delta)$ takové, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(A,1),$$

neboli $f(P(c,\delta)) \subset (A-1, A+1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c,\delta)$. ∎

4.2.2. Věta (aritmetika limit funkcí)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$,
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$,
(c) $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$,

pokud jsou pravé strany definovány.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

(1) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(2) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \{-\infty, \infty\}$,
(3) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(4) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$,
(5) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(6) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$.

(1) Naším cílem je dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Z definice limity plyne, že ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{|B|}{2}, B + \frac{|B|}{2})$, a tedy

$|g(x)| > \frac{|B|}{2} > 0$, takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c,\eta)$. Pro $x \in P(c,\eta)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - g(x)A| \\ &= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\ &\leq \frac{1}{|g(x)|\,|B|}(|B|\,|f(x) - A| + |A|\,|B - g(x)|) \\ &\leq M(|f(x) - A\,| + |g(x) - B|),\end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $M = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2}\right\}$. Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z předpokladů věty plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta_1):\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4.5}$$

$$\forall x \in P(c,\delta_2):\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.6}$$

Potom pro $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$ plyne platnost (4.3) z (4.4), (4.5) a (4.6).

(2) Podle Věty 4.2.1 existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, a kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \in P(c,\delta_1):\ |f(x)| < K. \tag{4.7}$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ať už předpokládáme $B = \infty$ nebo $B = -\infty$, můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_2):\ |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ díky (4.7) a (4.8) dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že pro $A \in \mathbb{R}$ a B nevlastní je limita rovna 0.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta):\ g(x) < 2B. \tag{4.9}$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1):\ f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)-(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka. ■

4.2.3. Příklad. Následující příklady demonstrují, že bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.2 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci.

Uvažujme například $f(x) = x$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -x$, ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = 0$.

Poněkud odlišný příklad je následující. Vezměme $f(x) = x \sin x$ a $g(x) = (x+1)\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, i když $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Potíž tkví v tom, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ není definován na žádném okolí ∞.

4.2.4. Poznámka. Věta 4.2.2 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.5. Věta. Nechť f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f+g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plynou okamžitě z Věty 4.2.2. ■

4.2.6. Příklad. Víme již, že funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.20(b)). Podle předcházející věty jsou tedy funkce $x^2, x^3, x^4, \dots$ spojité v každém bodě $\mathbb{R}$. Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Výraz „$\frac{A}{0}$“ není definován, nicméně platí tato věta.

4.2.7. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c,\eta)$, pak $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \infty$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{A}{2}, A + \frac{A}{2})$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{A}{2}(|L|+1))$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A/2}{A/(2(|L|+1))} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme opět $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{1/(|L|+1)} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.8. Poznámka. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to c_+} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c_+} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P_+(c, \eta)$, pak $\lim_{x \to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

4.2.9. Věta (o srovnání)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť
$$\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x).$$
Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \leq g(x).$$
Nechť existuje $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí
$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(c) (o dvou strážnících) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$
Dále předpokládejme, že
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$
Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a rovná se A.

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x \to c} f(x)$ a $B = \lim_{x \to c} g(x)$. Podle Poznámky 4.1.3(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle Poznámky 4.1.3(c) pro každé $x \in B(c, \delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Tuto část tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon\ f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c,\delta) \cap P(c,\eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \geq f(y)$, což je spor.

(c) Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in P(c,\delta_1)$ platí

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon, \qquad A-\varepsilon < g(x) < A+\varepsilon.$$

Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c,\delta)$, potom máme

$$A-\varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A+\varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ h(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to c} h(x) = A$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c,\delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty,\varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x\to c} h(x) = \infty$.

Případ $A = -\infty$ lze dokázat obdobně. ■

4.2.10. Příklad. Nechť $h(x) = x \cos x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in P(0,1),$$

a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.9(c) tedy plyne $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.11. Poznámka. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) \neq 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je různá od nuly na $B(c,\delta)$. Toto tvrzení plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme nulovou funkci.

4.2.12. Poznámka. V kapitole o posloupnostech, jsme si ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.29 a 2.3.30). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uveďme formulaci věty pro limitu rovnou ∞.

4.2.13. Věta. Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $f(x) \leq h(x)$. Dále předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se ∞.

4.2.14. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Jelikož

$$\frac{x^2+\sin x}{x} \geq \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty),$$

a

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{x} = \infty,$$

platí též z Věty 4.2.13

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty.$$

♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí tvrzení (c) z Věty 4.2.9.

4.2.15. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c,\eta)$. Potom $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = 0$.

Další věta dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.16. Věta (Heineova věta)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon x_n \in B(c,\delta).$$

Potom máme také

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in P(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \exists x \in P(a, \delta) \colon \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ∎

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uveďme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \to c-} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

4.2.18. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \exists x \in B(a, \delta) \colon \neg(f(x) \in B(f(c), \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$. Pak máme $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii). ■

Větu 4.2.16 lze často použít k důkazu neexistence limity.

4.2.19. Příklad. Ukážeme, že neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]} = A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

Věta 4.2.2 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.20. Věta (limita složené funkce)**.** Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Předpokládejme dále, že je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \neq D$,

(S) funkce f je spojitá v bodě D.

Potom platí
$$\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Předpokládejme, že je splněna podmínka (P). Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K tomuto ε existuje $\psi > 0$ takové, že
$$\forall y \in P(D,\psi)\colon f(y) \in B(A,\varepsilon),$$
neboť $\lim_{y\to D} f(y) = A$. K nalezenému ψ je možné najít $\delta' > 0$ takové, že
$$\forall x \in P(c,\delta')\colon g(x) \in B(D,\psi),$$
neboť $\lim_{x\to c} g(x) = D$. Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Pro $x \in P(c,\delta)$ platí $g(x) \in B(D,\psi) \setminus \{D\}$, neboli $g(x) \in P(D,\psi)$. Odtud dostáváme $f(g(x)) \in B(A,\varepsilon)$. Tím je důkaz věty ve verzi s podmínkou (P) proveden.

Nyní předpokládejme, že je splněna podmínka (S). Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\psi > 0$ takové, že pro každé $y \in P(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. Protože je f spojitá v bodě D, máme $f(D) = A$. Proto pro každé $y \in B(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. K číslu ψ existuje nyní $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi)$. Dohromady tedy máme, že pro $x \in P(c, \delta)$ platí $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je důkaz proveden. ■

4.2.21. Příklad. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f = |\mathrm{sign}|$, $g = 0$, $c = 0$, $D = 0$ a $A = 1$, pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.22. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty 4.2.20. ■

4.2.23. Příklad. Nechť funkce f je spojitá v bodě 0. Potom je $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$.

Řešení. Platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.10) a $\lim_{y\to 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.20 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Bez důkazu uveďme jednu z nich.

4.2.24. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $D \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c-} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D+} f(y) = A$. Dále nechť existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P_-(c, \eta)$ platí $g(x) > D$. Potom platí

$$\lim_{x\to c-} (f \circ g)(x) = A.$$

4.2.25. Věta (limita monotónní funkce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$, přičemž platí:

- Je-li f na (a, b) neklesající, pak
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \sup f((a, b)).$$
- Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a, b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro a $a \in \mathbb{R}$. Důkazy ostatních případů lze provést obdobně. Označme $m = \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima plyne, že existuje $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Z definice množiny $f((a,b))$ plyne, že $y = f(x')$ pro nějaké $x' \in (a,b)$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a,x')\colon\ f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a,b))$, je

$$\forall x \in (a,b)\colon m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Na intervalu (a,x') tedy platí:

$$\forall x \in (a,x')\colon m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (v našem případě to bylo $\delta = x' - a$) takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon\ f(x) \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon),$$

tj. $\lim_{x\to a_+} f(x) = m$. ■

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Spojitost funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.2. Věta. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon J \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá na J,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$ a $\lim x_n = c \in J$, platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J, potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.18) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J, pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvkem J, plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.3. Věta. Nechť I, J jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Nechť $f(I) \subset J$. Pak $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Použijme Větu 4.3.2. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v I konvergující k bodu $x \in I$. Dle Věty 4.3.2(ii) použité pro funkci f platí $\lim f(x_n) = f(x)$. Opětovným použití tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g, dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(x))$. Proto $\lim(g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.2. ■

4.3.4. Věta (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b];\ f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná (neboť $a \in M$) a shora omezená (číslo b je horní závora M), je tedy $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Kdyby $f(\xi) > C$, pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ.

Kdyby $f(\xi) < C$, pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M \subset [a, \xi]$, což je opět spor. ■

4.3.5. Poznámka. Věta analogicky platí v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a, b)$, v nichž je $f(\xi) = C$. Bolzanova věta o nabývání mezihodnot ale tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.6. Věta (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** Nechť J je interval. Nechť funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Ověříme, že množina $f(J)$ splňuje předpoklad Lemmatu 1.6.24. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak existují $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.4 a za ní následující poznámky musí f v jistém bodě nabývat hodnoty z, takže $z \in f(J)$. Podle Lemmatu 1.6.24 je tedy množina $f(J)$ intervalem. ■

4.3.7. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in M : f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **minima**) funkce f na množině M.

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) funkce f na množině M.

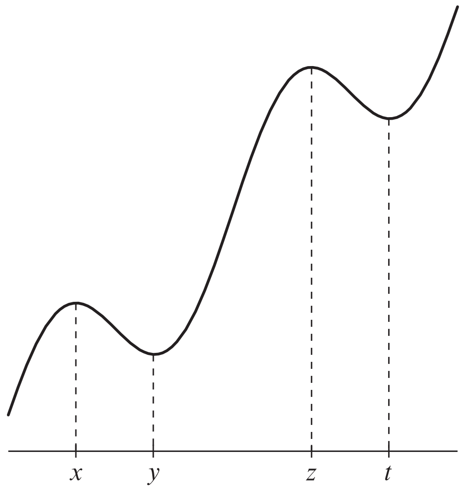
• Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x,\delta) \cap M : f(y) < f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in P(x,\delta) \cap M : f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Symbol $\max_M f$ (respektive $\min_M f$) označuje největší (respektive nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

• Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



Obrázek 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minimum.

4.3.8. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce (bez udání množiny), budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.9. Věta (existence extrémů). Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty a své nejmenší hodnoty.

Důkaz. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.31 existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ taková, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.7 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^*. Podle Věty 2.2.44 leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Podle Věty 4.2.18 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 platí

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Nechť tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak platí $g(x) \leq g(x_*)$ kdykoliv $x \in [a, b]$. To znamená, že

$f(x) \geq f(x_*)$ pro každé $x \in [a, b]$, a f nabývá svého minima na $[a, b]$ v bodě x_*. Tím je věta dokázána. ■

4.3.10. Příklad. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nenabývá na intervalu $(0, 1)$ extrému. Stejně tak funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0, 1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nemá na $[0, 1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.9 vynechat.

4.3.11. Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ maxima v bodě x^* a minima v bodě x_*. Platí tedy $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ pro každé $x \in [a, b]$, takže množina $f([a, b])$ je omezená. ■

4.3.12. Hledání extrémů funkce na nějaké množině patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.9 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že alespoň jeden bod maxima (respektive minima) existuje (za předpokladů věty). V dalším se naučíme, jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme (např. podle Věty 4.3.9), že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Na závěr tohoto oddílu se budeme zabývat vztahem spojitosti k inverznímu zobrazení. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.6). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(J) \to J$. Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **funkci inverzní**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.13. Věta (spojitost inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.6 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým koncovým bodem J, neboť f je rostoucí na J. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Zvolme $x_1 \in J \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$ a položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0,\delta)) = f^{-1}([y_0, y_0+\delta)) = [x_0, x_1) \subset B(x_0,\varepsilon) = B(f^{-1}(y_0),\varepsilon).$$

Analogicky bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým koncovým bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ∎

4.3.14. Příklad. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $\mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0,\infty)$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $[0,\infty)$.

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém $P(x,\delta)$. Definujeme pak **limes superior** a **limes inferior** funkce f v bodě x jako

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0} \sup f(P(x,\delta)),$$
$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0} \inf f(P(x,\delta)).$$

Obdobně definujeme limes superior a inferior v bodě x zleva či zprava. Platí následující tvrzení.

(a) Máme $\liminf_{y\to x} f(y) \le \limsup_{y\to x} f(y)$.

(b) Limita $\lim_{y\to x} f(y)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$. V tomto případě pak platí

$$\lim_{y\to x} f(y) = \limsup_{y\to x} f(y) \ (= \liminf_{y\to x} f(y)). \tag{4.11}$$

(c) Platí $\limsup_{y\to x}(-f(y)) = -\liminf_{y\to x} f(y)$.

Řešení. K důkazu tvrzení (a) si stačí uvědomit, že pro každá $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná platí

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovností (kde $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$)

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Dokažme nyní druhé tvrzení. Předpokládejme existenci limity $A = \lim_{y\to x} f(y)$ a označme $a = \liminf_{y\to x} f(y)$, $b = \limsup_{y\to x} f(y)$. Je-li $a < b$, pak platí

$$\forall \delta > 0\colon\ \inf f(P(x,\delta)) \le a < b \le \sup f(P(x,\delta)). \tag{4.12}$$

Zvolme $a', b' \in \mathbb{R}$ splňující $a < a' < b' < b$ a dále pak $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pro které množina $B(A,\varepsilon)$ neprotíná alespoň jeden z intervalů $(-\infty, a')$ a (b', ∞). Z definice limity existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$. Pro toto δ však platnost (4.12) znamená neprázdnost množiny

$$f(P(x,\delta)) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) \subset B(A,\varepsilon) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) = \emptyset.$$

Tento spor tedy dává $a = b$.

V důkazu obrácené implikace označme

$$A = \limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

a uvažme nejprve případ $A = \infty$. Pak pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že $\inf f(P(x,\delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$ a $\lim_{y\to x} f(y) = \infty$.

Obdobně bychom dokázali $\lim_{y\to x} f(y) = -\infty$ v případě $A = -\infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(x,\delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostáváme

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$, což dává $\lim_{y\to x} f(y) = A$.

Důkaz této implikace též ověřil platnost rovnosti (4.11).

Přistupme k důkazu tvrzení (c). To však snadno plyne z následujících identit

$$\sup\{-x;\ x \in A\} = -\inf\{x;\ x \in A\}, \quad \inf\{-x;\ x \in A\} = -\sup\{x;\ x \in A\}$$

platných pro každou neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, protože pak dostáváme

$$\begin{aligned}\limsup_{y\to x} -f(y) &= \inf_{\delta>0} \sup(-f)(P(x,\delta)) = \inf_{\delta>0} \left(-\inf f(P(x,\delta))\right)\\ &= -\sup_{\delta>0} \inf f(P(x,\delta)) = -\liminf_{y\to x} f(P(x,\delta)).\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.2. Příklad. Je-li $x \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(x,\delta)$, platí

$$\liminf_{y\to x} (f(y) + g(y)) \geq \liminf_{y\to x} f(y) + \liminf_{y\to x} g(y),$$
$$\limsup_{y\to x} (f(y) + g(y)) \leq \limsup_{y\to x} f(y) + \limsup_{y\to x} g(y),$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost, důkaz první je obdobný. Označme

$$b_1 = \limsup_{y\to x} f(y) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{y\to x} g(y).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a nechť $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b'_1, b'_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b'_1$, $b_2 < b'_2$ a $b'_1 + b'_2 < b'$. Z definice nyní existují $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná splňující

$$\sup f(P(x,\delta_1)) < b'_1 \quad \text{a} \quad \sup g(P(x,\delta_2)) < b'_2.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.6.35 dostáváme

$$\begin{aligned} \sup(f+g)(P(x,\delta)) &\leq \sup f(P(x,\delta)) + \sup g(P(x,\delta)) \\ &\leq \sup f(P(x,\delta_1)) + \sup g(P(x,\delta_2)) \\ &< b'_1 + b'_2 < b'. \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{y\to x}(f+g)(y) = \inf_{\delta>0} \sup(f+g)(P(x,\delta)) < b'.$$

Jelikož bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{y\to x}(f+g)(y) \leq b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.3. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom je množina

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je f neklesající. Má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.25. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{y\to x_-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y\to x_+} f(y),$$

a tedy

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x-} f(y) < \lim_{y\to x+} f(y)\}.$$

Pro každé $x \in D$ označme $a_x = \lim_{y\to x-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y\to x+} f(y)$. Máme-li $x, y \in D$, $x < y$, pak

$$a_x < b_x \le a_y < b_y.$$

Tedy je systém otevřených intervalů

$$\{(a_x, b_x);\ x \in D\}$$

disjunktní, a proto spočetný dle Příkladu 1.7.21. Tedy je i množina D spočetná. ♣

4.4.4. Příklad. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zjevně stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x):\ f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$M_n = \{x \in M;\ \delta_x > \frac{1}{n}\}$$

a uvědomme si, že pro různé body x, y z M_n platí

$$(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}) = \emptyset. \tag{4.13}$$

Uvažujeme-li totiž bod z v eventuálním průniku, platí pak

$$|x - y| < |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

což znamená, že

$$y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{a} \quad x \in (y - \delta_y, y + \delta_y).$$

Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je zřejmý spor. Tím je ověřena platnost (4.13).

Systém intervalů

$$\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n});\ x \in M_n\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.7.21.

Tedy i množina

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

je spočetná podle Věty 1.7.19(c). ♣

4.4.5. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém $B(x, \delta)$. Řekneme, že f má v x **odstranitelnou nespojitost**, existuje-li $\lim_{y \to x} f(y)$ a je různá od $f(x)$. Dále, f má v x **neodstranitelnou nespojitost 1. druhu**, existují-li limity v bodě x zleva i zprava a jsou různé. V případě neexistence alespoň jedné jednostranné limity říkáme, že f má v x **neodstranitelnou nespojitost 2. druhu**.

Pro reálnou funkci f pak platí, že množiny

$$\{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ odstranitelnou nespojitost}\} \quad \text{a}$$
$$\{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ neodstranitelnou nespojitost 1. druhu}\}$$

jsou spočetné.

Řešení. Podívejme se nejdříve na první množinu. Zřejmě stačí dokázat, že množina

$$O = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x} f(y) < f(x)\}$$

je spočetná. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y \to x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak $O = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} O_r$, kde

$$O_r = \{x \in O;\ r_x = r\},$$

je sjednocení spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina O_r je spočetná. Vezměme tedy pevné $r \in \mathbb{Q}$ a pro každé $x \in O_r$ zvolme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall y \in P(x, \delta_x) \colon f(y) < r.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále definujeme množiny

$$O_{r,n} = \{x \in O;\ \delta_x > \frac{1}{n}\}.$$

Pak pro $x, y \in O_{r,n}$ platí

$$(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}) = \emptyset. \tag{4.14}$$

Pokud totiž uvažujeme z vzdálené jak od x, tak od y méně než o $\frac{1}{2n}$, platí pak
$$|x-y| \le |x-z| + |z-y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} < \delta_x.$$
Tedy $f(y) < r$ díky volbě δ_x a zároveň $f(y) > r$. Tento spor tedy ukazuje platnost (4.14).

Systém intervalů $\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n};\ x \in O_{r,n}\}$ je tedy disjunktní, a proto spočetný dle Příkladu 1.7.21. Tedy je množina
$$O_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{r,n}$$
též spočetná.

Obraťme nyní naši pozornost k množině bodů neodstranitelné nespojitosti 1. druhu. Obdobně jako výše stačí zřejmě dokázat, že množina
$$N = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x_-} f(y) < \lim_{y \to x_+} f(y)\}$$
je spočetná. K tomuto účelu si pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující
$$\lim_{y \to x_-} f(y) < r_x < \lim_{y \to x_+} f(y)$$
a rozložíme N jako $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$, kde pro $r \in \mathbb{Q}$ je
$$N_r = \{x \in N;\ r_x = r\}.$$
Vezmeme nyní $r \in \mathbb{Q}$ pevné a pro každé $x \in N_r$ zvolme $\delta_x > 0$ takové, že
$$\forall y \in P_-(x, \delta_x)\colon\ f(y) < r,$$
$$\forall y \in P_+(x, \delta_x)\colon\ f(y) > r.$$
Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r$, $x < y$, pak zjevně
$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$
Tedy i
$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$
Opět je tedy systém $\{(x - \delta_x, x + \delta_x);\ x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N je spočetná. ♣

4.4.6. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Pak má funkce f v každém reálném čísle bod neodstranitelné nespojitosti 2. druhu.

Řešení. Máme-li $x \in \mathbb{R}$ dáno, v každém jeho levém či pravém okolí existuje racionální i iracionální číslo. Tedy dle definice funkce f limita zprava ani zleva v bodě x neexistuje. ♣

4.4.7. Příklad. Dokažte následující variantu Heineovy věty 4.2.17:

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Řešení. Implikace (i) $\implies$ (ii) platí dle Heineovy věty 4.2.17. Dokažme tedy obrácenou implikaci. Předpokládejme, že f je definována na nějakém okolí $P_-(c, \eta)$. Nechť $\lim_{x\to c-} f(x) \neq A$. Tedy platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P_-(c, \delta)\colon\ f(x) \notin B(A, \varepsilon). \tag{4.15}$$

Induktivně nyní zkonstruujme rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ konvergující k c takto: V prvním kroce položme $\delta_1 = \eta$. Dle (4.15) existuje $x_1 \in P_-(c, \delta_1)$ takové, že $f(x_1) \notin B(A, \varepsilon)$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ splňující $f(x_i) \notin B(A, \varepsilon)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $x_{n+1} \notin P_-(c, \delta_{n+1})$. Použitím (4.15) obdržíme $x_{n+1} \in P_-(c, \delta_{n+1})$ splňující $f(x_{n+1}) \notin B(A, \varepsilon)$. Zjevně pak platí $x_n < x_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsem tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ takovou, že $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k A, ale $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ (to platí díky tomu, že $x_n \in P_-(c, \frac{1}{n})$). Důkaz je tímto ukončen. ♣

4.4.8. Příklad. Ukažte, že nekonstantní periodická spojitá funkce má nejmenší kladnou periodu (tzv. *fundamentální periodu*). Najděte nekonstantní periodickou funkci bez fundamentální periody.

Řešení. Předpokládejme, že T_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou kladné periody funkce f konvergující k 0. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, stejně jako $\varepsilon \in (0, \infty)$. Ze spojitosti f v bodě x najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta)\colon\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Pak alespoň jedno číslo tvaru kT_{n_0}, $k \in \mathbb{Z}$, protíná interval $x - \delta, x + \delta)$. Tedy

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní.

Uvažujme nyní Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak je každé racionální číslo periodou funkce f, a tedy f nemá fundamentální periodu. ♣

4.4.9. Příklad. Sestrojte funkci $f : [0,1] \to [0,1]$ takovou, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset [0,1]$ platí $f(I) = [0,1]$.

Řešení. Každé číslo $x \in [0,1]$ si vyjádříme v desetinném rozvoji jako

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots.$$

(Pro číslo $x = 0.a_1 \dots a_n 00\dots$, kde $a_n \neq 0$, uvažujeme desetinný rozvoj tvaru $x = 0.a_1 \dots (a_n - 1)99\dots$.)

Řekneme, že x splňuje podmínku periodicity pro $n \in \mathbb{N}$, pokud číslo $0.a_1a_3a_5\dots$ je racionální a jeho desetinný rozvoj se periodicky opakuje počínaje číslem a_{2n-1}. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ nesplňuje podmínku periodicity pro žádné} n \in \mathbb{N}, \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}, & \text{pokud } x \text{ splňuje podmínku periodicity pro } n. \end{cases}$$

Ukažme, že f má požadovanou vlastnost. Nechť tedy $I \subset [0,1]$ je nedegenerovaný interval. Vezmeme $n \in \mathbb{N}$ a cifry $a_1, \dots, a_{2n-2}$ takové, že $a_{2n-3} \notin \{0,1\}$ a

$$[0.a_1a_2\dots a_{2n-2}0, 0.a_1a_2\dots a_{2n-2}1] \subset I.$$

Nechť

$$y = 0.b_1b_2b_3\dots \in [0,1]$$

je dáno. Definujme číslo $x \in I$ pomocí dalších cifer v jeho rozvoji, konkrétně

$$a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots = a_{4n-5} = 0, \quad a_{4n-3} = 1$$

a nechť další liché cifry x jsou definovány opakováním této sekvence. Na sudé pozice od $2n$ počínaje položme cifry čísla y, tj.

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\dots.$$

Pak $x \in I$, splňuje podmínku periodicity pro n, a tedy

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3\dots.$$

♣

4.4.10. Příklad. Nalezněte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která není na žádném nedegenerovaném intervalu v $\mathbb{R}$ monotónní.

Řešení. Nechť $f_1(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a nechť dále f_1 je dodefinována na $\mathbb{R}$ periodicky s periodou 1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, položíme

$$f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak je f_n 4^{-n+1}-periodická spojitá funkce na $\mathbb{R}$, jejíž maximální hodnota je $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. Nechť

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Pak f je dobře definovaná, neboť pro každé x je suma v (4.16) absolutně konvergentní. Dále je f spojitá.

Mějme totiž $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dány. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{4^{m-1}} < \varepsilon$. Dále nechť $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ je takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}\ \forall y \in B(x, \delta)\colon\ |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |f_i(x)| + |f_i(y)| \\ &\le m\frac{\varepsilon}{m} + 2 \cdot 4^{-m+1} \\ &\le 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Nyní ukážeme, že není na žádném nedegenerovaném intervalu monotónní. K tomuto účelu odvodíme následující fakt:

Je-li $a = k4^{-m}$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ a $h_m = 4^{-2m-1}$, pak

$$f(a + h_m) - f(a) > 0 \quad a \quad f(a - h_m) - f(a) > 0.$$

Máme-li totiž a a h_m jako výše, pak $f_n(a) = 0$ pro $n > m$. Dále platí

$$\forall n > 2m+1\colon\ f_n(a+h_m) = 0, \quad \forall n \in \{m+1, \dots, 2m+1\}\colon\ f_n(a+h_m) = h_m.$$

Nakonec si povšimneme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a, h \in \mathbb{R}\colon |f_n(a+h) - f_n(a)| \le |h|.$$

Dohromady proto máme

$$\begin{aligned} f(a+h_m)-f(a) &= \sum_{i=1}^{n}(f_i(a+h_m)-f_i(a)) + \sum_{i=m+1}^{2m+1} f_i(a+h_m) \\ &\geq -mh_m + (m+1)h_m \\ &= h_m > 0 \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že

$$f(a-h_m)-f(a) \geq h_m > 0.$$

Mějme nyní libovolný nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože čísla tvaru $\{k4^{-m};\ k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ protínají každý otevřený interval, lze vybrat $k \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro a a h_m jako výše máme $a, a+h_m, a-h_m \in I$. Z přecházejících výpočtů pak máme

$$f(a-h_m) > f(a), \quad f(a+h_m) > f(a).$$

Funkce f proto není monotónní na I. ♣

4.4.11. Příklad. Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Najděte neklesající funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D.

Řešení. Očíslujeme množinu D jako $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Zjevně je f dobře definovaná (pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ absolutně konvergentní) a neklesající (neboť všechny funkce f_n jsou neklesající). Ukažme, že f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Pro takovéto x a dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in B(x, \delta)$ a $n \in \{1, \dots, n_0\}$ platí

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

(všechny funkce f_n jsou spojité v x). Pak pro $y \in B(x,\delta)$ máme

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}\varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}2 \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Na druhou stranu, nechť $m \in \mathbb{N}$ je pevné. Ukážeme, že f není spojitá v x_m. Všimneme si, že funkce $\sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n$ je též neklesající, a tedy má jednostranné limity ve všech bodech $\mathbb{R}$. Proto platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(x_m)_-} f(x) &= \lim_{x\to(x_m)_-} \frac{1}{2^m} f_m(x) + \lim_{x\to(x_m)_-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x) \\ &= 0 + \lim_{x\to(x_m)_-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x) \\ &\leq \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x_m) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x_m) \\ &= f(x_m).\end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m. ♣

4.4.12. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě a. Ukažte, že funkce

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad \max\{f,g\}(x) = \max\{f(x),g(x)\} \quad \text{a}$$
$$\min\{f,g\} = \min\{f(x),g(x)\},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, jsou též spojité v a.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$, je $|f|$ spojitá v a podle Příkladů 4.2.6 a 4.3.14.

Dále platí

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{a}$$
$$\min\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2},$$

z čehož použitím první části důkazu plnou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.13. Příklad. Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce splňující $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$.
(ii) Platí $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

Řešení. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a,\eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a,\eta)$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) a Věty 4.2.2 pak dostáváme

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = A.$$

Nechť nyní $A = 0$. Pro dané $\varepsilon \in (0,\infty)$ nalezneme $\delta \in (0,\infty)$ takové, že pro $y \in P(0,\delta)$ platí $\left|\frac{\sin y}{y}\right| < 2$. Nechť $\eta \in (0,\infty)$ je takové, že pro $x \in P(a,\eta)$ platí $|f(x)| < \delta$ a $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$. Pak pro $x \in P(a,\eta)$ máme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Protože pro $x \in P(a,\eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0,\delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Ukázali jsem tedy i v tomto případě, že $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

(ii) $\implies$ (i) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$ a $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a,\eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a,\eta)$. (V opačném případě by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim x_n = a$, $f(x_n) = 0$ a $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z Věty 4.2.16 pak plyne

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{\sin f(x_n)}{x_n} = A,$$

což by byl spor.) Můžeme tedy použít Větu 4.2.20 k odvození rovnosti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right) = A.$$

Je-li $A = 0$, pro dané $\varepsilon \in (0,\infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ splňující $\left|\frac{y}{\sin y}\right| < 2$ pro $y \in P(0,\delta)$. Nechť $\eta \in (0,\infty)$ je zvoleno tak, že pro $x \in P(a,\eta)$ platí

$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < \varepsilon$ a $|f(x)| < \delta$. Pak pro $x \in P(a,\eta)$ platí, že $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\sin f(x) = 0$. Máme tedy

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases} \qquad x \in P(a,\eta).$$

Jelikož pro $x \in P(a,\eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0,\delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1. Příklad. Nechť

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Spočítejte limity

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 1} f(x).$$

Řešení. Z Příkladu 4.2.6 víme, že funkce $x^2 + 2x - 3$ i $x^2 - 1$ jsou spojité, a proto

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 2x - 3 = -3, \quad \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = -1.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\lim_{x \to 0}(x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \to 0}(x^2 - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Při výpočtu druhé limity takto postupovat nemůžeme, neboť

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 2x - 3 = 0, \quad \lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0.$$

Jelikož výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.2. Označme však

$$g(x) = \frac{x+3}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Pak

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Speciálně tedy platí, že

$$f(x) = g(x), \quad x \in P(1,2).$$

Proto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x),$$

pokud jedna strana existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí metody popsané v první část výpočtu. Tedy

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

♣

4.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Řešení. Vezměme nejprve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, pevné a vyjádřeme funkci $x^n - 2x + 1$ jako

$$\begin{aligned} x^n - 2x + 1 &= (x^n - x) - (x-1) = x(x^{n-1} - 1) - (x-1) \\ &= x(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - (x-1) \\ &= (x-1)\big(x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - 1\big). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.1 výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\big(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\big)}{(x-1)\big(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1\big)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\big(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\big)}{\big(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1\big)} \\ &= \frac{99 - 1}{49 - 1} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Řešení. Zajímá nás chování polynomů v zadané limitě pro x jdoucí do nekonečna. V čitateli i jmenovateli máme polynom 50 stupně, u něhož je v nekonečnu převládající člen x^{50}. Rozšíříme tedy zlomek v limitě výrazem $\frac{1}{x^{50}}$ a dostaneme

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}}.$$

Podle Příkladu 4.1.10 platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Tedy z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 máme

$$\lim_{x\to\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2,$$
$$\lim_{x\to\infty} 3 + \frac{2}{x} = 3,$$
$$\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2.$$

Dále je funkce $y \mapsto y^n$, $y \in \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (viz Příklad 4.2.6), a tedy máme opět z Věty 4.2.2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}.$$

♣

4.5.4. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}.$$

Řešení. Vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} &= \frac{(x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1)}{x-1}\\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \cdots + \frac{x^n-1}{x-1}.\end{aligned}$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^j-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} (x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1) = j.\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 tady máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.9.6 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.5. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2},$$
kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme jako
$$\begin{aligned}(1+mx)^n-(1+nx)^m &= \left(1+\binom{n}{1}(mx)+\binom{n}{2}(mx)^2+\cdots+\binom{n}{n}(mx)^n\right)\\ &\quad-\left(1+\binom{m}{1}(nx)+\binom{m}{2}(nx)^2+\cdots+\binom{m}{m}(nx)^m\right).\end{aligned}$$
Protože
$$\binom{n}{1}m = nm = mn = \binom{m}{1}n,$$
máme
$$\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} = \left(\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2\right)+P(x),$$
kde $P(x)$ je polynom bez absolutního členu. Z Věty 4.2.2 a Příkladu 4.2.6 tedy dostáváme
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\left(\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2\right)+P(x)\right)\\ &= \binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2+P(0)\\ &= \binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2.\end{aligned}$$
♣

4.5.6. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right),$$
kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Racionální funkci v zadané limitě upravíme na
$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} &= \frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x)^2(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\ &= \frac{m(1+\cdots+x^{n-1})-n(1+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\ &= \frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}
&m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)\\
&=m\sum_{j=1}^{n-1}(x^j-1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^j-1)\\
&=(x-1)\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Z (4.18) tedy máme

$$\begin{aligned}
&\frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{1-x}\\
&=-\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Pomocí (4.19) dostáváme z (4.17) díky Větě 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)&=\lim_{x\to1}-\frac{m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)}{(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\
&=-\frac{m\sum_{j=1}^{n-1}j-n\sum_{j=1}^{m-1}j}{mn}\\
&=-\frac{\frac12m(n-1)n-\frac12n(m-1)m}{mn}\\
&=\frac12(m-n).
\end{aligned}$$

♣

4.5.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{(x+13)-4(x+1)}{x^2-9}\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

Funkce

$$g(x)=\frac{-3}{x+3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}, \quad x\in(2,\infty),$$

je spojitá na intervalu $I=(2,\infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x\mapsto x+13$, $x\mapsto x+1$ jsou spojité na I dle Příkladu 4.2.6. Vzhledem k Příkladu 4.3.14 a Větě 4.3.3 jsou i funkce $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ spojité na I. Dále jsou funkce $x\mapsto x+3$, $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ nenulové na I, a tedy je g, jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.5.

Proto máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to3}\frac{-3}{x+3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{-3}{6}\frac{1}{\sqrt{16}+2\sqrt{4}}\\ &= \frac{-1}{16}.\end{aligned}$$

♣

4.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&\cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} \\
&= \frac{1+x-(1-x)}{1+x-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}.
\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 a Příkladu 4.3.14 máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

♣

4.5.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2},$$

Řešení. Upravme nejprve výraz v čitateli zadané funkce. Použijeme vzorec pro a^6-b^6, kde $a=\sqrt{x+2}$ a $b=\sqrt[3]{x+20}$. Označíme-li

$$g(x) = a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5,$$

pak

$$\lim_{x\to 7} g(x) = 6\cdot 3^5 \tag{4.20}$$

a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20} &= \frac{(\sqrt{x+2})^6-(\sqrt[3]{x+20})^6}{g(x)} \\
&= \frac{(x+2)^3-(x+20)^2}{g(x)} \\
&= \frac{x^3+5x^2-28x+392}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Polynom $x^3+5x^2-28x+392$ má číslo 7 za kořen, a tedy ho lze vyjádřit ve tvaru $(x-7)P(x)$, kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Standardním algoritmem Příkladu **??** dostaneme

$$x^3+5x^2-28x+392 = (x-7)(x^2+12x+56). \tag{4.21}$$

Jmenovatele $\sqrt[4]{x+9}-2$ upravíme pomocí vzorce a^4-b^4 na

$$\sqrt[4]{x+9}-2=\frac{(x+9)-2^4}{h(x)}=\frac{x-7}{h(x)},$$

kde $a=\sqrt[4]{x+9}$, $b=2$ a

$$h(x)=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Pak

$$\lim_{x\to 7} h(x)=4\cdot 2^3. \tag{4.22}$$

Kombinací (4.20), (4.21) a (4.22) dostaneme pomocí Věty 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}&=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{x-7}\\&=\frac{(7^2+12\cdot 7+56)(4\cdot 2^3)}{6\cdot 3^5}\\&=\frac{189\cdot 4\cdot 2^3}{6\cdot 3^5}.\end{aligned}$$

♣

4.5.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Řešení. Označme $a=\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}$ a $b=\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}$. Pak

$$\begin{aligned}a-b&=\frac{a^{12}-b^{12}}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}=\frac{(1+\frac{x}{3})^4-(1+\frac{x}{4})^3}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\\&=\frac{1}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{x}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k\right)\\&=\frac{1}{\sum_{j=0}^{11}a^{11-j}b^j}\left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right),\end{aligned}$$

kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Dále

$$1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\frac{1-(1-\frac{x}{2})}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Tedy

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sum_{j=0}^{11}(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}})^{11-j}(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}})^{j}}$$
$$\cdot\left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right)\cdot\frac{2\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{x}.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 a spojitosti odmocniny (Příklad 4.3.14) dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot 2\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)}{12}=\frac{1}{3}.$$

♣

4.5.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Řešení. Odhadneme, že převládající výraz čitatele i jmenovatele zadané funkce je $\sqrt{x}$. Proto provedeme úpravu

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}.$$

Nyní již snadno odvodíme pomocí Věty 4.2.2 a Příkladu 4.3.14, že

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=1.$$

♣

4.5.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Postupně upravíme výraz $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ na

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x} &= \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\\ &= \frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}\\ &= \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

♣

4.5.13. Příklad. Nechť reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}-ax-b=0.$$

Najděte a a b.

Řešení. Všimněme si, že $\lim_{x\to-\infty} x^2-x+1=\infty$, tedy je funkce $\sqrt{x^2-x+1}$ dobře definovaná na nějakém okolí $P_+(-\infty,\delta)$. Uvažujme v dalším tuto funkci na $P_+(-\infty,\delta)$. Dle předpokladu máme

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}+a+\frac{b}{x}\right)=a.$$

Jelikož $x = -\sqrt{x^2}$ pro x záporné, dostáváme

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Dále platí z předpokladu

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1} - ax = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) + b = b,$$

tedy

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-1-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}.$$

Řešení. Protože $[x] \le x < [x]+1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme odhady

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \le \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]} \le \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1} \tag{4.23}$$

platné pro každé reálné číslo $x > 1$. Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1}.$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3} = \frac{1}{2} \tag{4.24}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \tag{4.25}$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2+5}] + x}{\sqrt{x^2+1} + [3x]}, \quad x \in (1, \infty),$$

dostáváme z (4.23) nerovnosti

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Díky Větě 4.2.9(c) tak z (4.24) a (4.25) plyne

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

neexistuje.

Řešení. Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je rovno $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ konvergující k ∞, a proto z Heineovy věty 4.2.17 plyne

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ neexistuje. ♣

KAPITOLA 5

Derivace a elementární funkce

Derivace reálné funkce jedné reálné proměnné je po pojmech limity posloupnosti a limity funkce dalším klíčovým pojmem matematické analýzy, který má široké uplatnění v matematických modelech problémů přírodních věd. V této kapitole odvodíme základní vlastnosti pojmu derivace a s jejich pomocí zavedeme základní (elementární) funkce, jako jsou exponenciální funkce, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce a další. Rozšíření našich poznatků o pojem derivace nám v závěru kapitoly umožní zkoumat některé hlubší důležité vlastnosti reálných funkcí a také studovat a popsat takzvaný průběh funkce. V příkladové části kapitoly se mimo jiné vrátíme k náročnějším úlohám nalezení limity posloupnosti či funkce pomocí nově osvojených technik založených na derivaci funkce a jejích aplikacích.

5.1. Základní vlastnosti derivace

5.1.1. Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{5.1}$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce** f **v bodě** a předpisy

$$f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva a derivaci zprava často souhrnně nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

5.1.2. Poznámka. Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

5.1.3. Věta (jednoznačnost derivace)**.** Jestliže existuje derivace funkce f v bodě a (vlastní či nevlastní), pak je určena jednoznačně.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z definice derivace a Věty 4.1.5 o jednoznačnosti limity funkce. ■

Pro výpočet derivace funkce v bodě je často výhodné použít místo vzorce (5.1) jiný vzorec, který uvedeme v následující větě.

5.1.4. Věta (alternativní vzorec pro výpočet derivace)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobně platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

vždy má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(a)$. Označme

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pro h z nějakého okolí nuly a

$$g(x) = x + a$$

pro x z nějakého okolí bodu a. Potom platí

$$\lim_{h \to 0} F(h) = f'(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu a ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $x \neq a$ platí $g(x) \neq 0$. To znamená, že je splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20), a tedy podle této věty dostáváme

$$\lim_{x \to a} F(g(x)) = f'(a).$$

Protože $F(g(x)) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, plyne odtud

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Obráceně, předpokládejme, že existuje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Označme tuto limitu symbolem L. Položme

$$F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

pro x z nějakého okolí bodu a a

$$g(h) = h + a$$

pro h z nějakého okolí nuly. Potom platí

$$\lim_{h\to 0} g(h) = a \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a} F(x) = L.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu 0 ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $h \neq 0$ platí $g(h) \neq a$. Tudíž je opět splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce, a tedy

$$\lim_{h\to 0} F(g(h)) = L.$$

Protože $F(g(h)) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, plyne odtud

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L,$$

tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Tím je dokázáno tvrzení pro $f'(a)$. Tvrzení týkající se $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ lze dokázat obdobně. ■

5.1.5. Věta (vztah derivace a jednostranných derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Navíc potom platí

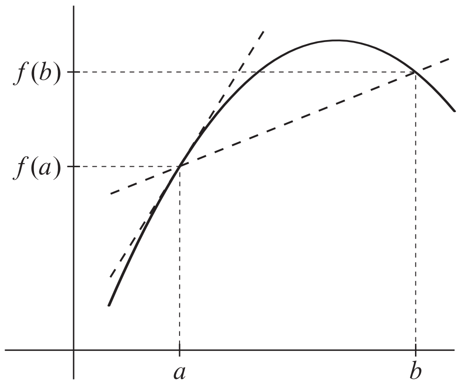
$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a).$$

Důkaz. Tvrzení plyne z definice derivace, definice jednostranných derivací a Věty 4.1.15. ■

5.1.6. Poznámky. (a) Z existence $f'(a)$ (vlastní nebo nevlastní) plyne, že existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Podobně existence $f'_+(a)$ (opět vlastní nebo nevlastní) zaručuje existenci $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňujícího $B_+(a,\delta) \subset \mathcal{D}(f)$. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva.

(b) Derivace reálné funkce v bodě je „lokální pojem“. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$.

5.1.7. Geometricky lze pojem derivace interpretovat následujícím způsobem.



Obrázek 1.

Podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnicí sečny grafu funkce, tj. přímky, která prochází body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Přibližujeme-li bod b k bodu a, pak se tato přímka přibližuje k přímce procházející bodem $[a, f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$ (pokud $f'(a)$ existuje vlastní). Díky Větě 5.1.5 je tato přímka jednoznačně určena. Nazveme ji **tečnou ke grafu funkce** f v bodě $[a, f(a)]$. Rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ za předpokladu, že existuje vlastní $f'(a)$, je tedy možné zapsat ve tvaru

$$y = f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.1.8. Poznámka. Má-li funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f' : M \to \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$, je reálnou funkcí definovanou na množině M.

5.1.9. Definice. Nechť f je reálná funkce. Potom **definičním oborem funkce** f' budeme rozumět množinu všech $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$.

5.1.10. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = 0$.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Podle Věty 5.1.4 platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

♣

5.1.11. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak podle Příkladu 1.6.5 a Věty 5.1.4 platí

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= \lim_{x\to a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.2) a ze spojitosti mocninných funkcí (Příklad 4.2.6). ♣

5.1.12. Příklad. Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že derivace funkce f v bodě 0 neexistuje, existují však jednostranné derivace funkce f v bodě 0 a platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Řešení. Podle definice jednostranných derivací máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnají, vyplývá z Věty 5.1.5, že $f'(0)$ neexistuje. ♣

Na následujícím příkladu ilustrujeme důležitý poznatek, že reálná funkce může mít derivaci v bodě, ve kterém není spojitá.

5.1.13. Příklad. Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0) = \infty$.

Řešení. Podle Věty 5.1.4 máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = \infty. \end{aligned}$$

Z Věty 5.1.5 tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$. ♣

Ukázali jsme, že existence (nevlastní) derivace funkce f v bodě a nezaručuje její spojitost v a. Jestliže však má f *vlastní* derivaci v a, pak je již v tomto bodě spojitá.

5.1.14. Věta (vztah derivace a spojitosti)**.** Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Podle Věty 5.1.4 a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0,$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní. Tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

neboli f je v bodě a spojitá. ■

5.1.15. Poznámka. Tvrzení obdobné Větě 5.1.14 platí i pro jednostranné derivace. Přesněji: existuje-li vlastní $f'_+(a)$, pak funkce f je spojitá zprava v bodě a a existuje-li vlastní $f'_-(a)$, pak funkce f je spojitá zleva v bodě a.

5.1.16. Věta (aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Pak platí

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Je-li výraz $f'(a) + g'(a)$ definován, pak podle definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) máme

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(g(a+h) - g(a)\big)\\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že je výraz $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ definován. Dále předpokládejme například, že funkce g je spojitá v bodě a. Potom

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a)) = 0.$$

Díky této rovnosti dostaneme pomocí definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big((f(a+h)-f(a))g(a+h)+f(a)(g(a+h)-g(a))\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big((f(a+h)-f(a))g(a+h)\big)+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a)(g(a+h)-g(a))\big)\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(c) Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že funkce g je na okolí $B(a,\delta)$ nenulová. Pak pro $x \in B(a,\delta)$ můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\big((f(x)-f(a))\,g(a)-f(a)\,(g(x)-g(a))\big).\end{aligned}$$

Potom podle Věty 5.1.4 dostáváme

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-\lim_{x\to a}f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit pro funkce a vztah

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

který vyplývá ze spojitosti funkce g v bodě a. ∎

5.1.17. Poznámka. Tvrzení Věty 5.1.16 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.18. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n a^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.10, 5.1.11 a Věty 5.1.16(a). ♣

Na následujících příkladech ukážeme, že předpoklady Věty 5.1.16 jsou podstatné a není možné je vynechat.

5.1.19. Příklad. Definujeme funkce f a g proměnné $x \in \mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.1.13 spočteme, že $f'(0) = \infty$ a $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f+g)'_+(0) = \infty$ a $(f+g)'_-(0) = -\infty$. Tedy podle Věty 5.1.5 $(f+g)'(0)$ neexistuje. ♣

Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f + g$ v bodě a. Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.16(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má mít smysl.

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.16(b).

5.1.20. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány stejně jako v Příkladu 5.1.19. Dokažte, že výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale přesto $(fg)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkce f a g, dostaneme

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.19 odvodíme, že derivace $(fg)'(0)$ neexistuje. Výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ však smysl má, protože

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \infty \cdot \tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \infty.$$

♣

Také ve Větě 5.1.16(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný, jak ukazuje následující příklad.

5.1.21. Příklad. Nechť $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je definována předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl, přesto ale $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

Řešení. Jest

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-g'(0)}{g^2(0)} = \frac{\infty}{\frac{1}{4}} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl. Dále

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_+(0) = -\infty$$

a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_-(0) = \infty.$$

Podle Věty 5.1.5 tedy $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.22. Věta (derivace složené funkce)**.** Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \tag{5.2}$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci derivace $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že funkce f je definována na $B(b, \sigma)$ (Poznámka 5.1.6(a)). Protože g je spojitá v a, existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$ (Definice 4.1.18). Funkce $f \circ g$ je tedy dobře definována na okolí $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že platí $g'(a) \neq 0$. Pak existuje $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0. \tag{5.3}$$

K nalezení $\tilde{\varrho}$ stačí rozlišit případy $g'(a) < 0$ a $g'(a) > 0$ a v každém z nich použít Větu 4.2.9(a). Označme

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in P(b, \sigma).$$

Nyní použijeme Větu 4.2.20(P) pro složení vnější funkce φ s vnitřní funkcí g, přičemž podmínka (P) je splněna díky (5.3). Dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} (\varphi \circ g)(x) = \lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b).$$

Pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí $g(x) \neq g(a)$, a tedy také

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Odtud podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b) g'(a). \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (5.2) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Důkaz vztahu (5.2) v tomto případě znamená dokázat rovnost

$$\lim_{x \to 0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0. \tag{5.4}$$

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky Větě 4.2.9 nalezneme $C \in \mathbb{R}, C > 0$, a $\tilde{\sigma} \in (0, \sigma)$ taková, že platí

$$\forall y \in P(b, \tilde{\sigma}) \colon \left| \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right| < C. \tag{5.5}$$

Z definice derivace nalezneme $\tilde{\varrho}_1 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}_1) \colon \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{5.6}$$

Díky spojitosti f v bodě a existuje $\tilde{\varrho}_2 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a, \tilde{\varrho}_2) \colon g(x) \in B(b, \tilde{\sigma}). \tag{5.7}$$

Položme $\tilde{\varrho} = \min\{\tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2\}$. Vezměme libovolné $x \in P(a, \tilde{\varrho})$. Pokud $g(x) = g(a)$, pak

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0.$$

Pokud $g(x) \neq g(a)$, pak díky (5.5), (5.6) a (5.7) dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a}\right| &= \left|\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}\right| \cdot \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right| \\ &< C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy ukázali, že pro $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\left|\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a}\right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.23. Poznámka. Ve Větě 5.1.22 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.14.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.22 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.24. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.13 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-\tfrac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.25. Věta (derivace inverzní funkce)**.** Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty.$$

Důkaz. (a) Předpokládejme, že funkce f je na intervalu I rostoucí. Z Věty 4.3.6 vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}\colon J \to I$ je spojitá a rostoucí. Protože a je vnitřním bodem I a f je rostoucí, je také b vnitřním bodem J. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I víme, že existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta). \tag{5.8}$$

Pak platí

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.9}$$

Protože je f^{-1} rostoucí, můžeme použít Větu 4.2.20(P) pro složení vnitřní funkce f^{-1} s vnější funkci φ a odvodit z (5.9)

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \to b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.10}$$

(a) Zde předpokládáme $f'(a) \neq 0$, takže z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a (5.10) dostáváme

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Nyní předpokládáme, že platí $f'(a) = 0$. Podle (5.10) máme

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = 0. \tag{5.11}$$

Funkce

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \quad y \in P(b, \varepsilon),$$

je na okolí $P(b,\varepsilon)$ kladná, neboť funkce f^{-1} je rostoucí na J. Věta 4.2.7 pak dává

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\lim_{y\to b}\frac{1}{\psi(y)}=\infty.$$

Pokud je funkce f klesající, pak lze tvrzení dokázat obdobně. ■

5.1.26. Příklad. Nechť $n\in\mathbb{N}$ a $g(y)=\sqrt[n]{y}$, $y\in(0,\infty)$. Dokažte, že

$$g'(b)=\frac{\sqrt[n]{b}}{nb},\quad b\in(0,\infty).$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem

$$f(x)=x^n,\quad x\in(0,\infty),$$

a označíme $I=J=(0,\infty)$. Potom $f\colon I\to J$, $g\colon J\to I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Nechť $b\in J$. Označme $a=g(b)$, neboli $a=\sqrt[n]{b}$. Pak podle Věty 5.1.25(a) a Příkladů 5.1.11 a 5.1.10 máme

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{na^{n-1}}=\frac{a}{na^n}=\frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

♣

5.1.27. Poznámka. Není těžké ověřit, že je-li $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, a $g(y)=\sqrt[n]{y}$, $y\in[0,\infty)$, pak $g'_+(0)=\infty$.

5.1.28. Příklad. Nechť $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ je liché a $g(y)=\sqrt[n]{y}$, $y\in\mathbb{R}$. Pak

$$g'(b)=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, & b\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \infty, & b=0.\end{cases}$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem

$$f(x)=x^n,\quad x\in\mathbb{R},$$

a označíme $I=J=(-\infty,\infty)$. Potom $f\colon I\to J$, $g\colon J\to I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Nechť $b\in J, b\neq 0$, a $a=g(b)$. Pak podle Věty 5.1.25(a) a Příkladů 5.1.11 a 5.1.10 dostaneme obdobně jako v Příkladu 5.1.26

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

Je-li $b=0$, pak $g'(0)=\infty$ podle Věty 5.1.25(b). ♣

5.1.29. Věta (nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a)=0$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 4.2.9(a) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro $x \in P_+(a,\delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro $x \in P_-(a,\delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém.

Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. Tím je důkaz proveden. ■

5.1.30. Poznámka. Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nabývá svého (dokonce globálního) mimima na $\mathbb{R}$ v bodě 0, ale $f'(0)$ neexistuje.

5.2. Věty o střední hodnotě

5.2.1. Věta (Rolleova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b), pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f\big([a,b]\big)$ a $M = \max f\big([a,b]\big)$. Pak

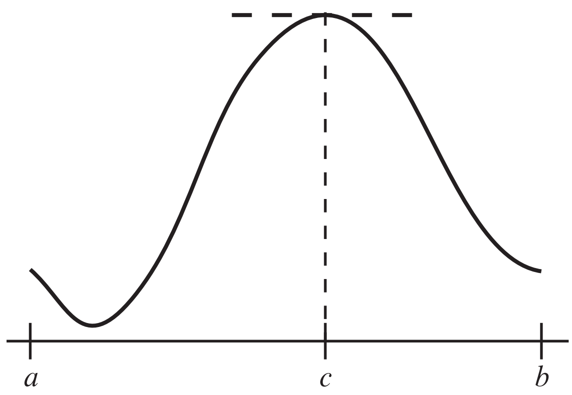
$$m \le f(a) = f(b) \le M. \tag{5.12}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a,b]$. Z Příkladu 5.1.10 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a,b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (5.12) ostrá. Nechť například platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a,b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a,b\}$, a tedy $c \in (a,b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a,b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.29 platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ■

5.2.2. Poznámka. Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.1 tak, že za předpokladů věty graf funkce f obsahuje bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s osou x.



Obrázek 2.

5.2.3. Poznámka. Ve Větě 5.2.1 nelze předpoklad o existenci derivace v bodech intervalu (a,b) vynechat. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$, která je na intervalu $[-1,1]$ spojitá, platí $f(-1) = f(1)$, ale nemá v žádném bodě intervalu $(-1,1)$ nulovou derivaci.

5.2.4. Věta (Lagrangeova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci. Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 5.2.1). Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a,b].$$

Pak g je spojitá podle Věty 4.2.5 a Příkladu 4.2.6. Přímočarý výpočet navíc dává $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a,b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a,b],$$

vlastní derivaci (Příklad 5.1.11) a funkce f derivaci, existuje podle Věty 5.1.16(a) derivace g v každém bodě intervalu (a,b). Díky Větě 5.2.1 tedy lze nalézt bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c)$ je vlastní, a $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

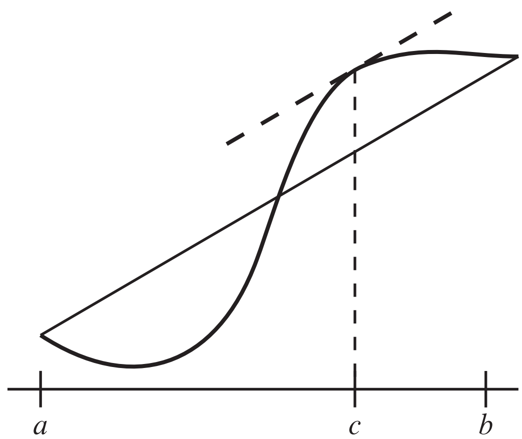
5.2.5. Poznámka. Za předpokladů Věty 5.2.4 můžeme přírůstek funkce f na intervalu $[a, b]$, který je roven $f(b) - f(a)$, vyjádřit takto:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

tedy jako součin přírůstku proměnné x a derivace v bodě c, o jehož poloze víme jen tolik, že patří do (a, b).

Uvědomme si, že ani Věta 5.2.1 ani Věta 5.2.4 neříkají nic o tom, kolik bodů c s danou vlastností existuje. Říkají pouze, že takový bod je alespoň jeden.

Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.4 tak, že za uvedených předpokladů obsahuje graf funkce f bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.



Obrázek 3.

5.2.6. Věta. Nechť I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nezápornou (respektive kladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí) na I.

Důkaz. Předpokládejme, že pro každý vnitřní bod x intervalu I platí $f'(x) \geq 0$. Nechť $a, b \in I, a < b$. Pak $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu $[a, b]$. Dle Věty 5.2.4 existuje bod $c \in (a, b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0,$$

což znamená $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající.

Případ, kdy má f kladnou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I, lze dokázat obdobně. ■

5.2.7. Poznámka. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 5.2.6 vynechat, jak uvidíme ve Větě 5.5.7, jejíž důkaz je však o něco obtížnější.

5.2.8. Poznámka. Má-li funkce f ve Větě 5.2.6 derivaci nekladnou (respektive zápornou), aplikace Věty 5.2.6 na funkci $-f$ dává, že f je nerostoucí (respektive klesající).

5.2.9. Věta. Nechť I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nulovou derivaci. Pak f je konstantní na I.

Důkaz. Podle Věty 5.2.6, jsou funkce f, $-f$ neklesající. Tedy funkce f je zároveň neklesající i nerostoucí na I, jinými slovy je konstantní. ■

5.2.10. Věta (o limitě derivací). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Důkaz. Označme $L = \lim_{x \to a+} f'(x)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f' má konečné hodnoty na $P_+(a, \delta)$ a navíc pro každé $z \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L, \varepsilon). \tag{5.13}$$

Vezměme libovolné $x \in P_+(a, \delta)$. Pak $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, x). Funkce f je spojitá na intervalu $[a, x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a, x]$ plyne z Věty 5.1.14 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 5.2.4 existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (5.13) máme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Dokázali jsme tedy $f'_+(a) = L$ a důkaz je tak hotov. ∎

5.2.11. Poznámka. Větu 5.2.10 lze zformulovat a dokázat pro derivaci zleva i pro oboustrannou derivaci.

5.2.12. Poznámka. Vynecháme-li ve Větě 5.2.10 předpoklad spojitosti, závěr přestane obecně platit. Vezmeme-li totiž do úvahy funkci $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, v bodě 0, pak $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 0 = 0$, ale $f'_+(0) = \infty$.

Stejně tak nemůžeme z neexistence limity $\lim_{x\to a+} f'(x)$ odvodit neexistenci $f'_+(a)$, viz Příklad 5.6.1.

5.2.13. Věta (Cauchyova věta)**.** Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nechť f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a nechť g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.14}$$

Důkaz. Z Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) plyne existence bodu $d \in (a, b)$ takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(b) - g(a) \neq 0$. Definujme funkci

$$\varphi(x) = \bigl(f(x) - f(a)\bigr)\bigl(g(b) - g(a)\bigr) - \bigl(g(x) - g(a)\bigr)\bigl(f(b) - f(a)\bigr), \quad x \in [a, b].$$

Pak je funkce φ podle Věty 4.2.5 spojitá na $[a, b]$ a v každém bodě intervalu (a, b) má derivaci (Věta 5.1.16), neboť funkce

$$x \mapsto \bigl(f(x) - f(a)\bigr)\bigl(g(b) - g(a)\bigr)$$

má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci a funkce

$$x \mapsto \bigl(g(x) - g(a)\bigr)\bigl(f(b) - f(a)\bigr)$$

má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Z Věty 5.2.1 tedy plyne existence bodu $c \in (a, b)$, který splňuje $\varphi'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\varphi'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big),$$

dle Věty 5.1.16, dosazením $x = c$ máme

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big),$$

odkud elementární úpravou dostáváme (5.14). ∎

5.3. Elementární funkce

Již v první kapitole jsme se zabývali elementárními funkcemi. Uvedli jsme však pouze některé jejich vlastnosti a jejich konstrukcí jsme se nezabývali. Výsledky, které jsme odvodili v předchozích oddílech, nám nyní umožní elementární funkce zkonstruovat a přesně odvodit jejich základní vlastnosti.

Některé elementární funkce budeme definovat pomocí nekonečných řad. Při odvozování jejich vlastností několikrát použijeme následující lemma.

5.3.1. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbb{R}$ (závisející na x) takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (-1, 1)$ platí

$$\big|(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1}\big| \le h^2 C^n. \tag{5.15}$$

Důkaz. Položme $C = 2(|x| + 1)$. Pokud $n = 1$, pak tvrzení triviálně platí. Z binomické věty pro $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, a $h \in (-1, 1)$ dostáváme

$$(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Využitím nerovností $|x| + 1 \ge 1$ a $|h| < 1$ obdržíme

$$\begin{aligned} |(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\le h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Podle Příkladu 1.9.5 platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Pak dostáváme

$$|(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \le h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n.$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

5.3.1. Exponenciální funkce a logaritmus.

5.3.2. Označení. V následující části textu, ale i později, budeme pracovat s nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde x i a_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla. Pro $x = 0, n = 0$, pak ale musíme uvažovat výraz $a_0 0^0$. Symbol 0^0 není obecně definován, zde však bude označovat číslo 1. Tato konvence umožňuje místo komplikovanějšího zápisu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ psát pouze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.3.3. Definice. Exponenciální funkci exp definujme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5.16}$$

5.3.4. Věta (základní vlastnosti exponenciály)**.** Funkce $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dobře definována a splňuje

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(E2) $\exp'(0) = 1$.

Důkaz. Řada (5.16) je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle Příkladu 3.9.22, a funkce exp je tedy definována na celém $\mathbb{R}$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Dokážeme nejprve, že platí $\exp'(x) = \exp(x)$. Pro každé $h \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&\exp(x + h) - \exp(x) - h\exp(x)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x + h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - h\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\\
&= 1 + (x + h) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(x + h)^n - 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - h - h\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(x + h)^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - h\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!}x^{n-1}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big((x + h)^n - x^n - hnx^{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

Podle Lemmatu 5.3.1 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ příslušné kladné C. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C^n}{n!}$ konverguje podle podílového kritéria (Věta 3.2.12). Její součet označme K. Pro každé $h \in P(0, 1)$ pak dostáváme

$$0 \le \left| \frac{\exp(x + h) - \exp(x) - h\exp(x)}{h} \right| \le \frac{1}{|h|} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C^n h^2}{n!} = K|h|.$$

Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) dostáváme

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{\exp(x+h)-\exp(x)-h\exp(x)}{h}\right| = 0,$$

a tedy také

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x).$$

Podle právě dokázaného vztahu platí

$$\exp'(0) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!} = 1,$$

čímž je ověřena vlastnost (E2).

Ověříme vlastnost (E1). Nechť $y \in \mathbb{R}$. Přímo ze vztahu (5.16) vidíme, že $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in [0,\infty)$. Funkce

$$\varphi(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}, \quad x \in [0,\infty),$$

je proto dobře definovaná. Funkce exp má v každém bodě vlastní derivaci, je tedy spojitá na $\mathbb{R}$ (Věta 5.1.14). Funkce φ je tedy spojitá na $[0,\infty)$. Pro každé $x \in (0,\infty)$ platí

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\exp^2(x)}\big(\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)\big) = 0.$$

Podle Věty 5.2.9 existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\varphi(x) = c$ pro každé $x \in (0,\infty)$. Dále máme

$$c = \lim_{x\to 0_+}\varphi(x) = \varphi(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y).$$

Platí tedy

$$\forall x \in [0,\infty)\ \forall y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{5.17}$$

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Alespoň jedno z čísel x a $-x$ je nezáporné, a proto dostáváme podle předchozího vztahu rovnost

$$1 = \exp(0) = \exp(x+(-x)) = \exp(x)\exp(-x). \tag{5.18}$$

Vezměme nyní $x \in (-\infty,0)$ a $y \in \mathbb{R}$. Pak dle (5.18) a (5.17) a máme

$$\exp(x+y) = \frac{1}{\exp(-x-y)} = \frac{1}{\exp(-x)\exp(-y)} = \exp(x)\exp(y).$$

Tím je vlastnost (E1) ověřena. ∎

5.3.5 (vlastnosti exponenciální funkce). Všechny dále uvedené vlastnosti exponenciální funkce odvodíme pouze z (E1) a (E2). To znamená, že se nebudeme odvolávat na předpis (5.16) ale pouze na (E1) a (E2). Tento přístup nám později umožní dokázat, že exponenciální funkce je již jednoznačně určena vlastnostmi (E1) a (E2).

(E3) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Počítejme

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \exp(x) \exp'(0) = \exp(x).\end{aligned}$$

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

Podle (E2) a (E3) máme $\exp(0) = \exp'(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Z (E1) a (E4) plyne $1 = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$, což dává požadovaný vztah.

(E6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Z (E5) plyne $\exp(x) \neq 0$. Dále platí $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, čímž je tvrzení dokázáno.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle (E3) má funkce exp vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Užitím Věty 5.1.14 dostáváme spojitost funkce exp na $\mathbb{R}$.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) a (E6) platí $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Aplikací Věty 5.2.6 dostáváme požadované tvrzení.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Z (E4) a (E8) plyne $\exp(1) > \exp(0) = 1$. Odtud, z (E1) a Příkladu 2.4.5 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} \bigl(\exp(1)\bigr)^n = \infty.$$

Funkce exp není tedy shora omezená. Protože je exp rostoucí dostáváme podle věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Hodnota druhé limity pak plyne pomocí (E5) a Věty 4.2.20 z rovnosti

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

(E10) Platí $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Podle (E7) je funkce exp je spojitá, a tedy podle Věty 4.3.6 je $\mathcal{H}(\exp) = \exp(\mathbb{R})$ interval. Podle (E6) pak platí $\mathcal{H}(\exp) \subset (0, \infty)$. Díky (E9) pak dostáváme $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

5.3.6. Věta. Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbb{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).

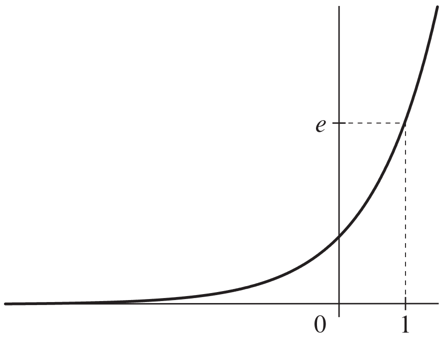
Důkaz. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $f(x + y) = f(x)f(y)$ a $g(x + y) = g(x)g(y)$ a dále $f'(0) = g'(0) = 1$. Ukážeme, že pak $f = g$.

Funkce f a g tedy splňují všechny vlastnosti (E3)–(E10), neboť k jejich odvození byly použity vlastnosti (E1) a (E2).

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tedy platí $f'(x) = f(x)$ a $g'(x) = g(x)$ podle (E3). Také platí $f(0) = g(0) = 1$ podle (E4). Podle (E6) pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \neq 0$. Pomocí Věty 5.1.16 pak dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Podle Věty 5.2.9 existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále platí $c = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$, a tedy $f = g$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen. ■



Obrázek 4. Graf exponenciální funkce

5.3.7. Poznámka. Podle Příkladu 3.8.8 platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ze vzorce (5.16) tedy plyne

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

5.3.8. Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a. V případě $a = e$ píšeme pouze log místo $\log_e$.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

(e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0,\infty)$.

5.3.9 (vlastnosti přirozeného logaritmu)**.**

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0,\infty)$.

Platí $\mathcal{D}(\log) = \mathcal{H}(\exp)$, a proto tvrzení plyne z (E10).

(L2) Platí $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$.

Tvrzení plyne z faktu $\mathcal{H}(\log) = \mathcal{D}(\exp)$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

Funkce exp je rostoucí, a proto je podle Věty 4.3.13 rostoucí i funkce log.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

Spojitost plyne z věty o spojitosti inverzní funkce (Věta 4.3.13).

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Vezměme $x, y \in (0, \infty)$ a označme $a = \log x$ a $b = \log y$. Pak

$$xy = \exp(a)\exp(b) = \exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)),$$

a tedy $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Pro příslušná a, b platí podle definice obecné mocniny

$$\log a^b = \log\bigl(\exp(b \log a)\bigr) = b \log a.$$

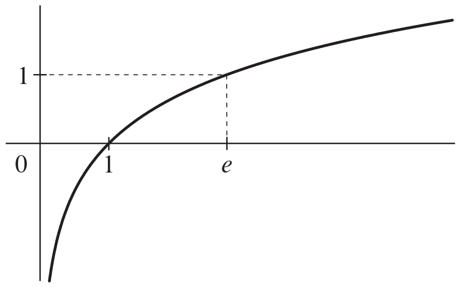
(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'x = \frac{1}{x}$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.25(a)) a (E3) platí pro $x \in (0, \infty)$ vztah

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L8) Platí $\lim_{x\to 0_+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Podle (L3) je funkce log rostoucí, takže z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25) plyne $\lim_{x\to 0_+} \log x = \inf \mathcal{H}(\log)$ a $\lim_{x\to\infty} \log x = \sup \mathcal{H}(\log)$. Z (L2) pak vyplývá naše tvrzení.



Obrázek 5. Graf funkce logaritmus

5.3.10. Poznámky. (a) V Definici 5.3.8(c) jsme provedli rozšíření výrazu a^b na všechny reálné exponenty b za předpokladu, že základ a je větší než 0. Doposud jsme měli korektně definován výraz a^b, $a > 0$, pouze pro případ, kdy b bylo číslo racionální. Nová definice dává podle vlastnosti (L6) v tomto případě totéž, a je tedy rozšířením definice původní. Místo $\exp(x)$ často píšeme e^x, neboť podle definice obecné mocniny jsou si tyto výrazy rovny. Výraz a^b máme tedy definován v těchto případech:

- $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$ libovolné,
- $a \in \mathbb{R}$ libovolné a $b \in \mathbb{N}$,
- $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$.

(b) Nechť f a g jsou reálné funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, přičemž $f : M \to (0, \infty)$. Potom symbolem $f(x)^{g(x)}$ budeme označovat funkci definovanou na množině M předpisem $x \mapsto \exp(g(x) \log f(x))$.

5.3.2. Goniometrické funkce.

5.3.11. Definice. Funkci **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.19}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

5.3.12. Věta (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,

(G4) existuje kladné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Důkaz. Podle Příkladu 3.9.23 obě řady konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce sin a cos jsou tedy dobře definovány.

Nejprve dokážeme, že platí
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin'(x) = \cos(x). \tag{5.21}$$
Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in \mathbb{R}$ platí
$$\begin{aligned}
&\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right).
\end{aligned} \tag{5.22}$$
Podle Lemmatu 5.3.1 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ kladné C takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}, |h| < 1$, platí
$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \le C^{2n+1}h^2. \tag{5.23}$$
Odtud a z (5.22) dostáváme, že pro každé $h \in P(0,1)$ platí
$$\begin{aligned}
|\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2\\
&= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big) h^2.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje podle podílového kritéria. Odtud pak plyne
$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)}{h} \right| = 0,$$
neboli
$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Zcela analogicky lze odvodit vztah

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos'(x) = -\sin(x). \tag{5.25}$$

Ověříme vlastnosti (G1)-(G5).

(G1)-(G2) Vezměme $a \in \mathbb{R}$ pevné a pro $x \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned}\psi(x) = \big(&\sin(x+a) - \sin(x)\cos(a) - \sin(a)\cos(x)\big)^2 \\ &+ \big(\cos(x+a) - \cos(x)\cos(a) + \sin(a)\sin(x)\big)^2.\end{aligned}$$

Přímočarý výpočet spolu s (5.21) a (5.25) dává, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\psi'(x) = 0$. Protože

$$\psi(0) = (\sin(a) - \sin(a))^2 + (\cos(a) - \cos(a))^2 = 0,$$

dostáváme $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy také dokazované vztahy z (G1).

(G3) Ze vztahu (5.19) plyne, že funkce sin je lichá. Podobně z (5.20) plyne, že funkce cos je sudá.

(G4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\Big).$$

Pokud $x \in (0,2)$, potom jsou členy předchozí řady kladné a platí $\sin(x) > 0$. Podle Věty 5.2.6 a (5.25) je funkce cos klesající na intervalu $(0,2)$. Ze vztahu

$$\cos(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\Big)$$

plyne

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!}\Big(1 - \frac{2^2}{3\cdot 4}\Big) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Existuje tedy právě jedno $\alpha \in (0,2)$ takové, že $\cos(\alpha) = 0$ (Věta 4.3.4). Tedy funkce cos je na intervalu $(0,\alpha)$ kladná. Odtud a z (5.21) plyne, že funkce sin je rostoucí na $[0,\alpha]$ (Věta 5.2.6). Položme nyní $\pi = 2\alpha$. Podle (G1) a (G2) platí

$$1 = \cos(0) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\big) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\cos\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) - \sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\sin\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = 0 + \sin^2\big(\tfrac{\pi}{2}\big),$$

a tedy $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Poněvadž $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) > 0$, platí $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$. Podle (5.19) snadno ověříme $\sin 0 = 0$. Tím jsou vlastnosti popsané v (G4) ověřeny.

(G5) Podle (5.20) máme $\cos(0) = 1$, a tedy podle (5.21) platí $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

5.3.13 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)**.** K odvození vlastností funkcí sinus a kosinus použijeme pouze vlastnosti (G1)–(G5).

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Z (G1) a (G4) dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 0\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(0) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\sin(0) \\ &= 1 \cdot \cos(0) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = \cos(0). \end{aligned}$$

(G7) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z (G2) a (G3) máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

(G8) Platí $\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Tvrzení plyne z (G4) a (G7).

(G9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Podle (G1), (G2), (G4) a (G8) platí

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(x). \end{aligned}$$

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle (G9) platí $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$ a $\cos(x + 2\pi) = -\cos(x + \pi) = \cos(x)$.

(G11) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Spočteme nejprve dvě limity, které budeme potřebovat při odvození derivace funkce sin. Podle (G5) platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Podle vztahu (G2) platí pro každé $h \in \mathbb{R}$ rovnost $\cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Podle (G7) pak obdržíme vztah $\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Tento vztah použijeme v následujícím výpočtu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h^2}h + \lim_{h\to 0}\cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\cdot\frac{-1}{2}\cdot 0 + \cos(x)\cdot\sin'(0) = \cos(x).
\end{aligned}$$

(G12) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle (G1) a (G8) vztah $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme podle věty o derivaci složené funkce

$$\cos'(x) = \Big(\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\Big)' = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin(x).$$

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Funkce sin a cos mají v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, a tedy jsou podle Věty 5.1.14 v x spojité.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce sin je 2π-periodická podle (G10). Stačí tedy určit nulové body v intervalu $[0, 2\pi)$. Podle (G4) platí, že $\sin(0) = 0$ a funkce sin je kladná na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Odtud a podle (G12) je cos klesající na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky vztahu $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ dostáváme, že funkce cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ kladná. Ze vztahů $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ a $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ dostáváme, že funkce sin je nulová v intervalu $[0, 2\pi)$ právě v bodech 0 a π.

(G15) Platí $\cos(x) = 0$, právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení plyne z (G14) a vztahu $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

5.3.14. Věta. Trojice $(\sin, \cos, \pi)$ je vlastnostmi (G1)-(G5) určena jednoznačně.

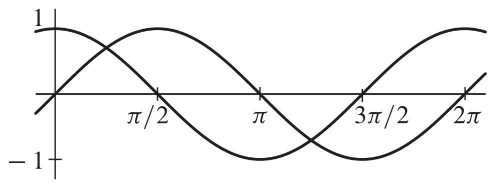
Důkaz. Předpokládejme, že trojice $(\sin^*, \cos^*, \pi^*)$ splňuje vlastnosti (G1)-(G5). Položme

$$\varphi(x) = (\sin(x) - \sin^*(x))^2 + (\cos(x) - \cos^*(x))^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\big(\sin(x) - \sin^*(x)\big) \cdot \big(\cos(x) - \cos^*(x)\big) \\ &\quad + 2\big(\cos(x) - \cos^*(x)\big) \cdot \big(-\sin(x) + \cos^*(x)\big) = 0.\end{aligned}$$

Tedy je dle Věty 5.2.9 funkce φ konstantní na $\mathbb{R}$. V bodě 0 je však nulová, a tedy je nulová všude. Proto je $\sin = \sin^*$ a $\cos = \cos^*$. Odtud a díky (G4) platí $\pi = \pi^*$ a důkaz je hotov. ∎



Obrázek 6. Grafy funkcí sinus a kosinus

5.3.15. Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, &\qquad x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},\\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, &\qquad x &\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

5.3.16. Poznámka. Vzhledem k tomu, že již bylo zavedeno číslo π a obecná mocnina, máme zavedeno také reálné číslo π^π, o němž jsme se zmínili v **??**.

Vlastnosti funkce tangens.

(G14) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Plyne z (G13) pomocí Věty 4.2.5.

(G15) Funkce tg je lichá.

Plyne z (G3).

(G16) Funkce tg je π-periodická.

Je-li $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$, pak také $x + \pi \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ a $x - \pi \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ podle (G15). Pro $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ pak máme podle (G9)

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \mathrm{tg}(x).$$

(G17) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

Pro $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ platí podle věty o derivaci podílu (Věta 5.1.16(c))

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

(G18) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce cos je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kladná, a tedy je derivace funkce tg na tomto intervalu kladná. Z Věty 5.2.6 pak plyne, že funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G19) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G20) Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \mathrm{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \mathrm{tg}(x) = -\infty$.

Tvrzení plyne z poznámky za Větou 4.2.7 a vlastností funkcí sinus a kosinus.

(G21) Platí $\mathcal{H}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce tg je spojitá na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval opět na interval (Věta 4.3.6), který podle předchozího tvrzení není omezený ani shora ani zdola. Musí tedy být $\mathrm{tg}\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big) = \mathbb{R}$, čímž je tvrzení dokázáno.

Vlastnosti funkce kotangens. Při důkazu následujících vlastností lze postupovat stejně jako v případě funkce tangens, a proto odvození již uvádět nebudeme.

(G21) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G22) Funkce cotg je lichá.

(G23) Funkce cotg je periodická s periodou π.

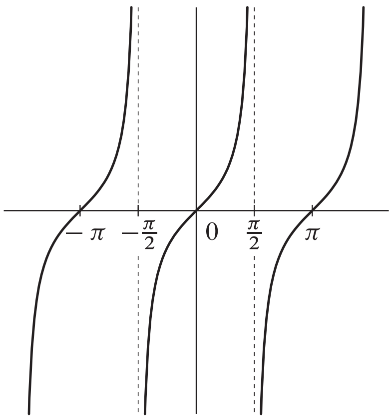
(G24) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G25) Platí $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

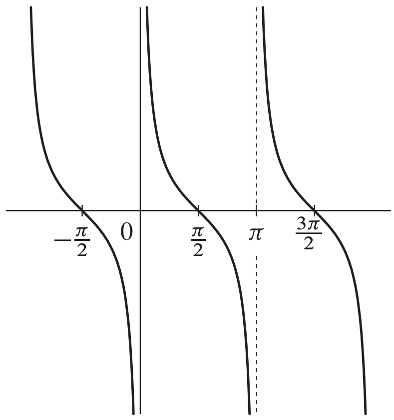
(G26) Platí $\lim_{x\to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G27) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(G28) Platí $\mathscr{H}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.



Obr. 7. Graf funkce tangens



Obr. 8. Graf funkce kotangens

5.3.3. Cyklometrické funkce.

5.3.17. Definice. Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1},\\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},\\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},\\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

5.3.18 (vlastnosti cyklometrických funkcí)**.**

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1,1]$ a $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1,1]$ a $\mathcal{H}(\arccos) = [0,\pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1,1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1,1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\begin{aligned}\arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2}, & \arccos(-1) &= \pi,\\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2}, & \arccos 1 &= 0,\\ \arcsin 0 &= 0, & \arccos 0 &= \frac{\pi}{2},\\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}, & \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(C6) Platí $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Funkce arcsin je prostá, a proto $\arcsin x \neq 0$ pro každé $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Užitím Věty 4.2.20(P) a vlastnosti funkce sinus dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1.$$

Odtud po algebraické úpravě plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

Dokazovaný vztah nyní plyne z Věty 4.2.2(c) o limitě podílu.

(C7) Pro každé $y \in (-1,1)$ platí $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pro dané $y \in (-1,1)$ nalezneme $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ splňující $\sin(x) = y$. Podle Věty 5.1.25 platí

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

V bodě 1 počítejme dle Věty 5.2.10

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{y\to 1_-} \arcsin'(y) = \lim_{y\to 1_-} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \infty.$$

Obdobně odvodíme $\arcsin'_+(-1) = \infty$.

(C9) Pro každé $x \in [-1,1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Vezměme libovolné $x \in [-1,1]$ a označme $y = \arcsin x$. Potom platí $x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$. Protože $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, je $\frac{\pi}{2} - y \in [0,\pi]$, a tedy $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, odkud již plyne dokazovaná rovnost.

(C10) Pro každé $y \in (-1,1)$ platí $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C11) Platí $\mathscr{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ a $\mathscr{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbb{R}$.

(C13) Platí $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C15) Platí $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\mathrm{arccotg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\mathrm{arccotg}) = (0, \pi)$.

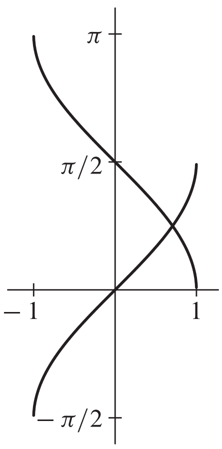
(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na $\mathbb{R}$.

(C19) Platí $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arccotg}(x) = \pi$.

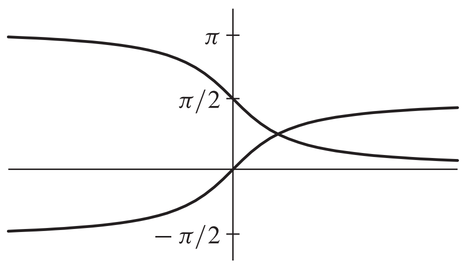
(C20) Platí $\mathrm{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\mathrm{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$.

(C22) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.



Obrázek 9. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



Obrázek 10. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

5.4. l'Hospitalovo pravidlo

5.4.1. Věta (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo
(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.4.2. Poznámka. Věta 5.4.1 platí i pro limity zleva a oboustranné limity.

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.26}$$

Dokažme nejprve následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení.

(i) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje $\alpha > L$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \ \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(ii) Jestliže $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$, pak existuje $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta') : \ \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení. (i) Zvolme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity v (5.26) nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \delta_1)$, f zde má vlastní derivaci, g zde má vlastní nenulovou derivaci a platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \ \frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{5.27}$$

Vezměme nyní libovolná $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na f a g na intervalu $[x, y]$ existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.28}$$

Pro každé $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$, tedy podle (5.27) a (5.28) platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r. \tag{5.29}$$

Předpokládejme, že platí podmínka (a). Potom pro pevné $y \in P_+(a,\delta_1)$ dostaneme podle (5.29)

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha.$$

Stačí položit $\delta = \delta_1$ a za předpokladu platnosti podmínky (a) je pomocné tvrzení dokázáno.

Předpokládejme nyní, že platí podmínka (b). Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a,\delta_1)$. Potom platí

$$\lim_{x\to a+} r\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r + 0 = r < \alpha. \tag{5.30}$$

Existuje tedy $\delta_2 \in (0,\delta_1)$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta_2): \ r\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \tag{5.31}$$

Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby platilo

$$\forall x \in P_+(a,\delta_2): \ \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1. \tag{5.32}$$

Nechť $x \in P_+(a,\delta_2)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x)-g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \end{aligned} \tag{5.33}$$

S pomocí (5.31), (5.32) a (5.33) odhadneme

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &< r\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \end{aligned}$$

Položíme $\delta = \delta_2$ a pomocné tvrzení je dokázáno i za předpokladu platnosti podmínky (b).

(ii) Podle (5.26) platí $\lim_{x\to a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = -L$. Předpokládejme, že $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$. Potom platí $-\beta > -L$. Již dokázanou část (i) použijeme pro

$\alpha = -\beta$ a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{-f(x)}{g(x)} < -\beta.$$

Nyní stačí položit $\delta' = \delta$ a tvrzení je dokázáno. ■

Důkaz věty lze nyní již snadno dokončit. Pokud $L = -\infty$, respektive $L = \infty$, tvrzení věty plyne okamžitě z (i), respektive z (ii). Nechť $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Použijeme (i) pro $\alpha = L + \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Dále použijeme (ii) pro $\beta = L - \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$. Pro každé $x \in P_+(a, \min\{\delta, \delta'\})$ dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = B(L, \varepsilon),$$

což dokazuje naši větu. ■

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.34}$$

Rozlišíme několik případů a pro každý z nich provedeme důkaz zvlášť.

Případ číslo 1. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$ a je splněna podmínka (a).

Díky předpokladu existence limity v (5.34) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Definujme funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P_+(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in P_+(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Pak $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, a + \tilde{\delta})$, neboť v bodech z $(a, a + \tilde{\delta})$ plyne spojitost z Věty 5.1.14 a spojitost zprava v bodě a plyne z podmínky (a).

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Z definice limity nalezneme $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in B(L, \varepsilon).$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_+(a, \delta)$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ na intervalu $[a, x]$ existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}.$$

Protože

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

a výraz na levé straně je dobře definován dle Věty 5.2.13, má i výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ smysl. Jelikož $c_x \in P_+(a,\delta)$, dostáváme dále

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)}=\frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}\in B(L,\varepsilon).$$

Tedy platí $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Případ číslo 2. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L \in \mathbb{R}$.

Mějme dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Díky předpokladu existence limity v (5.34) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a,\tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a,\tilde{\delta})$ nenulová. Díky (5.34) a předpokladu $L \in \mathbb{R}$ nalezneme $\delta_1 \in (0,\tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta_1): \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon. \tag{5.35}$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a,\delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a,\delta_2): \left|\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right|<\varepsilon \ \& \ \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right|<\varepsilon. \tag{5.36}$$

Nechť $x \in P_+(a,\delta_2)$. Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x,\tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x,\tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{5.37}$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)}+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\\&=\frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\cdot\frac{g(x)-g(\tilde{y})}{g(x)}+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\\&=\frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\Big(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big)+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Použijeme (5.37) a vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned}$$

Pomocí vztahů $\varepsilon \in (0,1)$, (5.35), (5.36) a trojúhelníkové nerovnosti můžeme nyní odhadnout

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - L\Big| &\le \Big|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\Big| + \Big|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big| + \Big|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\Big| \\ &< \varepsilon + (|L| + \varepsilon)\cdot\varepsilon + \varepsilon = (|L| + 2 + \varepsilon)\varepsilon < (|L| + 3)\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz rovnosti $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Případ číslo 3. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = \infty$.

Mějme dáno $K \in \mathbb{R}, K > 0$. Díky předpokladu existence limity v (5.34) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a,\tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a,\tilde{\delta})$ nenulová. Podle předpokladu $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ nalezneme $\delta_1 \in (0,\tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta_1) : \ \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K. \tag{5.39}$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a,\delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0, \tilde{y} - a)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a,\delta_2) : \ \Big|\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big| < \frac{1}{4} \ \& \ \Big|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\Big| < \frac{K}{2}. \tag{5.40}$$

Nechť $x \in P_+(a,\delta_2)$. Potom $x < \tilde{y}$. Použijeme Cauchyovu větu (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x,\tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x,\tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{5.41}$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})}\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Díky (5.41) a (5.42) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right)+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\cdot\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\end{aligned}\tag{5.43}$$

Odtud pomocí (5.39) a (5.40) plyne

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2K - 2K\cdot\frac{1}{4}-\frac{K}{2} = K.$$

Tím je důkaz vztahu $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Případ číslo 4. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = -\infty$.

Výsledek z předchozího případu aplikujeme na dvojici funkcí $-f$ a g a obdržíme

$$\lim_{x\to a+}\frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{-f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Platí tedy také

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Případ číslo 5. Předpokládejme, že $a = -\infty$ a je splněna podmínka (a) nebo podmínka (b).

Funkce f a g jsou definovány na jistém okolí bodu $-\infty$. Proto jsou na jistém pravém okolí bodu 0 funkce F a G dobře definovány předpisem

$$F(x) = f\left(-\tfrac{1}{x}\right), \qquad G(x) = g\left(-\tfrac{1}{x}\right).$$

Pak z Věty 4.2.20 dostáváme $\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} G(x) = 0$, pokud je splněna podmínka (a), a $\lim_{x\to 0+} |G(x)| = \infty$, pokud je splněna podmínka (b). Dále platí

$$\lim_{x\to 0+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2}}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to-\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)} = L.$$

Nyní aplikujeme již dokázanou část l'Hospitalova pravidla na dvojici funkcí F a G v bodě 0 a dostaneme

$$\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

což opětovným použitím Věty 4.2.20 dává

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f\left(-\frac{1}{y}\right)}{g\left(-\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = L.$$

■

5.4.3. Příklad. Platí, že $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x-\sin(x))' = 1-\cos(x)$, $(x-\sin(x))'' = \sin(x)$ a $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$. Protože $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$, dostáváme použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Dalším použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

♣

5.4.4. Příklad. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, platí vztahy $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$ a $\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^\alpha = 0$.

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo 5.4.1(b) a dostaneme

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Pro výpočet druhé limity nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\alpha < n$. Pak n-násobné užití Věty 5.4.1(b) dává

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Protože $0 \le e^{-x} x^\alpha \le e^{-x} x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \ge 1$, platí $\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^\alpha = 0$ dle Věty 4.2.9(c). ♣

5.4.5. Poznámka. Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například platí

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+\cos(x)}$$

neexistuje, neboť funkce $x \mapsto \frac{2x}{1+\cos(x)}$ není definována na žádném okolí bodu $-\infty$.

5.4.6. Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

5.4.7. Poznámka. Uvažujme

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \tag{5.44}$$

neexistuje. Na druhou stranu, počítáme-li pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 5.4.1), dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)e^{\sin(x)} + f(x)e^{\sin(x)}\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}(\cos(x) + f(x))} = 0,\end{aligned} \tag{5.45}$$

což nesouhlasí s (5.44). Chybné použití l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výraz $\frac{f'}{g'}$ není definovaný na žádném okolí ∞, tj. $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ z definice neexistuje. Druhá rovnost ve výpočtu (5.45) je tedy chybná.

5.5. Monotónní a konvexní funkce

5.5.1. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **rostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a,\delta)$ a $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a,\delta)$,
- **klesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a,\delta)$ a $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a,\delta)$,

- **neklesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_{-}(a, \delta)$ a $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_{+}(a, \delta)$,
- **nerostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_{-}(a, \delta)$ a $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_{+}(a, \delta)$.

Podobně definujeme, že funkce f je **rostoucí v** a **zprava** apod.

5.5.2. Poznámka. Je-li funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ rostoucí na intervalu I, pak je zřejmě rostoucí v každém vnitřním bodě intervalu I a rostoucí zprava či zleva v eventuálních krajních bodech intervalu I.

5.5.3. Věta. Má-li reálná funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ kladnou (respektive zápornou) derivaci zprava, pak je v tomto bodě rostoucí (respektive klesající) zprava.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'_{+}(a) > 0$, tj. $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Dle Věty 4.2.9(i) existuje takové $\delta > 0$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \quad x \in P_{+}(a, \delta).$$

Pak zřejmě platí $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_{+}(a, \delta)$, tj. f je rostoucí zprava v a.

Obdobně lze dokázat tvrzení i v případě $f'_{+}(a) < 0$. ∎

5.5.4. Poznámka. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva a oboustrannou derivaci.

5.5.5. Poznámka. Je-li reálná funkce g rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že g je monotónní na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$. Stačí vzít $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 5.6.2, a položit $a = 0$. Potom $g'(x) = 1 + f'(x)$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále $g'(0) = 1$, a tedy g je rostoucí v 0. Funkce f' není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0, a proto v každém okolí bodu 0 funkce g' nabývá kladných i záporných hodnot. Předpokládejme nejprve, že g je neklesající na jistém okolí $B(0, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom pro každé $x, y \in B(0, \delta)$, $x \neq y$, platí

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 0.$$

Díky větě o srovnání (Věta 4.2.9(b)) dostáváme, že $g'(y) \geq 0$ pro každé $y \in B(0, \delta)$, což je spor. Obdobný spor obdržíme, pokud předpokládáme, že g je nerostoucí na jistém okolí bodu 0.

5.5.6. Věta. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ roste (respektive neklesá) v každém bodě intervalu I (v případných krajních bodech I uvažujeme příslušné jednostranné varianty). Pak f roste (respektive neklesá) na I.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu I, a uvažujme libovolné body $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme $M = \{c \in (a, b];\ f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená množina, neboť b je horní závorou M. Funkce f je rostoucí zprava v bodě a, a proto existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta_1)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$, takové, že $f(x) < f(s)$ pro všechna $x \in P_-(s, \delta_2)$. Z definice suprema existuje $t_1 \in M \cap P_-(s, \delta_2)$, pro které tedy platí $f(a) < f(t_1) < f(s)$. Proto dostáváme $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Kdyby totiž platilo $s < b$, nalezli bychom $\delta_3 \in \mathbb{R}, \delta_3 > 0$, takové, že $f(x) > f(s)$ pro všechna $x \in P_+(s, \delta_3)$. Pak tedy libovolné $t_2 \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(t_2)$, což znamená $t_2 \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána, a tedy díky $s \in M$ máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je důkaz nerovnosti $f(a) < f(b)$ proveden.

Předpokládejme nyní, že f je neklesající v každém bodě I. Mějme dány body $a < b$ z intervalu I a zvolme pevné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Funkce $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, $x \in I$, je rostoucí v každém bodě I, tedy dle první části důkazu platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ■

5.5.7. Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci (v případných krajních bodech I uvažujeme jednostranné derivace). Pak f roste (respektive neklesá, klesá, neroste) na I.

Důkaz. Má-li funkce v každém bodě intervalu I kladnou derivaci, je v každém bodě I rostoucí podle Věty 5.5.3. Z Věty 5.5.6 pak plyne, že f je rostoucí na I.

Ostatní případy jsou obdobné. ■

5.5.8. Definice. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in (0, 1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **konkávní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in (0, 1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konvexní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0, 1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konkávní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

5.5.9. Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť $f : I \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) f je konvexní na I,

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3: \ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3: \ \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3: \ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Položme $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Pak platí $\lambda \in (0,1)$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Označme $c = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$. Přímočarým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2}. \tag{5.46}$$

Pokud platí $f(x_2) \leq c$, pak pomocí (5.46) dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.47}$$

Pokud platí jedna z nerovností v (5.47) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pak podle (5.46) platí nerovnost $f(x_2) \leq c$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (5.46) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. ■

5.5.10. Věta (vztah konvexity a existence jednostranných derivací)**.** Nechť f je funkce konvexní na intervalu I a nechť $a \in \operatorname{Int} I$. Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Navíc platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.

Důkaz. Nechť $a \in \operatorname{Int} I$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňující $B(a,\delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad x \in P_+(a,\delta), \\ \psi(y) &= \frac{f(y)-f(a)}{y-a}, \quad y \in P_-(a,\delta). \end{aligned}$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P_+(a,\delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z Lemmatu 5.5.9

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \leq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2)-f(a)}{y_2-a} \leq \frac{f(y_1)-f(a)}{y_1-a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a,\delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a,\delta)$. Z Lemmatu 5.5.9 dále pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ a $y \in P_-(a,\delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \varphi(x). \tag{5.48}$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a,\delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a,\delta)$.

Z Věty 4.2.25 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a_+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y\to a_-} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \lim_{y\to a_-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (5.48) a Věty 4.2.25 plyne pro každé $x \in P_+(a,\delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y\to a_-} \psi(y) \leq \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 4.2.25 dostáváme

$$f'_-(a) \leq \lim_{x\to a_+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.5.11. Poznámky. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \operatorname{Int} I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $x = 0$.

(b) Podobně jako v důkazu Věty 5.5.10 lze odvodit existenci jednostranných derivací konvexní funkce v krajních bodech definičního intervalu. Tyto derivace ale mohou být nevlastní, např. funkce sign uvažovaná na intervalu $[-1, 0]$.

5.5.12. Věta (vztah konvexity a spojitosti)**.** Konvexní funkce na intervalu je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.

Důkaz. Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ konvexní na intervalu I a $a \in \operatorname{Int} I$, pak obě jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ existují vlastní. Podle Věty 5.1.14 a Poznámky 5.1.15, f je spojitá zleva i zprava v a, tedy je spojitá v a. ■

5.5.13. Poznámka. Funkce sign, která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I, na němž je funkce f definována.

5.5.14. Věta (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\operatorname{Int} I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Důkaz. Předpokládejme, že f' je rostoucí funkce na $\operatorname{Int} I$, kde $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Vezměme libovolné body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I. Díky Lagrangeově větě 5.2.4 existují body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z předpokladu tedy obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle Lemmatu 5.5.9 je tedy f ryze konvexní.

Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$ (Věta 5.5.7), a tedy f je ryze konvexní díky první části důkazu. ■

5.5.15. Poznámka. Obdobná tvrzení platí pro konvexitu, ryzí konkávnost a konkávnost.

Připomeňme, že pokud $f'(a)$ existuje vlastní, pak tečnu ke grafu funkce f v bodě a definujeme jako lineární funkci $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$, $x \in \mathbb{R}$.

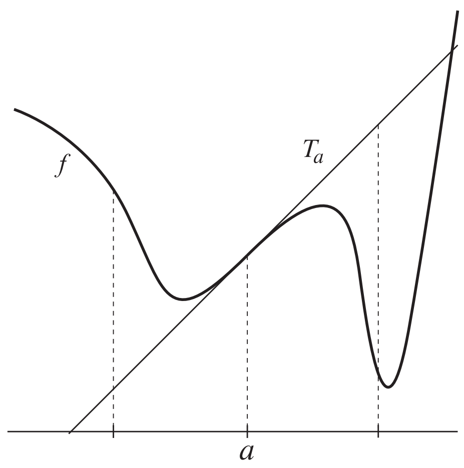
5.5.16. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** (neboli že a je **inflexním bodem** funkce f), jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\begin{aligned} \forall x \in P_{-}(a,\delta):\ & f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ \forall x \in P_{+}(a,\delta):\ & f(x) < f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \forall x \in P_{-}(a,\delta):\ & f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ \forall x \in P_{+}(a,\delta):\ & f(x) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Následující obrázek ilustruje právě definovaný pojem inflexního bodu.



Obrázek 11.

5.5.17. Věta (nutná podmínka pro inflexi). Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a,\delta) : \ f'(x) < f'(a) \quad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a,\delta) : \ f'(x) > f'(a). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_-(a,\delta)$. Protože f je spojitá na $B(a,\delta)$ dle Věty 5.1.14, pomocí Lagrangeovy věty 5.2.4 najdeme $c_x \in (x,a)$ splňující

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(c_x).$$

Protože $f'(c_x) < f'(a)$ z (5.49), máme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$.

Je-li $x \in P_+(a,\delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a,x)$ splňující

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(d_x) > f'(a).$$

Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Jinými slovy, bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou f v bodě a na levém i pravém okolí a. Tedy a není inflexním bodem f. Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. ■

5.5.18. Poznámka. Rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f. Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem f, protože graf funkce f leží nad tečnou v bodě 0.

5.5.19. Věta (postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b) a $c \in (a,b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a,c) : \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b) : \ f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a,c) : \ f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b) : \ f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že pro f platí první varianta, tj.

$$\forall x \in (a,c) : \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b) : \ f''(x) < 0.$$

Z Věty 5.2.6 plyne, že f' je rostoucí na $(a,c]$ a je klesající na $[c,b)$. Pro dané $x \in (a,c)$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení $c_x \in (x,c)$ splňujícího

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(c_x) < f'(c).$$

Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$.

Podobně pro $x \in (c,b)$ najdeme $d_x \in (c,x)$ splňující

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(d_x) < f'(c).$$

Úpravou obdržíme $f(x) < f(c)+f'(c)(x-c)$. Tedy c splňuje první variantu v Definici 5.5.16, tj. c je inflexním bodem f.

Obdobně bychom ověřili, že funkce s vlastností

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) > 0.$$

splňuje v c druhou variantu definice inflexního bodu. Tím je důkaz dokončen. ∎

5.5.20. Příklad. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.5.19.

Řešení. Protože $f'(0) = 0$ (viz výpočet v Příkladu 5.6.1), tečna funkce f v bodě 0 je dána jako

$$t(x) = f(0) + f'(0)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) < 0 = t(x)$, pro $x > 0$ máme $f(x) > 0 = t(x)$. Tedy f má v 0 inflexní bod.

Na druhou stranu,

$$f'(x) = \begin{cases} 10x^4 + 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a

$$f''(x) = \begin{cases} x\Big(20x^2(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Označíme-li

$$g(x) = 20x^2\Big(2 + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\Big) + 2x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ dle Věty 4.2.15. Tedy výraz $g(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nabývá kladných i záporných hodnot na libovolném okolí 0. Protože

$$f''(x) = x\Big(g(x) - \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\Big), \quad x \neq 0,$$

nabývá druhá derivace f kladné i záporné hodnoty na libovolném okolí bodu 0. ♣

5.5.21. Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0. \tag{5.50}$$

Obdobně definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

5.5.22. Věta (tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \tag{5.51}$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že funkce $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak plyne z předpokladu a Věty 4.2.2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x\to\infty} \Big(a + \frac{b}{x}\Big) = a,$$

a

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) + \lim_{x\to\infty} b = b.$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že funkce $x \mapsto ax + b$ splňuje (5.51). Pak

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

Tedy $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞. ■

5.5.23. Příklady. 1. Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $x \mapsto 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 5.5.22 je nevlastní.

2. Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$. To plyne z

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \sqrt{2}$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - \sqrt{2}x\big) &= \lim_{x\to\infty} \big(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\big)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

3. Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

4. Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 5.5.22 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 0 \cdot x)$.

5.5.24. Při *vyšetřování průběhu funkce* získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti,
- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodicita,
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu funkce.

5.5.25. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Podívejme se nejdříve na funkci

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a funkce g má vlastní první i druhou derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \tag{5.52}$$

g je lichá a kladná na $(0, \infty)$. Počítejme

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(2(x^2+1) - 4x^2\right) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $g' > 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a $g' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Dle Věty 5.2.6 g roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Tedy g má minimum v bodě -1 a maximum v 1. Protože $g(-1) = -1$ a $g(1) = 1$, z Věty 4.3.4 plyne $\mathcal{H}(f) = [-1, 1]$.

Jelikož $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, je funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a je zde spojitá (jelikož g i arcsin jsou spojité, plyne tvrzení z Poznámky 4.2.22(b)). Díky (5.52) a spojitosti funkce arcsin v 0 dostáváme použitím Věty 4.2.20

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

Po dosazení vidíme $f(-x) = -f(x)$, tj. f je lichá.

Při výpočtu derivace dostáváme za pomoci Věty 5.1.16 a vlastnosti (C10)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}\right)^{-1} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\left|1-x^2\right|}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}.
\end{aligned}
$$

V bodech -1 a 1 použijeme Větu 5.2.10 k odvození

$$
\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x\to 1_+} f'(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{-2}{x^2+1} = -1, \\
f'_-(1) &= \lim_{x\to 1_-} f'(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\
f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1_+} f'(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\
f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1_-} f'(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{-2}{x^2+1} = -1.
\end{aligned}
$$

Tedy derivace v bodech -1 a 1 neexistuje.

Máme $f' > 0$ na $(-1,1)$ a $f' < 0$ na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$. Z Věty 5.2.6 plyne, že f roste na $[-1,1]$ a klesá na intervalech $(-\infty,-1]$ a $[1,\infty)$. Dále, f má maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1, přičemž $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ a $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Díky spojitosti funkce f dostáváme za použití Věty 4.3.4 $\mathscr{H}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Počítáme-li druhou derivaci, dostáváme

$$
f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-1,1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}
$$

Tedy $f''(x) = 0$ právě v bodě $x = 0$, $f'' > 0$ na $(-1,0) \cup (1,\infty)$ a $f'' < 0$ na $(-\infty,-1) \cup (0,1)$. Z Věty 5.5.14 odvodíme, že f je ryze konvexní na intervalech $[-1,0]$ a $[1,\infty)$ a je ryze konkávní na intervalech $(-\infty,-1]$ a $[0,1]$. Dále má f v 0 inflexní bod dle Věty 5.5.19.

Pro výpočet asymptot můžeme použít Větu 5.5.22, což dává

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0
$$

a

$$
\lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 0\cdot x = 0.
$$

Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f. ♣

5.6. Teoretické příklady k derivaci funkce

5.6.1. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. V každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme derivaci dle Věty 5.1.16 jako

$$f'(x) = 2x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 vyjde

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.15. Podíváme-li se na posloupnost

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje tato posloupnost k 0, ale

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.6.2. Příklad. Pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{5.53}$$

a tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Funkce f však není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.6.1 dokážeme (5.53).

Položíme-li

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim a_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n)\right) = -\infty,$$

a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim b_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} f'(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi)\right) = \infty,$$

a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

5.6.3. Příklad. Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí

$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá}, \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá}. \end{cases}$$

Řešení. Nechť $\delta \in (0,\infty)$ je takové, že $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a-\delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a+\delta).$$

Pak $g(x) = \frac{f(-x)-f(-a)}{x-a}$, $x \in (a, a+\delta)$, a použitím Věty 4.2.20 dostáváme

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x\to a_+} g(x) = \lim_{y\to a_-} g(-y) = \lim_{y\to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{-y - a} \\ &= -\lim_{y\to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{a - (-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.6.4. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Pomocí Příkladu 5.6.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Z Věty 5.5.3 plyne, že f je rostoucí v bodě 0.

Definujme nyní body $x_n, y_n, n \in \mathbb{N}$, jako

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}.$$

Přímočarým výpočtem se ověří, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_{n+1} < y_n < x_n$ a že

$$f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Protože posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergují k 0, funkce f není monotónní na žádném okolí 0. ♣

5.6.5. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f má v 0 ostré lokální minimum, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není monotónní na žádném jednostranném okolí bodu 0.

Řešení. Funkce f je zjevně kladná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a má tedy v 0 ostré (globální) minimum. Podobně jako Příkladu 5.6.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Položíme-li

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztahy

$$x_{n+1} < y_n < x_n, \quad f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Jelikož $\lim x_n = \lim y_n = 0$, funkce f není na žádném pravém okolí 0 monotónní.

Obdobně ukážeme, že f není monotónní na žádném levém okolí bodu 0. Uvažujeme-li totiž body $-x_n$ a $-y_n$ (kde x_n a y_n jsou definovány výše), platí

$$-x_n < -y_n < -x_{n+1}, \quad f(-x_n) < f(-y_n), \quad f(-x_{n+1}) < f(-y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tím je požadované tvrzení dokázáno.

♣

5.6.6. Příklad. Nechť má funkce f v bodě a vlastní derivaci a nechť čísla $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ splňují $x_n \leq a \leq y_n$, $y_n - x_n > 0$ a $y_n - x_n \to 0$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Řešení. Je-li x_n nebo y_n rovno a, jedná se o derivační podíl z definice. Tedy lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_n < a < y_n$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Protože

$$0 < a - x_n < y_n - x_n \quad \text{a} \quad 0 < y_n - a < y_n - x_n,$$

platí $x_n \to a$ a $y_n \to a$. Protože $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, z Heineovy věty 4.2.16 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a} - f'(a)\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \left|\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} - f'(a)\right| < \varepsilon.$$

Pro tato n_0 pak máme

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} - f'(a)\right| \\
&\quad = \left|\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-x_n} + \frac{f(a)-f(x_n)}{y_n-x_n} - \left(\frac{y_n-a}{y_n-x_n} + \frac{a-x_n}{y_n-x_n}\right) f'(a)\right| \\
&\quad \leq \frac{y_n-a}{y_n-x_n}\left|\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a} - f'(a)\right| + \frac{a-x_n}{y_n-x_n}\left|\frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n} - f'(a)\right| \\
&\quad \leq \varepsilon\left(\frac{y_n-a}{y_n-x_n} + \frac{a-x_n}{y_n-x_n}\right) \\
&\quad = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

5.6.7. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá periodická nekonstantní funkce. Pak nemá ani v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu.

Řešení. Nechť $a > 0$ je perioda funkce f, tj. $f(x) = f(x+a)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nejprve si rozmysleme, že f je omezená funkce. To plyne z faktu, že f je v absolutní hodnotě omezená na $[0,a]$ nějakou konstantou M (viz Věta 4.3.11), a tedy je omezená M i na každém intervalu tvaru $[ka,(k+1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dostáváme proto, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Předpokládáme-li nyní existenci asymptoty například v ∞, existuje $b \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x\to\infty}(f(x)-b) = 0$. Najdeme $x \in (0,a)$ splňující $f(x) \neq f(a)$. Z Věty 4.2.17 nyní plyne, že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x+na) = b = \lim_{n\to\infty} f(na) = f(0),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. ♣

5.6.8. Příklad. Nechť $a < c < b$ jsou čísla v $\mathbb{R}^*$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je ryze konvexní na $(a,c]$ a na $[c,b)$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f je ryze konvexní na (a,b).
(ii) Platí $f'_-(c) \le f'_+(c)$.

Dokažte též, že analogické tvrzení platí v případě, že $a, b \in \mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a,c]$ a $[c,b]$.

Řešení. Odvoďme nejprve následující pozorování.

Nechť $a < b < c$ a α, β, γ jsou reálná čísla. Nechť

$$\frac{\beta-\alpha}{b-a} < \frac{\gamma-\beta}{c-b}.$$

Pak

$$\frac{\beta-\alpha}{b-a} < \frac{\gamma-\alpha}{c-a}.$$

Abychom toto dokázali, vezměme $t \in (0,1)$ splňující $b = ta + (1-t)c$. Pak $b-a = (1-t)(c-a)$ a $c-b = t(c-a)$. Předpokládaná nerovnost tedy znamená, že

$$\frac{\beta-\alpha}{1-t} < \frac{\gamma-\beta}{t}, \quad \text{tj.} \quad t(\beta-\alpha) < \gamma-\beta. \tag{5.54}$$

Požadovaná nerovnost pak má tvar

$$\frac{\beta-\alpha}{1-t} < \frac{\gamma-\alpha}{1}, \quad \text{tj.} \quad \beta-\gamma < t(\alpha-\gamma).$$

Tato nerovnost je však zjevně ekvivalentní s nerovností (5.54).

Přistupme nyní k důkazu tvrzení. Díky Větě 5.5.10 a Poznámce 5.5.11 víme, že f má jednostranné derivace v bodě c. Položme

$$\varphi(x) = \frac{f(c)-f(x)}{c-x}, \quad x \in (a,c), \qquad \psi(y) = \frac{f(y)-f(c)}{y-c}, \quad y \in (c,b).$$

Díky Lemmatu 5.5.9 víme, že φ je rostoucí na (a,c) a ψ na (c,b). Nechť $x' \in (a,c)$ a $y' \in (c,b)$ jsou dány. Pak

$$\begin{aligned} \frac{f(c)-f(x')}{c-x'} &< \sup\{\varphi(x);\ x \in (x',c)\} = f'_-(c), \\ \frac{f(y')-f(c)}{y'-c} &> \inf\{\psi(y);\ y \in (c,y')\} = f'_+(c). \end{aligned} \tag{5.55}$$

Ověřme nyní implikaci (i) $\implies$ (ii). Je-li f ryze konvexní na intervalu (a,b), platí podle Lemmatu 5.5.9 nerovnost

$$\forall x \in (a,c)\ \forall y \in (c,b)\colon \varphi(x) < \psi(y).$$

Tedy z Lemmatu 1.6.29 máme

$$f'_-(c) = \sup\{\varphi(x);\ x \in (a,c)\} \leq \inf\{\psi(y);\ y \in (c,b)\} = f'_+(c).$$

Obráceně, nechť $f'_-(c) \leq f'_+(c)$. Nechť $x < y < z$ jsou body vybrané z intervalu (a,b). Předpokládejme nejprve, že $x < y \leq c < z$. Pokud $y = c$, máme díky (5.55) nerovnosti

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < f'_-(c) \leq f'_+(c) < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Je-li $y < c$, máme z Lemmatu 5.5.9 a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(c)-f(y)}{c-y} < f'_-(c) \leq f'_+(c) < \frac{f(z)-f(c)}{z-c}.$$

Díky pozorování ze začátku důkazu tedy platí

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{5.56}$$

Je-li $x < c \leq y < z$, ověříme nerovnost (5.56) analogicky. V případě $x < y < z \leq c$ nebo $c \leq x < y < z$ platí nerovnost(5.56) díky předpokladu.

Tím je podle Lemmatu 5.5.9 dokázána ryzí konvexita f na (a,b).

V případě, kdy $a,b \in \mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a,c]$ a $[c,b]$, postupujeme zcela analogicky. ♣

5.6.9. Příklad. Nechť $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, kde $a \neq 0$. Pak rovnice $ax^3+bx+cx+d=0$ má v $\mathbb{R}$ alespoň jedno řešení.

5.6.10. Příklad. Označme $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $x \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Předpokládáme-li, že $a > 0$, platí

$$\lim_{x\to\infty} x^3(a+bx^{-1}+cx^{-2}+dx^{-3}) = \infty$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} x^3(a+bx^{-1}+cx^{-2}+dx^{-3}) = -\infty.$$

Podle Věty 4.3.6 je tedy $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, a proto existuje alespoň jedno $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$.

Je-li $a < 0$, použijeme právě dokázané tvrzení pro funkci $-f$.

5.6.11. Příklad. Ukažte, že $3 < \pi < 4$.

Řešení. Připomeňme, že číslo π je definováno jako $\pi = 2\alpha$, kde α je jednoznačně určené reálné číslo v intervalu $(0,2)$ splňující $\cos\alpha = 0$. Zjevně tedy $\pi < 4$. Abychom dokázali nerovnost $\pi > 3$, stačí ověřit, že $\cos(\frac{3}{2}) > 0$ (dle vlastnosti (G4) je funkce kosinus klesající na intevalu $(0,2)$.)

Označme $\beta = \frac{3}{2}$ a $a_n = \frac{\beta^{2n}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $n \geq 1$ máme $a_{n+1} \leq a_n$, a tedy dle Lemmatu 3.8.12 platí

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=4}^{k}(-1)^n a_n \geq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n\\ &\geq \left(1-\frac{\beta^2}{2!}\right)+\frac{\beta^4}{4!}\left(1-\frac{\beta^2}{6\cdot 5}\right)\\ &= \frac{359}{5\cdot 2^{10}} > 0\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

5.6.12. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Řešení. Nechť $I = (0,\pi)$ a nechť $f(y) = \operatorname{cotg} y$, $y \in (0,\pi)$. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována na $\mathbb{R}$ a splňuje $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in (0,\pi)$ platí

$$f'(y) = \frac{-1}{\sin^2(y)} = -(1+\operatorname{cotg}^2 y),$$

a tedy f je spojitá a klesající na I. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{arccotg}(x)$. Potom $y \in (0,\pi)$ a $x = \operatorname{cotg}(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.25(a)) tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2},$$

což jsme chtěli dokázat. ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že pomocí věty o derivaci inverzní funkce je možné v některých případech spočítat derivaci určité funkce ačkoli pro tuto funkci nemáme k dispozici explicitní vyjádření.

5.6.13. Příklad. Nechť funkce f je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^3 + \sin x$. Ukažte, že f je na $\mathbb{R}$ prostá a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ a pro její inverzní funkci $g = f^{-1}$ spočtěte $g'(b)$ a $g''(b)$, kde $b = f(1)$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x.$$

Je-li $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, platí $3x^2 + \cos x > 0$, a pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$ máme díky Příkladu 5.6.11 a vlastnosti (G7) odhad

$$3x^2 + \cos x \geq 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} > 0.$$

Protože je f' sudá funkce, je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce f je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. K funkci f tedy existuje inverzní funkce $g = f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Položme $a = 1$ a $b = f(1) = 1 + \sin 1$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.25(a)) platí

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{3 + \cos 1}.$$

Použijeme-li dále Větu 5.1.16, máme

$$g''(y) = ((f'(g(y)))^{-1})' = \frac{-f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}, \quad y \in \mathbb{R},$$

a tedy pro $b = 1 + \sin 1 = f(1)$ máme

$$g''(b) = \frac{\sin 1 - 6}{(3 + \cos 1)^3}.$$

♣

5.6.14. Příklad. Najděte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Řešení. Nechť f_n a f jsou funkce zkonstruované v Příkladu 4.4.10. Nechť $a \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Ukážeme za pomoci Příkladu 5.6.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. Povšimněme si nejdříve, že f_n je 4^{-n-1}-periodická a na každém intervalu, kde je afinní, má směrnici rovnou buď 1 nebo -1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, najdeme jednoznačně určené $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\frac{k}{4^{n+1}} \leq a < \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Položme

$$x_n = \frac{k}{4^{n+1}}, \quad y_n = \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Pak pro $m \geq n$ platí

$$f_m(x_n) = f_m(y_n) = 0$$

a pro $m \in \{1, \dots, n-1\}$ je funkce f_m afinní na intervalu $[x_n, y_n]$. Tedy

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Protože je f_m afinní na $[x_n, y_n]$ se směrnicí 1 či -1, máme

$$\frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} \in \{-1, 1\}, \quad m \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Proto

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} = \begin{cases} \text{liché celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ \text{sudé celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Limita $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ pro n jdoucí do nekonečna tedy nemůže existovat vlastní, protože tato posloupnost nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovy podmínku 2.4.22. Tedy dle Příkladu 4.4.10 $f'(a)$ neexistuje vlastní. ♣

5.6.15. Příklad. Nechť f je konvexní funkce na intervalu (a, b). Pak množina bodů nediferencovatelnosti funkce f je nejvýše spočetná.

Řešení. Z Věty 5.5.14 víme, že v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní jednostranné derivace a platí $f'_-(x) \le f'_+(x)$. Ukažme nyní, že pro body $x, y \in (a, b)$, $x < y$, platí

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y).$$

K tomuto účelu vezmeme body u, v splňující $x < u < v < y$. Díky konvexitě f (viz Lemma 5.5.9) pak máme

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \le \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Tedy pro každé $v \in (x, y)$ platí dle Věty 2.2.46

$$f'_+(x) = \lim_{u \to x_+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \le \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Opětovným použitím Věty 2.2.46 máme

$$f'_+(x) \le \lim_{v \to y_-} \frac{f(v) - f(y)}{v - y} = f'_-(y).$$

Tedy jsem ukázali, že f'_- je neklesající funkce na (a, b). Podle Příkladu 4.4.3 je tedy f'_- spojitá všude na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny D. Máme-li nyní bod $x \in (a, b) \setminus D$, platí

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le \lim_{y \to x_+} f'_-(y) = f'_-(x).$$

Odtud plyne, že $f'_-(x) = f'_+(x)$. Dle Věty 5.1.5 tudíž existuje $f'(x)$. ♣

5.6.16. Příklad. Nechť $f_a(x) = x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x$, $x \in (0, \infty)$. Zjistěte, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze f rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, aby měla všude konečnou derivaci.

Řešení. Nejprve zjistíme, pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita $\lim_{x\to 0+} f_a(x)$. Jelikož

$$f_a(x) = \sin(\ln x) \frac{\operatorname{arctg} x}{x} x^{a+1}, \quad x \in (0, \infty),$$

a sin je omezená funkce, dostáváme pro $a > -1$

$$\lim_{x\to 0+} f_a(x) = 0.$$

Pokud $a \le -1$, položíme $x_n = e^{\pi(\frac{1}{2}-2n)}$ a $y_n = e^{\pi(\frac{3}{2}-2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak za pomoci Věty 2.3.23 obdržíme pro $a = -1$

$$\lim_{x\to 0+} f_a(x_n) = 1, \quad \lim_{x\to 0+} f_a(y_n) = -1,$$

zatímco pro $a < -1$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0+} f_a(x_n) = \infty, \quad \lim_{x\to 0+} f_a(y_n) = -\infty.$$

Tedy pro $a \le -1$ limita $\lim_{x\to 0+} f_a(x)$ neexistuje (viz Věta 4.2.17).

Z těchto výpočtů plyne, že pro $a > -1$ lze funkci f_a dodefinovat spojitě na $\mathbb{R}$ tím, že ji na $(-\infty, 0]$ položíme rovnou 0. V případě $a \in (-\infty, -1]$ f spojitě dodefinovat v bodě 0 není možné.

Nechť f_a je pro $a > -1$ dodefinována 0 v bodě 0. Pak je spojitá zprava v bodě 0, a tedy podle Věty 5.2.10 a výše uvedených výpočtů

$$(f_a)'_+(0) = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 0+} f_{a-1}(x)$$

existuje právě tehdy, když $a > 0$. V tom případě pak derivace funkce f_a v bodě 0 zprava existuje a je rovna 0. Dodefinujeme-li tedy f_a hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$, dostaneme funkci s vlastní derivací na $\mathbb{R}$.

♣

5.6.17. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1, \infty)$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x.$$

Řešení. Je-li $\alpha = 1$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 1$ a položme

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x, \quad x \in (-1, \infty).$$

Pak $\lim_{x\to -1+} f(x) = 1$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \left((1 + \frac{1}{x})^\alpha - \alpha x^{1-\alpha} - x^{-\alpha} \right) = \infty$$

a f má konečnou derivaci na $(-1,\infty)$. Speciálně je tedy spojitá na $(-1,\infty)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě -1 hodnotou 1 (tuto funkci budeme opět značit jako f), obdržíme spojitou funkci na $[-1,\infty)$, která má pro $x \in (-1,\infty)$ konečnou derivaci. Pak

$$f'(x) = \alpha\left((1+x)^{\alpha-1} - 1\right), \quad x \in (-1,\infty),$$

což znamená, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (-1,0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (0,\infty)$. Tedy f klesá na intervalu $(-1,0)$ a roste na intervalu $(0,\infty)$ (viz Věta 5.5.7). Protože f spojitá a $f(0) = 0$, je f nezáporná na $[-1,\infty)$, což verifikuje zadanou nerovnost. ♣

5.6.18. Příklad. Ukažte, že pro každé kladné $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, platí

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení. Předpokládejme, že $a < b$. Podělíme zadané nerovnosti číslem a a položíme $\frac{b}{a} = x$. Tím dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\log x} < \frac{1+x}{2}, \quad x \in (1,\infty) \tag{5.57}$$

První nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x\log^2 x < (x-1)^2, \quad x \in (1,\infty),$$

která plyne z nerovnosti

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in (0,\infty), \tag{5.58}$$

dosazením $x-1$ za x.

Dokažme tedy (5.58). K tomuto účelu položme

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in [0,\infty).$$

Pak $f(0) = 0$ a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x}\left(\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})\right)}{2(1+x)\sqrt{1+x}} < 0, \quad x \in (0,\infty), \end{aligned}$$

protože pro kladná x platí $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$. Tedy je f klesající na $[0,\infty)$, a proto $f(x) < 0$ na $(0,\infty)$. Tím je (5.58) dokázáno.

Ověřme nyní druhou nerovnost v (5.57). Ta je ekvivalentní s nerovností

$$2(x-1) - (x+1)\log x < 0, \quad x \in (1,\infty). \tag{5.59}$$

Definujme funkci

$$f(x) = 2(x-1) - (x+1)\log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $f(1) = 0$ a

$$f'(x) = 2 - \frac{x+1}{x} - \log x = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in (1, \infty).$$

Položme

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $g(1) = 0$ a

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - 1) < 0, \quad x \in (1, \infty).$$

Funkce g je tedy klesající na $[1, \infty)$, a proto záporná na $(1, \infty)$. Tedy je i f' záporná na $(1, \infty)$. Tím pádem je ale f, jakožto klesající funkce na $[1, \infty)$, záporná na $(1, \infty)$, což dokazuje (5.59). Tím je důkaz dokončen. ♣

5.6.19. Příklad. Dokažte, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$ a $H(\{\cos n\}) = [-1, 1]$.

Důkaz. Nechť $x \in [-1, 1)$. Nalezneme $a \in [0, 1]$ takové, že $\sin(2\pi a) = x$. Položme $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. Podle **??** je číslo α iracionální. Z Příkladu 2.5.15 tedy vyplývá, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha n_k - [\alpha n_k]) = a. \tag{5.60}$$

Díky spojitosti funkce sinus dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \sin(n_k) &= \lim_{k\to\infty} \sin(2\pi\alpha n_k) = \lim_{k\to\infty} \sin(2\pi\alpha n_k - 2\pi[\alpha n_k]) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sin(2\pi(\alpha n_k - [\alpha n_k])) = \sin(2\pi a) = x.\end{aligned}$$

Protože $x \in [-1, 1]$ bylo zvoleno libovolně a inkluze $[-1, 1] \subset H(\{\sin n\})$ je zřejmá, plyne odtud, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$. Tvrzení týkající se hromadných bodů posloupnosti $\{\cos n\}$ je možné dokázat obdobně. ■

5.6.20. Příklad. Nechť D je nekonečná spočetná podmnožina $(0, 1)$. Najděte spojitou konvexní funkci na $[0, 1]$, která nemá derivaci právě v bodech množiny D.

Řešení. Očíslujme množinu D jako $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkci $f_n(x) = |x - x_n|$, $x \in [0, 1]$. Pak funkce f_n má následující vlastnosti:

(a) z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$, $x, y \in [0, 1]$,

(b) f_n je zjevně konvexní,

(c) $(f_n)'_-(x_n) = -1$, $(f_n)'_+(x_n) = 1$ a f_n' je vlastní na $(0, 1) \setminus \{x_n\}$,

(d) f_n je omezená na $[0,1]$ číslem 1.

Položme

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x),\qquad x\in[0,1].$$

Díky vlastnosti (d) je f dobře definovaná funkce na $[0,1]$, neboť definující řada je absolutně konvergentní. Dále se jednoduše z definice ověří pomocí (b), že f je konvexní.

Zafixujme si index $j\in\mathbb{N}$ a ukažme, že $f'_+(x_j)>f'_-(x_j)$. K tomuto účelu najdeme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{1}{4\cdot 2^j}$. Pak $n_0>j$. Z vlastnosti (a) dostáváme pro $h>0$ splňující $x_j+h\in(0,1)$ odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h}\right)&\geq-\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h}\right|\\&\geq-\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}>-\frac{1}{4\cdot 2^j}.\end{aligned}$$

Derivace zprava funkce f existuje díky její konvexitě, a tak můžeme odhadovat

$$
\begin{aligned}
f'_+(x_j) &= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}(f(x_j+h) - f(x_j)) = \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j+h) - f_n(x_j)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0_+} \Big(\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j+h) - f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j} \frac{f_j(x_j+h) - f_j(x_j)}{h} \\
&\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j+h) - f_n(x_j)}{h} \Big) \\
&\geq \lim_{h\to 0_+} \Big(\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j+h) - f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j} \frac{f_j(x_j+h) - f_j(x_j)}{h} \\
&\quad - \frac{1}{4\cdot 2^j} \Big) \\
&= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j} (f_j)'_+(x_j) - \frac{1}{4\cdot 2^j} \\
&= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4\cdot 2^j} \\
&= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{3}{4\cdot 2^j}.
\end{aligned}
$$

(Připomeňme, že funkce f_i, $i \in \{1,\dots,n_0\} \setminus \{j\}$, mají v bodě x_j vlastní derivaci.)

Obdobně odvodíme, že

$$
f'_-(x_j) \leq \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) - \frac{3}{4\cdot 2^j}.
$$

Tedy $f'_+(x_j) > f'_-(x_j)$, a tedy derivace f v bodě x_j neexistuje.

Ukažme nyní, že v bodě $x \in (0,1) \setminus D$ derivace f existuje vlastní. K tomu stačí dokázat, že $f'_+(x) \leq f'_-(x)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Jako výše pak máme pro $h > 0$ splňující $x + h \in (0,1)$ odhad

$$
\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \leq \varepsilon.
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
f'_+(x) &= \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} + \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} \right) + \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

protože f_n jsou v x diferencovatelné. Obdobně obdržíme

$$f'_-(x) \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, máme požadovaný odhad $f'_+(x) \leq f_-(x)$. ♣

5.6.21. Příklad. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \tag{5.61}$$

(viz 1.8.16). Rovnosti v (5.61) navíc platí právě tehdy, když $x = 1$.

Řešení. Označme

$$f(x) = \log x - \frac{x}{x-1}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pak

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty).$$

Tedy f klesá na $(0, 1]$ a roste na $[1, \infty)$. Má tedy v bodě 1 globální minimum. Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.61). Navíc $f(x) = 0$, tj. v první nerovnosti v (5.61) platí rovnost, právě tehdy, když $x = 1$.

Abychom dokázali druhou nerovnost, položme

$$g(x) = x - 1 - \log x, \quad x(0, \infty).$$

Protože
$$g'(x) = \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty),$$
funkce g roste na $[1, \infty)$ a klesá na $(0, 1]$. Má tedy v bodě 1 minimum. Jelikož $g(1) = 0$, je funkce g kladná na $(0, \infty) \setminus \{1\}$. Tím je dokázána druhá nerovnost (5.61). ♣

5.6.22. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a
$$f_a(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log x, \quad x \in (0, \infty).$$
Zjistěte, pro která a existuje bod $z \in (0, \infty)$, ve kterém mají funkce f a g společnou tečnu.

Řešení. Zřejmě pro $x \in (0, \infty)$ platí $f_a'(x) = 2ax$ a $g'(x) = \frac{1}{x}$. Mají-li mít funkce f_a a g v bodě $z \in (0, \infty)$ společnou tečnu, musí platit $2az = f_a'(z) = g'(z) = \frac{1}{z}$. Pro $a \in (\infty, 0]$ takový bod zjevně neexistuje. Je-li $a > 0$, požadovaná rovnost platí pro $z = (2a)^{-\frac{1}{2}}$. Společnou tečnu pak tyto funkce budou mít v případě
$$\frac{1}{2} = f_a((2a)^{-\frac{1}{2}}) = g((2a)^{-\frac{1}{2}}) = \log(2a)^{-\frac{1}{2}}.$$
To nastává v případě $a = (2e)^{-1}$. Společná tečna v bodě $\sqrt{e}$ má pak tvar
$$t(x) = \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}}(x - \sqrt{e}), \quad x \in \mathbb{R}.$$
♣

5.6.23. Příklad. Označme
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Pak $\{a_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel s kladnou limitou. Ta se obvykle značí γ a nazývá **Eulerovou konstantou**.

Řešení. Položme
$$b_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Pak platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:
- $b_n < a_n$ (to je zřejmé, jelikož logaritmus je rostoucí funkce),
- $a_{n+1} < a_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n})$, která plyne z první nerovnosti v (5.61)),
- $b_{n+1} > b_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\log(1+\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n+1}$, která plyne z druhé nerovnosti v (5.61)),

- b_n je kladné (to plyne z druhé nerovnosti v (5.61), neboť

$$\log(n+1) = \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k})$$
$$< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}).$$

Tedy máme

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < \cdots a_2 < a_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

a zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0.$$

Z těchto faktů již plyne požadovaný závěr dle Vět 2.4.1 a 2.2.44. ♣

5.6.1. Hyperbolické funkce.

5.6.24. Definice. **Hyperbolické funkce hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens**, **hyperbolický kotangens** definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, && x \in \mathbb{R},\\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, && x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Vlastnosti hyperbolických funkcí

(H1) Platí

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh x + \cosh x\sinh y, \quad x \in \mathbb{R},\\
\cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Plyne dosazením do vzorců, například první identita se odvodí pomocí

$$\begin{aligned}
\sinh x\cosh x + \cosh x\sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}\\
&= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

(H2) Funkce sinh je lichá, cosh je sudá a obě jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Plyne z definice.

(H3) Platí $(\sinh)' = \cosh$ a $(\cosh)' = \sinh$ na $\mathbb{R}$.

Z definice máme

$$\sinh' x = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(H4) Platí $\sinh 0 = 0$ a $\cosh 0 = 1$. Dále platí $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$.

Z definice máme první část tvrzení. Dále platí

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$$

díky větě o aritmetice limit (Věta 4.2.2). Ostatní limity se spočtou obdobně.

(H5) Funkce sinh roste na $\mathbb{R}$, cosh roste na $[0, \infty)$ a klesá na $(-\infty, 0]$.

Protože díky (H3) platí $(\sinh)' = \cosh$, což je podle definujícího vzorce kladná funkce na $\mathbb{R}$, je sinh rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále máme $(\cosh)' = \sinh$. Ale sinh je rostoucí a $\sinh 0 = 0$. Tedy sinh je záporná na $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0, \infty)$. Proto je cosh klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta 5.2.6).

(H6) Platí $\mathcal{H}(\sinh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\cosh) = [1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H4), (H5), spojitosti obou funkcí a Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot (viz Věta 4.3.4).

(H7) Platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením z definice máme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1.$$

(H8) Funkce tgh a cotgh jsou liché a na svých definičních oborech spojité.

Plyne z definice a Věty 4.2.5.

(H9) Platí $\operatorname{tgh} 0 = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = -1$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cotgh} x = -1$, $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotgh} x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{cotgh} x = 1$.

Dosazením obdržíme $\operatorname{tgh} 0 = 0$. Dále platí

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

Ostatní limity spočteme analogicky.

(H10) Platí $(\operatorname{tgh})' = \frac{1}{\cosh^2}$ a $(\operatorname{cotgh})' = \frac{-1}{\sinh^2}$ na $\mathbb{R}$.

Z (H3) a (H7) máme

$$(\operatorname{tgh})' = \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)' = \frac{1}{\cosh^2}(\cosh^2 - \sinh^2) = \frac{1}{\cosh^2}.$$

Obdobně se ověří druhé tvrzení.

(H11) Funkce tgh roste na $\mathbb{R}$, cotgh klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H10) a Věty 5.2.6.

(H12) Platí $\mathscr{H}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$ a $\mathscr{H}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H11), (H9) a spojitosti obou funkcí.

5.7. Početní příklady k derivaci funkce

5.7.1. Limity funkcí.

5.7.1. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z vlastnosti sinu (G5) víme, že $\sin'(0) = 1$. Dále platí $\sin 0 = 0$ (viz (G4)). Tedy z Definice 5.1.1 plyne

$$1 = \sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

♣

5.7.2. Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Řešení. Upravíme

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5\frac{\sin 5x}{5x}.$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin y}{y},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = 5x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nechť dále

$$c = 0, D = 0, A = 1.$$

Pak

$$\lim_{x\to c} g(x) = D, \quad \lim_{y\to D} f(y) = A$$

a pro libovolné $\eta \in (0, \infty)$

$$g(x) \neq D, \quad x \in P(c, \eta).$$

Z Věty 4.2.20(P) a Příkladu 5.7.1 tedy plyne, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = A = 1.$$

Z Věty 4.2.2 máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin 5x}{5x} = 5.$$

♣

5.7.3. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Upravme

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}.$$

Jelikož kosinus je spojitá funkce (viz (G13)) a $\cos 0 = 1$ (viz (G6)), plyne z Příkladu 5.7.1 a Věty 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

♣

5.7.4. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\,\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\\ &= \frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)\\ &= \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)\end{aligned}$$

Pomocí Příkladů 5.7.1 a 5.7.3 dostáváme díky Větě 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(1+1) = \frac{4}{3}.$$

♣

5.7.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1,\quad \text{a}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Řešení. Protože $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ (vlastnosti (E2) a (E4)), platí dle Definice 5.1.1 rovnost

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Obdobně dostaneme z vlastnosti logaritmu (L7) rovnost

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1+0)}{x-0} = \big(\log(1+x)\big)'_{x=0}\\ &= \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1.\end{aligned}$$

Dále položme

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y},\ y\in(-1,\infty)\setminus\{0\},\quad g(x) = x-1,\ x\in\mathbb{R},$$

a

$$c = 1, D = 0, A = 1.$$

Pak

$$\lim_{x\to c} g(x) = D,\quad \lim_{y\to D} f(y) = 1$$

a $g(x)\neq D$ pro $P(c,1)$. Tedy z Věty 4.2.20(P) plyne

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}(f\circ g)(x) = A = 1.$$

♣

5.7.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x}.$$

Řešení. Upravíme

$$\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}.$$

Pro $x \in P(0,\pi)$ platí $\sin x \neq 0$, a tedy je splněna podmínka (P) Věty 4.2.20. Proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

♣

5.7.7. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Řešení. Funkci v zadané limitě upravíme na

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1}\frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Protože $\cos x - 1 \neq 0$ pro $x \in P(0, \frac{\pi}{2})$, z Vět 4.2.20(P) a 4.2.2 máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

♣

5.7.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x).$$

Řešení. Pišme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) &= \frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Položíme-li ve Větě 4.2.20(P) $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \frac{\pi}{4} - x$ (respektive $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$) a

$$c = \frac{\pi}{4}, D = 0, A = 1,$$

dostaneme
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\frac{\pi}{4}-x} = 1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\frac{\pi}{2}-2x}$$
(platí $\frac{\pi}{4}-x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4},1)$ a $\frac{\pi}{2}-2x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4},1)$). Tedy máme z (5.62)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{1}{1}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

♣

5.7.9. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}.$$

Řešení. Aby zadaný výpočet měl smysl, je třeba předpokládat, že $a \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Upravíme zadaný výraz na
$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} = \frac{\sin x\cos a - \sin a\cos x}{\cos x\cos a(x-a)} = \frac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a(x-a)}$$
$$= \frac{1}{\cos x\cos a}\cdot\frac{\sin(x-a)}{x-a}.$$
Tedy
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$
Povšimněme si, že zadaná limita je rovna $\operatorname{tg}'(a)$, a tedy jsme znovu ověřili vzorec (G17). ♣

5.7.10. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$$

Řešení. Pišme
$$\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}. \tag{5.63}$$
Dále máme
$$\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x\cos 3x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2} + \cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}4 + \cos 2x\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}9\right).$$

Tedy
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 7.$$
Z (5.63) máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = 7\cdot 2 = 14.$$

♣

5.7.11. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz na
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6})}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}\tag{5.64}$$

Protože
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} = 1,$$
konverguje první část výrazu v (5.64) k -1.

Dále máme
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}} &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{4\sin^2 x - 3}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{(2\sin x-\sqrt{3})(2\sin x+\sqrt{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot 2\frac{(\sin x-\sin\frac{\pi}{3})(2\sin x+\sqrt{3})}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}\tag{5.65}$$

Protože
$$\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3}))\sin(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}))}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})},$$
dostáváme
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Z (5.64) a 5.65 pak máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= -1\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= -1\cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\\ &= -24.\end{aligned}$$

♣

5.7.12. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

Řešení. Nejprve upravíme

$$\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x}) = -2\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}.$$

Dále

$$\begin{aligned}&\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}\\ &= -2\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}\frac{xe^x-xe^{-x}}{2x^2}\frac{xe^x+xe^{-x}}{2x} \\ &= -2\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}\frac{e^{2x}-1}{2x}e^{-x}\frac{e^x+e^{-x}}{2}.\end{aligned} \tag{5.66}$$

Spočteme nejprve limitu prvního zlomku v (5.66). K tomu označme

$$f(y)=\frac{\sin y}{y},\quad g(x)=\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}.$$

Pak $\lim_{y\to 0} f(y)=1$, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ a

$$0=g(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}(e^{2x}-1)\Leftrightarrow x=0.$$

Předpoklad (P) Věty 4.2.20 je tak splněn pro libovolné okolí $P(0,\eta)$, a tedy

$$1=\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}.$$

Podobně využijeme faktu, že

$$\frac{1}{2}x(e^x+e^{-x})=0\Leftrightarrow x=0,$$

k odvození rovnosti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}=1.$$
Z Věty o aritmetice limit 4.2.2 a (5.66) pak plyne
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}=-2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{2}=-2.$$
♣

5.7.13. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Pišme
$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}&=2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\\&=2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.\end{aligned}\tag{5.67}$$
Funkce $\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ konverguje k 0 pro x jdoucí do nekonečna. Ze spojitosti sinu a Věty 4.2.20(S) plyne
$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0.$$
Funkce $2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ je omezená na $\mathbb{R}$, a tedy
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$$
dle Věty 4.2.15. ♣

5.7.14. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}}.$$

Řešení. Dle definice mocniny a^b (viz Definice 5.3.8) platí
$$(1+4x)^{\frac{1}{3x}}=\exp\left(\frac{1}{3x}\log(1+4x)\right),\quad x\in(-\frac{1}{4},\infty)\setminus\{0\}.$$
Protože
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\log(1+4x)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{\log(1+4x)}{4x}=\frac{4}{3}$$
a exp je spojitá funkce (viz (E7), z Věty 4.2.20(S) plyne
$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\log(1+4x)\right)=\exp(\frac{4}{3}).$$

♣

5.7.15. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n .$$

Řešení. Vezměme $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a označme

$$f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x, \quad x \in (|a|, \infty).$$

Pak f je dobře definovaná funkce splňující

$$f(x) = \exp(x \log(1+\frac{a}{x})), \quad x \in (|a|, \infty).$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{a}{x}) = \lim_{x\to\infty} a\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = a,$$

platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(a).$$

Je-li $a = 0$, máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 = \exp(a).$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(a).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$

♣

5.7.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Řešení. Protože

$$(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1)\right),$$

budeme počítat limitu $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1)$. Pišme

$$\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1) = (x^2+1)\cdot\frac{\log(2e^x-1)}{2e^x-2}\cdot 2\cdot\frac{e^x-1}{x}.$$

Protože $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ a $2e^x - 1 \neq 1$ pro $x \in P(0, 15)$, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Ze spojitosti funkce exp dostáváme

$$\lim_{x\to 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^2.$$

♣

5.7.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech je třeba spočítat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right).$$

Protože $\lim_{x\to 0} 1 + x3^x = 1$, existuje dle Věty 4.2.9(a) číslo $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$1 + x3^x > 0, \quad x \in B(0, \eta).$$

Dále máme pro $x \in B(0, \eta)$

$$0 = \frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} - 1 = \frac{x(2^x - 3^x)}{1 + x3^x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20(P) tedy plyne rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} = 1.$$

Protože

$$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} - 1 \right), \quad x \in P(0, \eta),$$

vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right) &= \frac{1}{x}\frac{2^x-3^x}{1+x3^x}\\ &= \frac{(e^{x\log 2}-1)-(e^{x\log 3}-1)}{x}\cdot\frac{1}{1+x3^x}\\ &= \left(\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\log 2-\frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\log 3\right)\frac{1}{1+x3^x}.\end{aligned}$$

Snadno ověříme předpoklady Věty 4.2.20(P) pro okolí $P(0,\eta)$ a dostaneme tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right)=\log 2-\log 3=\log\frac{2}{3}.$$

Závěr proto je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp(\log\frac{2}{3})=\frac{2}{3}.$$

♣

5.7.18. Příklad. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

Řešení. Ze zadání zřejmě plyne, že pro existenci limity je nutné, aby $a\notin\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Pro tato a počítejme limitu

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right).$$

Z vlastností funkce sinus víme, že existuje $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta>0$, takové, že

$$\sin x\neq\sin a,\quad x\in P(a,\eta).$$

Pro $x\in P(a,\eta)$ pak máme

$$\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)=\frac{\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)}{\frac{\sin x}{\sin a}-1}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}.$$

Podobně jako v Příkladu 5.7.9 odvodíme, že

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a.$$

Z Věty 4.2.20 a 4.2.2 tak plyne

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)=\frac{\cos a}{\sin a}=\operatorname{cotg} a.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \exp(\operatorname{cotg} a).$$

♣

5.7.19. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Je-li $a = 0$, je rovna zadaná limita 1. Nechť tedy $a \neq 1$. Protože $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = 0$, existuje $\eta \in (0,\infty)$ takové, že

$$\frac{a}{\sqrt{x}} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Protože $a \neq 0$, platí

$$\frac{a}{\sqrt{x}} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Položme

$$f(x) = \left(\cos \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Pak

$$f(x) = \exp\left(x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}}\right), \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Jelikož

$$x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{\log \cos \frac{a}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{a}{\sqrt{x}} - 1} \cdot \frac{\cos \frac{a}{\sqrt{x}} - 1}{\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot x,$$

platí díky Větě 4.2.20 rovnost

$$\lim_{x\to\infty} x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \cdot a^2.$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp\left(-\tfrac{a^2}{2}\right).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

■

5.7.20. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x+1)=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}(x^{10}+x+1)=\infty.$$

Existuje tedy $\eta\in(0,\infty)$ takové, že

$$x^2-x+1>0,\ x^{10}+x+1>0,\quad x\in P(\infty,\eta).$$

Tedy je výraz v zadané limitě dobře definován na $P(\infty,\eta)$.

Pro $x\in P(\infty,\eta)$ pak máme

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}&=\frac{\log(x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}))}{\log(x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}))}\\&=\frac{2\log x+\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\log x+\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}\\&=\frac{2+\frac{\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\log x}}{10+\frac{\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}{\log x}}.\end{aligned}\tag{5.68}$$

Protože je logaritmus spojitá funkce na $(0,\infty)$ (viz (L4)) a $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=1$, máme z Věty 4.2.20(S)

$$\lim_{x\to\infty}\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=0.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x\to\infty}\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})=0.$$

Z (5.68) pak plyne díky Větě 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1}{\log(x^{10}+x+1)}=\frac{1}{5}.$$

♣

5.7.21. Příklad. Nechť $a\in(0,\infty)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(a+x)+\log(a-x)-2\log a}{x^2}.$$

Řešení. Máme
$$\frac{\log(a+x)+\log(a-x)-2\log a}{x^2}=\frac{\log\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}{x^2}=\frac{\log\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{-1}{a^2}.$$
Tedy
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(a+x)+\log(a-x)-2\log a}{x^2}=-\frac{1}{a^2}.$$

♣

5.7.22. Příklad. Nechť $a>0$. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz jako
$$\begin{aligned}\frac{a^x-x^a}{x-a}&=\frac{1}{x-a}\left(e^{x\log a}-e^{a\log x}\right)=\frac{e^{a\log a}}{x-a}\left(e^{(x-a)\log a}-e^{a(\log x-\log a)}\right)\\&=\frac{e^{a\log a}}{x-a}\left(e^{(x-a)\log a}-1+1-e^{a(\log x-\log a)}\right)\\&=a^a\left(\frac{e^{(x-a)\log a}-1}{(x-a)\log a}\log a-\frac{e^{a(\log x-\log a)}-1}{a(\log x-\log a)}\cdot a\cdot\frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}\cdot\frac{x-a}{a}\cdot\frac{1}{x-a}\right)\end{aligned}$$
Protože je logaritmus prostá funkce (viz (L3)), $\log x\neq\log a$ pro $x\in P(a,a)$. Tedy
$$\lim_{x\to a}\frac{e^{(x-a)\log a}-1}{(x-a)\log a}=1.$$
Obdobně odvodíme, že
$$\lim_{x\to a}\frac{e^{a(\log x-\log a)}-1}{a(\log x-\log a)}=1,\qquad\lim_{x\to a}\frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}=1.$$
Tedy obdržíme
$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\left(\log a-1\right)$$

♣

5.7.23. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 2^x)}.$$

Řešení. Počítejme limitu
$$\lim_{y\to 2\pi} f(y),$$
kde
$$f(y)=\frac{\sin^2 y}{\log\cos y},\quad y\in P(2\pi,\frac{\pi}{2}).$$
Pak máme
$$f(y)=\frac{\sin^2 y}{(y-2\pi)^2}\cdot\frac{\cos y-1}{\log\cos y}\cdot\frac{(y-2\pi)^2}{\cos y-1}. \tag{5.69}$$
Položme
$$h(z)=\frac{\sin z}{z},\ z\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad g(y)=y-2\pi,\ y\in\mathbb{R}.$$
a
$$c=2\pi, D=0, A=1.$$
Protože $g(y)\neq D$ pro $y\in P(2\pi,11)$ a $\lim_{z\to D} h(z)=A$, z Věty 4.2.20(P) plyne
$$1=A=\lim_{y\to c}(h\circ g)(y)=\lim_{y\to 2\pi}\frac{\sin(y-2\pi)}{y-2\pi}=\lim_{y\to 2\pi}\frac{\sin y}{y-2\pi}.$$
Analogicky odvodíme rovnost
$$\lim_{y\to 2\pi}\frac{\cos y-1}{(y-2\pi)^2}=-\frac{1}{2}.$$
Zjevně
$$\lim_{y\to 2\pi}\frac{\cos y-1}{\log\cos y}=1.$$
Z (5.69) a Věty 4.2.2 tak plyne
$$\lim_{y\to 2\pi} f(y)=1\cdot 1\cdot(-2).$$
Nakonec označme
$$g(x)=\pi 2^x,\quad x\in\mathbb{R}.$$
Pak $g(x)\neq 2\pi$ pro $x\in P(1,1)$, a tedy z Věty 4.2.20(P) plyne
$$-2=\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 2^x)}.$$
♣

5.7.24. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(e^x-1)^2}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Označíme-li

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Protože

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

z jednostranné verze věty o aritmetice limit funkcí (viz Věta 4.2.2 a Poznámka 4.2.4), dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = -\infty.$$

Zadaná limita tedy neexistuje dle Věty **??**. ♣

5.7.25. Příklad. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení. Předpokládejme, že $0 < a \le b \le c$ a upravme zadaný výraz na

$$\left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x)\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x + \left(\frac{c}{a}\right)^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Označme $d_1 = \frac{b}{a}$, $d_2 = \frac{c}{a}$ a počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{3}\left(1 + d_1^x + d_2^x\right)\right).$$

Protože $1 \le d_1 \le d_2$, je funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

neklesající. Pokud $d_1 = d_2 = 1$, máme $a = b = c$ a zadaná limita je zjevně rovna a. Lze tedy předpokládat, že alespoň $d_2 > 1$. Pak je ale funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

rostoucí na $\mathbb{R}$, a tedy platí

$$1 + d_1^x + d_2^x = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$

Proto lze použít Větu 4.2.20(P) k odvození

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)}{\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)-1} = 1.$$

Tím pádem máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)}{\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_1^x-1}{x} + \frac{d_2^x-1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\log(d_1 d_2) \\
&= \log \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}(a^x+b^x+c^x)\right)^{\frac{1}{x}} &= a\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^x+\left(\frac{c}{a}\right)^x\right)\right)\right) \\
&= a\exp(\log\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}) \\
&= \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

♣

5.7.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \log(1+2^x)\log\bigl(1+\frac{3}{x}\bigr).$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned}
\log(1+2^x)\log(1+\frac{3}{x}) &= \bigl(x\log 2 + \log(1+2^{-x})\bigr)\cdot \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x} \\
&= 3\left(\log 2 + \frac{\log(1+2^{-x})}{x}\right) \cdot \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}.
\end{aligned}$$

Tedy z Věty 4.2.2 plyne

$$\lim_{x\to\infty} \log(1+2^x)\log(1+\frac{3}{x}) = 3\log 2.$$

♣

5.7.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\big((x+2)\log(x+4)-2(x+1)\log(x+1)+x\log x\big)\,.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned}
&(x+2)\log(x+4)-2(x+1)\log(x+1)+x\log x\\
&\quad= x\big(\log(x+4)-2\log(x+1)+\log x\big)+2\big(\log(x+4)-\log(x+1)\big)\\
&\quad= x\log\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}+2\log\frac{x+4}{x+1}\\
&\quad= x\frac{\log\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}}{\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}-1}\cdot\frac{2x-1}{(x+1)^2}+2\log\frac{x+4}{x+1}
\end{aligned}$$

a

$$\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}\neq 1,\quad x\in P(\infty,1),$$

máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\big((x+2)\log(x+4)-2(x+1)\log(x+1)+x\log x\big)\\
&\qquad=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x+1)^2}=2.
\end{aligned}$$

♣

5.7.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right).$$

Řešení. Máme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} y\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\sin y\frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y}=1.$$

Označíme-li tedy

$$f(y)=\operatorname{tg} y\left(\frac{\pi}{2}-y\right),\ y\in(0,\frac{\pi}{2}),\quad g(x)=\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R},$$

a

$$c=\infty, D=\frac{\pi}{2}, A=1,$$

pak z Věty 4.2.24 plyne

$$1=A=\lim_{x\to c}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right).$$

♣

5.7.29. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(a^2+1)+a} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2n}\right)\right)^n .$$

Řešení. Nalezněme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že platí $0 < \frac{\pi}{4} - \varepsilon < \frac{\pi}{4} + \varepsilon < 1$. Protože $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right) = \frac{\pi}{4}$, existuje $\eta \in (0,\infty)$ takové, že

$$\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x} \in B\left(\tfrac{\pi}{4},\varepsilon\right), \quad x \in P(\infty,\eta).$$

Definujme pro $x \in P(\infty,\eta)$ funkce

$$f(x) = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x(a^2+1)+a}, \quad g(x) = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)^x .$$

Jelikož

$$x(a^2+1)+a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{a^2+1},$$

existuje $\delta \in (0,\eta)$ takové, že

$$x(a^2+1)+a \neq 0, \quad x \in P(\infty,\delta)$$

Pak pro $x \in P(\infty,\delta)$ máme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x(a^2+1)+a}}{\frac{1}{x(a^2+1)+a}} \cdot \frac{x}{x(a^2+1)+a}.$$

Protože $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$ (viz (C15)), dostáváme z Věty 4.2.20

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{a^2+1}. \tag{5.70}$$

Dále máme

$$g(x) = \exp\left(x \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)\right), \quad x \in P(\infty,\eta). \tag{5.71}$$

Jestliže $a = 0$, platí $g(x) = 1$, a tedy $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 1$. V dalším proto předpokládejme, že $a \neq 0$. Pro $x \in P(\infty,\eta)$ platí pak $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x} \neq 1$, a tak lze upravit argument exponenciální funkce v (5.71) takto

$$\begin{aligned}
x \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right) &= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot x \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \\
&= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \\
&= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \cdot \frac{\sin\frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} \cdot \frac{a}{2x}.
\end{aligned}$$

Díky Větě 4.2.20 a Větě 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} x\log\Bigl(\operatorname{tg}\Bigl(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\Bigr)\Bigr) = \frac{\sqrt{2}\frac{a}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a. \tag{5.72}$$

Kombinací (5.72) a (5.70) máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \frac{e^a}{a^2+1}$$

(tento vzorec platí i pro $a = 0$).

Z Heineovy věty 4.2.16 nakonec obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}\frac{1}{n(a^2+1)+a}\Bigl(\operatorname{tg}\Bigl(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2n}\Bigr)\Bigr)^n = \frac{e^a}{a^2+1}.$$

♣

5.7.30. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení. Protože

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-}\frac{1-\sin y}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-}\left(\frac{\cos y}{\frac{\pi}{2}-y}\right)^2\frac{1}{1+\sin y} = \frac{1}{2},$$

máme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-}\frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-}\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}{1-\sin y}} = \sqrt{2}.$$

Označme

$$f(y) = \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}},\ y\in P_-(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad g(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],$$

a

$$c = 1, D = \frac{\pi}{2}, A = \sqrt{2}.$$

Protože

$$\lim_{x\to c_-} g(x) = D,\quad g(x) < \frac{\pi}{2},\ x\in(-1,1)\quad \text{a}\quad \lim_{y\to D_-} f(y) = A,$$

z Věty 4.2.17 máme

$$\sqrt{2} = A = \lim_{x\to c_-}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to 1_-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

♣

5.7.31. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ nenabývá na $P(\infty, 1)$ hodnoty 1 a
$$\lim_{y\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$$
dle Příkladu 5.7.30. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.24 tedy máme
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{2}.$$
Dále vyjádříme
$$x\left(\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\right) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}}.$$
Tedy
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}}\right)\\
&= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1\cdot\sqrt{1+1}} = 1.
\end{aligned}$$

♣

5.7.2. Derivace funkce. Při výpočtu derivace dané funkce f nejprve určíme definiční obor této funkce. V těch bodech definičního oboru, ve kterých je to možné, pak vypočteme hodnotu derivace pomocí vzorců pro derivace elementárních funkcí a vět z odstavce 5.1, zejména věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.16) a věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.22). V bodech definičního oboru funkce f, v nichž tento postup z nějakého důvodu selhává, se pokusíme vypočítat jednostranné derivace podle Definice 5.1.1, případně pomocí věty o limitě jednostranných derivací (Věta 5.2.10). Máme přitom na paměti, že definiční obor derivace může být vlastní podmnožinou definičního oboru funkce.

5.7.32. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = e^{x^2+2}$.

Řešení. Položme

$$F(x) = x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad G(y) = e^y,\ y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, neboť $f = G \circ F$. Funkce F a G mají vlastní derivace na $\mathbb{R}$, a tak snadno spočteme derivace

$$\begin{aligned} F'(y) &= e^y, \quad y \in \mathbb{R}, \\ G'(x) &= (x^2+2)' = (x^2)' + 2' = 2x + 0 = 2x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože je G spojitá v každém bodě $\mathbb{R}$, dostaneme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.22)

$$f'(x) = (F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = e^{G(x)} \cdot 2x = e^{x^2+2} \cdot 2x.$$

Definiční obor derivace funkce f je roven $\mathbb{R}$. ♣

5.7.33. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Řešení. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci součinu (Věta 5.1.16(b)) dostaneme

$$f'(x) = (x^2)' e^{-x^2} + x^2 (e^{-x^2})' = 2x e^{-x^2} + x^2 (e^{-x^2})'.$$

Zbylou derivaci snadno spočítáme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.22) pro $F(y) = e^y$ a $G(x) = -x^2$, neboť podle derivace elementárních funkcí dostáváme

$$\begin{aligned} F'(y) &= e^y, \qquad y \in \mathbb{R}, \\ G'(x) &= (-x^2)' = -(x^2)' = -2x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x e^{-x^2} + x^2 (e^{-x^2})' = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{G(x)}(-2x) \\ &= 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x). \end{aligned}$$

Snadno určíme, že definiční obor derivace je opět celé $\mathbb{R}$. ♣

5.7.34. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$, platí $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Vyřešením příslušné nerovnice dostáváme $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Položme

$$F(y) = \log y \quad \text{a} \quad G(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Pro derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{1}{y}, \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ G'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pomocí věty o derivaci složené funkce dostáváme pro $x \in \mathcal{D}(f)$

$$\begin{aligned} f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) &= \frac{1}{G(x)} \frac{2x(x^2+1) - (x^2+1)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2-1} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{x^4-1}. \end{aligned}$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Definiční obor funkce $x \mapsto \frac{4x}{x^4-1}$ je sice roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nicméně definiční obor derivace je menší. ♣

5.7.35. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $1 - e^{-x^2} \geq 0$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Derivaci funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme dvojnásobným užitím věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \left(1 - e^{-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (-e^{-x^2})(-2x) \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dopočítáme jednostranné derivace přímo podle definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Obdobně lze spočítat derivaci zleva za použití vztahu $h = -\sqrt{h^2}$ pro $h < 0$. Dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = -1\,.$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(0)$ neexistuje, ale platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$. ♣

5.7.36. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \max\{x, x^3\}$ v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém existuje. Pokud v některých bodech derivace neexistuje, vyšetřete existenci jednostranných derivací a pokud existují, spočtěte je.

Řešení. Funkci f můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x & \text{pro } x \in [-1, 0] \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Tedy zřejmě platí

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodech $x = 0, \pm 1$. Protože funkce f je spojitá v bodě -1, platí podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10)

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1_-} 3x^2 = 3, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \to -1_+} 1 = 1.$$

Odtud plyne, že $f'(-1)$ neexistuje. Podobně lze odvodit, že $f'(0)$ a $f'(1)$ neexistují a že platí

$$f'_-(0) = 1,\ f'_+(0) = 0,\ f'_-(1) = 3,\ f'_+(1) = 1.$$

♣

5.7.37. Příklad. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ platí, že funkce f je na jistém okolí bodu x definována předpisem $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Derivace v bodě je lokální pojem (Poznámka 5.1.6(e)), a proto pro $x \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^2)' \sin \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \left(\sin \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= 2x \sin \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

V bodě $x = 0$ spočteme derivaci podle definice

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin \tfrac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Věty 4.2.15, neboť funkce sinus je omezená. Platí tedy $f'(0) = 0$ a $\mathscr{D}(f') = \mathbb{R}$. ♣

5.7.38. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = x^{\log x}$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Podle definice obecné mocniny (Definice 5.3.8(c)) platí pro každé $x \in (0, \infty)$ vztah $f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Derivaci spočteme pomocí věty o derivování složené funkce (Věta 5.1.22), tedy

$$f'(x) = e^{\log^2 x} \cdot \left(\log^2 x\right)' = e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro definiční obor derivace platí $\mathscr{D}(f') = (0, \infty)$. ♣

5.7.39. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos(1 - x^2)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathscr{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$-1 \le 1 - x^2 \le 1$$

právě tehdy, když $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, je $\mathscr{D}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Podle věty pro derivaci složené funkce (Věta 5.1.22), kterou lze použít pro každé $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} (1 - x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}} (-2x) \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, a proto se můžeme pokusit jednostranné limity v bodech množiny $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ počítat jako limity jednostranných derivací podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10). Dostaneme tak

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\sqrt{2},\\
f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x\to -\sqrt{2}+} f'(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\infty,\\
f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x\to \sqrt{2}-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \infty.
\end{aligned}$$

Definičním oborem f' je tedy množina $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, přičemž hodnoty jednostranných derivací ve zbývajících bodech definičního oboru f jsou uvedeny výše. ♣

5.7.40. Příklad. Dokažte, že pro všechna $x \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x\,.$$

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(\frac{1}{x}\right)'\\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.9 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.7.41. Příklad. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P_n(\frac{1}{x}) & \text{pokud } x \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} P_n(\frac{1}{x})\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Pro nenulové reálné číslo x máme rovnosti

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=0}^m a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2), Příkladu 5.4.4 a věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) tak dostáváme

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \sum_{k=0}^m a_k \left(\lim_{x \to 0} \left(x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = 0.$$

Tím je ověřen indukční krok, a tak i celé tvrzení. ♣

5.7.3. l'Hospitalovo pravidlo.

5.7.42. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}{x}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) \quad \text{a} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Můžeme se tedy pokusit spočítat zadanou limitu pomocí l'Hospitalova pravidla 5.4.1. Dokážeme-li totiž existenci limity $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, můžeme z výše uvedeného l'Hospitalova pravidla usoudit na existenci limity $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, a navíc dostaneme $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}(1+x)' - \frac{1}{1+(1-x)^2}(1-x)'}{1}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2}\right) = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Zadaná limita je tedy rovna 1. ♣

5.7.43. Příklad. Nechť $a, b \in (0,\infty)$. Spočtěte limity

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log^a x}{x^b}.$$

Řešení. Z Příkladu 5.4.4 a Věty 4.2.7 plyne, že pro každé $\alpha \in (0,\infty)$ platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{(ax)^b}\cdot a^b = \infty.$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{(e^x)^b} = 0,$$

pomocí Věty 4.2.24 dostáváme

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^a}{\left(e^{\log x}\right)^b} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log^a x}{x^b}.$$

♣

5.7.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud $\alpha \leq 0$, posloupnost $\{a_n\}$ podle Příkladu 5.7.43 a Věty 4.2.16 nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum a_n$ diverguje. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 0$.

Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, $x \in (2,\infty)$, dostaneme pro $x \in (2,\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha x^{\alpha-1}(\log x)^\beta - \beta x^\alpha (\log x)^{\beta-1} x^{-1}\right] \\ &= \frac{x^{\alpha-1}(\log x)^\beta}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha - \beta(\log x)^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \left(-\alpha - \beta(\log x)^{-1}\right) = -\alpha < 0,$$

je funkce f na jistém okolí ∞ klesající. Lze tedy k vyšetření konvergence dané řady použít kondenzační kritérium (Věta 3.2.17). Máme

$$\sum_{n=2}^\infty 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^\infty 2^n = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^n n^\beta (\log 2)^\beta}.$$

Je-li $\alpha > 1$, platí

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{\alpha-1}\right)^n n^\beta (\log 2)^\beta}{\left(2^{\alpha-1}\right)^{n+1} (n+1)^\beta (\log 2)^\beta} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} < 1, \end{aligned}$$

a tedy řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Pokud $\alpha = 1$, řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$ (viz Větu 3.2.18).

Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$, nebo když $\alpha = 1$ a $\beta > 1$. ♣

5.7.45. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení. Postupnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) - 1 - 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin x - 2}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos(x) - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

♣

5.7.46. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Řešení. Zadaný výraz upravíme jako

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}. \tag{5.73}$$

Opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos x\sin x}{24x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3},\end{aligned}$$

z (5.73) máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{1}{3}.$$

♣

5.7.47. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Máme

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}, \tag{5.74}$$

a

$$\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1\right)\frac{\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1}.$$

Ukažme, že $\operatorname{arctg} x \neq x$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Označíme-li totiž $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, pak

$$f'(x) = 1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}>0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na $\mathbb{R}$, a proto z vlastnosti $f(0)=0$ plyne

$$f(x)>0,\ x\in(0,\infty),\quad f(x)<0,\ x\in(-\infty,0).$$

Proto $f(x) \neq 0$ na libovolném $P(0,\eta)$, a tedy $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \neq 1$ na libovolném $P(0,\eta)$. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20 a vlastnosti (C15) tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1} = 1.$$

Dále máme pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}\,.$$

Z (5.74) tedy plyne

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

♣

5.7.48. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} &= \frac{e^{x\log x} - e^{\log x}}{\log x - x + 1} \\ &= e^{\log x} \frac{e^{(x-1)\log x} - 1}{(x-1)\log x} \cdot \frac{\log x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1}. \end{aligned}$$

Dále plyne z l'Hospitalova pravidla 5.4.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} -2x = -2.$$

Z Věty 4.2.20 a 4.2.2 tedy máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} = -2.$$

♣

5.7.49. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz do tvaru

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}\\
&=\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}.
\end{aligned}
$$

Zřejmě platí

$$x+\sqrt{x^2+1}-1=0 \Leftrightarrow x=0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}=1.$$

Zjevně $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}=1$. Dále

$$
\begin{aligned}
&\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}\\
&=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}\\
&=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}.
\end{aligned}
$$

Protože

$$\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}=1 \Leftrightarrow x=0,$$

platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}=1.$$

Nakonec dostaneme z l'Hospitalova pravidla 5.4.1 rovnost

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}&=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+1}-1}\\
&=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}\\
&=-1.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}.$$

♣

5.7.50. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right).$$

Řešení. Nejprve upravme zadaný výraz na

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&\quad-\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}
\end{aligned}$$

První část dále upravíme

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left(1-\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(x-\log e^x-\log(1+xe^{-x})\right)\\
&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(-\log(1+xe^{-x})\right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)=0.$$

Dále máme pro $a = \sqrt{x^2+x+1}$, $b = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ rovnost

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right) \cdot \frac{\log(e^x+x)}{x} \\
&= \frac{a^6-b^6}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5} \cdot \frac{\log(e^x+x)}{x} \\
&= \frac{(x^2+x+1)^3-(x^3+x^2+x+1)^2}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5} \cdot \frac{\log(e^x+x)}{x} \\
&= \frac{x+\sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5} \cdot \frac{\log(e^x+x)}{x}
\end{aligned}$$

(zde c_i, $i \in \{1,\dots,4\}$, jsou reálná čísla). Platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\log(1+xe^{-x})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{-x+\sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sum_{i=1}^4 c_i x^{i-1}}{\frac{a^5}{x}+\frac{a^4b}{x}+\frac{a^3b^2}{x}+\frac{a^2b^3}{x}+\frac{ab^4}{x}+\frac{b^5}{x}} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \cdot \frac{\log(e^x+x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}.$$

♣

5.7.51. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}}\right).$$

Řešení. Je-li $a = 0$, zadaná limita se zřejmě rovná 0. V dalším výpočtu tedy předpokládejme, že $a \neq 0$.

Označme pro $x \in (|a|, \infty)$ funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x}\log(x+a), \quad g(x) = \frac{x+a+1}{x+a}\log x.$$

Spočtěme nejdříve limitu $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$. Máme totiž

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{1}{x(x+a)}\Big((x+a)(x+1)\log(x+a) - x(x+a+1)\log x\Big) \\
&= \frac{1}{x(x+a)}\big(x^2(\log(x+a) - \log x) + x(a+1)(\log(x+a) - \log x) \\
&\qquad + a\log(x+a)\big) \\
&= \frac{1}{x(x+a)}\Big(x^2\log(1+\frac{a}{x}) + x(a+1)\log(1+\frac{a}{x}) + a\log(x+a)\Big) \\
&= \frac{x}{x+a}\log(1+\frac{a}{x}) + \frac{a+1}{x+a}\log(1+\frac{a}{x}) + \frac{a}{x(x+a)}\log(x+a).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Označme dále pro $x \in (|a|, \infty)$

$$h(x) = x^2\log(1+\frac{a}{x}) + x(a+1)\log(1+\frac{a}{x}) + a\log(x+a).$$

Pak

$$h(x) = x\left(\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}\cdot a + (a+1)\log(1+\frac{a}{x}) + a\cdot\frac{\log(x+a)}{x}\right).$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \begin{cases}\infty, & a > 0,\\ -\infty, & a < 0.\end{cases}$$

V obou případech tak existuje $\eta \in (|a|, \infty)$ takové, že $h(x) \neq 0$ na (η, ∞). Tedy i

$$f(x) - g(x) = \frac{h(x)}{x(x+a)} \neq 0, \quad x \in (\eta, \infty).$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= e^{\frac{x+1}{x}\log(x+a)} - e^{\frac{x+a+1}{x+a}\log x} \\
&= e^{f(x)} - e^{g(x)} \\
&= e^{g(x)}\cdot\frac{e^{f(x)-g(x)} - 1}{x}\cdot(f(x) - g(x)).
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Dále

$$\begin{aligned} e^{g(x)}(f(x)-g(x)) &= xe^{\frac{\log x}{x+a}}\frac{1}{x(x+a)}h(x) \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}}\frac{h(x)}{x+a} \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}}\Big(\frac{x}{x+a}\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}a+\frac{x}{x+a}(a+1)\log(1+\frac{a}{x}) \\ &\qquad + \frac{1}{x+a}a\log(x+a)\Big). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} e^{g(x)}(f(x)-g(x)) = a.$$

Z (5.75) tedy plyne

$$\lim_{x\to\infty}\Big((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}}\Big) = a.$$

♣

5.7.4. Aplikace na vyšetřování konvergence číselných řad.

5.7.52. Věta. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim a_n = A$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu A splňující $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(P) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \neq A$,
(S) $A \in \mathbb{R}$ a funkce f je v bodě A spojitá.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = B.$$

5.7.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla, verze $\frac{0}{0}$, platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy dostáváme rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+4}} = 1.$$

Odtud a z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Zadaná řada má zřejmě všechny členy kladné a platí $\frac{1}{2} \in (0, \infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy vyplývá, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Tato řada ale konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{4}{3} > 1$. Tedy zadaná řada také konverguje. ♣

5.7.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$, platí

$$\log\left(\frac{x^2+4}{x(x-1)}\right) = \log\left(\frac{x^2-x+x+4}{x^2-x}\right) = \log\left(1 + \frac{x+4}{x^2-x}\right).$$

Podle Příkladu 5.7.5

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

navíc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2-x} = 0$$

a pro každé $x \in P(\infty, 2)$ platí

$$\frac{x+4}{x^2-x} \neq 0.$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}} = 1.$$

Podle Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{n+4}{n^2-n}\right)}{\frac{n+4}{n^2-n}} = 1.$$

Navíc zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, platí

$$\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right) > 0,$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, platí $a_n > 0$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5). Podle tohoto kritéria, varianty (a), konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-n}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{n^2-n} = 1$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11, diverguje podle limitního srovnávacího kritéria také zadaná řada. ♣

5.7.55. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \arccos(\log(e - \tfrac{1}{n})).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$. Zadanou řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arccos(\log(e - \tfrac{1}{n})).$$

Platí
$$\lim_{x\to\infty}(e-\tfrac{1}{x})=e,$$
přičemž pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $e-\frac{1}{x}\neq e$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20, varianta (P)) tedy dostáváme, že
$$\lim_{x\to\infty}\log(e-\tfrac{1}{x})=1.$$
Podle (C4) a (C5) platí $\lim_{y\to 1-}\arccos(y)=0$ a navíc pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\log(e-\frac{1}{n})\neq 1$. Z Věty 5.7.52 tedy vyplývá, že
$$\lim_{n\to\infty}\arccos(\log(e-\tfrac{1}{n}))=0.$$
Posloupnost $\{e-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Funkce log je na $(0,\infty)$ rostoucí podle (L3) a funkce arccos je na $[-1,1]$ klesající podle (C4). Posloupnost $\{\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$ je tudíž klesající. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). ♣

5.7.56. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccotg}(n)(-1-\tfrac{1}{n})^{n}.$$

Řešení. Přepíšeme zadanou řadu ve tvaru
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{arccotg}(n)(1+\tfrac{1}{n})^{n}.$$
Víme, že posloupnost $\{\operatorname{arccotg}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a že platí $\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccotg}(n)=0$. Z Leibnizova kritéria konvergence konvergence číselných řad (Věta 3.3.1) tedy plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{arccotg}(n)$$
konverguje. Z Příkladu 2.5.2 víme, že posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a rostoucí. Z Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5(A)) plyne, že i zadaná řada konverguje. ♣

5.7.57. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cos(5n)\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{n+3}.$$

Řešení. Jak víme z Příkladu 3.3.7(b), řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n)$ má omezené částečné součty. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}(a_n) \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n}{n+3}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Odtud plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < a_n \leq a_1 = \frac{2}{1+\sqrt{3}} < 1 < \frac{\pi}{2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože funkce tangens je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (viz (G18)), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Podle (G4) je funkce tangens spojitá v bodě 0, tedy $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) = 0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \neq 0$. Podle Věty 5.7.52, varianta (P) tudíž platí

$$\lim b_n = \lim \operatorname{tg}(a_n) = 0.$$

Dle Dirichletova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (D)) je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n) \operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n+3-3}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3},$$

a tedy je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Navíc je omezená, neboť zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{4} \leq c_n < 1.$$

Podle Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

5.7.58. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}\,\log(100n)}{\sqrt[4]{n^3+n} + \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}\,\log(100x)}{\sqrt[4]{x^3+x}+\sqrt{x}}, \quad x \in (0,\infty).$$

Pak pro $x \in (0,\infty)$ platí

$$\begin{aligned}
f'(x) = {} & \frac{1}{\left(\left(x^3+x\right)^{\frac14}+x^{\frac12}\right)^2}\cdot \\
& \Bigg[\left(\frac13\left(x^2+1\right)^{-\frac23}(2x+1)\log(100x)+(x^2+1)^{\frac13}\frac{100}{100x}\right)\left((x^3+x)^{\frac14}+x^{\frac12}\right) \\
& -\left((x^2+1)^{\frac13}\log(100x)\left(\frac14(x^3+x)^{-\frac34}(3x^2+1)+\frac12 x^{-\frac12}\right)\right)\Bigg] \\
= {} & \frac{x^{\frac{5}{12}}\log(100x)}{\left(\left(x^3+x\right)^{\frac14}+x^{\frac12}\right)^2} \\
& \cdot\Bigg[\left(\frac13\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac23}2\left(1+x^{-1}\right)+\frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\cdot x^{\frac23-1+1-\frac43}}{\log(100x)}\right)\left(\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}\right) \\
& -\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\left(\frac14\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac34}3\left(1+(3x)^{-1}\right)+\frac12 x^{-\frac12-\frac94+2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
g(x) = {} & \Bigg[\left(\frac13\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac23}2\left(1+x^{-1}\right)+\frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\cdot x^{\frac23-1+1-\frac43}}{\log(100x)}\right)\left(\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}\right) \\
& -\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\left(\frac14\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac34}3\left(1+(3x)^{-1}\right)+\frac12 x^{-\frac12-\frac94+2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

obdržíme

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \left(\frac23+0\right)(1+0)-1\left(\frac34+0\right) = -\frac{1}{12}.$$

Existuje tedy $y \in (0,\infty)$ takové, že pro $x \in (y,\infty)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na intervalu (y,∞). Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\frac{\log(100x)}{x^{\frac{1}{12}}}}{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}} = 0,$$

(použili jsme Příklad 5.4.4).

Na základě těchto výpočtů tedy vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ od indexu n_0 splňujícího $n_0 > y$ konverguje monotónně k 0. Dle Věty 3.3.1 tedy zadaná řada konverguje.

Řada $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ však nekonverguje, což snadno ověříme srovnáním z řadou $\sum \frac{\log n}{n^{\frac{1}{12}}}$ (tj. použijeme Větu 3.2.5 a Příklad 5.7.44). ♣

5.7.59. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \left(\operatorname{cotg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4-2x} - \sin \frac{\pi}{2+x}, \quad x \in (-1,1).$$

Jelikož $0 < \frac{\pi}{4-2x} < \pi$ a $2 + x \neq 0$ pro $x \in (-1,1)$, je f dobře definovaná. Počítejme

$$f'(x) = \frac{-\pi}{\left(\sin \frac{\pi}{4-2x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(4-2x)^2} - \cos \frac{\pi}{2+x} \cdot \frac{-\pi}{(2+x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Pak $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-\pi}{4}$.

Dle Věty 5.4.1 proto platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(x)}{1} = -\frac{\pi}{4}. \tag{5.76}$$

Existuje tedy okolí $P_+(0,\delta)$ takové, že $f(x) < 0$.

Z Heineovy věty 4.2.17 plyne, že pro $n > (\delta)^{-1}$ jsou čísla $-a_n$ kladná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{8}.$$

Srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) odvodíme pomocí Věty 3.2.18 divergenci řady $\sum(-a_n)$. Zadaná řada tedy diverguje. ♣

5.7.5. Průběh funkce. Vyšetřením průběhu zadané funkce rozumíme postupné zjištění všech důležitých informací o dané funkci, díky nimž bychom na konci měli být schopni načrtnout graf funkce. Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme zejména následující její vlastnosti (uvedené pořadí je pouze orientační):

- definiční obor,
- symetrie (zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická),
- spojitost (případně jednostranná) ve všech bodech definičním oboru,

- průsečíky s oběma souřadnými osami,
- jednostranné limity v v krajních bodech definičního oboru (což mohou být i $\pm\infty$) a ve všech bodech nespojitosti,
- hodnota první derivace, případně jednostranné první derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly monotonie,
- lokální a globální extrémy,
- obor hodnot,
- hodnota druhé derivace, případně jednostranné druhé derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly konvexity a konkavity,
- inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu.

5.7.60. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{|4x|}{4+x^2}\right)$$

Řešení. Definičním oborem funkce arccos je interval $[-1,1]$. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq \tfrac{|4x|}{4+x^2} \leq 1\}.$$

Platí tedy $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když platí následující dvě nerovnosti:

$$-1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1.$$

První z nerovností platí právě tehdy, když

$$x^2 + |4x| + 4 \geq 0$$

a podobně druhá nerovnost platí právě tehdy, když

$$x^2 - |4x| + 4 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 \pm |4x| + 4 = (|x| \pm 2)^2 \geq 0,$$

dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce $\frac{|4x|}{4+x^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a funkce arccos je spojitá na intervalu $[-1,1]$. Odtud a z věty o spojitosti složené funkce plyne, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru, tedy v bodech $\pm\infty$. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|4x|}{4+x^2} = 0,$$

funkce arccos je spojitá v bodě 0 a platí $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Dle věty o limitě složené funkce, varianta (S), tedy platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $f(0) = \frac{\pi}{2}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pro určení průsečíků grafu funkce s osou x musíme vyřešit rovnici $f(x) = 0$, tedy nalézt kořeny funkce f. Protože jediným kořenem funkce arccos je bod 1, platí $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\frac{|4x|}{4+x^2} = 1$. To nastane právě tehdy, když $(|x|-2)^2 = 0$, tedy $x = \pm 2$. Funkce f má tedy právě dva průsečíky s osou x, a to v bodech $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Funkce f je zřejmě sudá. Není lichá, neboť například není splněna podmínka $f(0) = 0$. Není ani periodická, neboť například $f(-2) = f(2) = 0$, ale žádné další kořeny funkce nemá.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Pro $x \in (0,2) \cup (2,\infty)$ jest

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{16x^2}{(4+x^2)^2}}} \cdot \frac{4(4+x^2)-2x\cdot 4x}{(4+x^2)^2} \\ &= \frac{x^2-4}{\sqrt{(x^2-4)^2}} \cdot \frac{4}{4+x^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (0,2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (2,\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Uvedený výpočet není možné použít pro $x = 2$. V tomto bodě musíme spočítat jednostranné derivace. Jak už víme, funkce f je v bodě 2 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2_-} \frac{-4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}$$

a

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2_+} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Protože $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, funkce f nemá v bodě 2 derivaci.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ spočítáme $f'(x)$ podobně jako výše, anebo použijme Příklad 5.6.3. Obdržíme tak

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0). \end{cases}$$

a

$$f'_-(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f'_+(-2) = \frac{1}{2}.$$

Funkce f nemá tedy v bodě -2 derivaci.

Posledním bodem, v němž jsme dosud nevyšetřili hodnoty derivace (či jednostranných derivací) funkce f, je bod 0. Funkce f je v bodě 0 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{4}{4 + x^2} = 1$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{-4}{4 + x^2} = -1.$$

Protože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, funkce f nemá v bodě 0 derivaci.

Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -2)\colon\ f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (-2, 0)\colon\ f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, 2)\colon\ f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (2, \infty)\colon\ f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -2]$,
- rostoucí na $[-2, 0)$,
- klesající na $[0, 2]$,
- rostoucí na $[2, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna $\frac{\pi}{2}$, a lokální minima v bodech ± 2, přičemž hodnota obou těchto minim je rovna 0. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému, a tedy funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedené body $-2, 0, 2$. Z tohoto pozorování a z intervalů monotonie dále plyne, že všechny tři uvedené lokální extrémy jsou ve skutečnosti globální.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality extrémů $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\pm 2, 0]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Protože f je spojitá na $[0, 2]$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ a $f(2) = 0$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $2, 0, 2$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2), \\ \frac{-8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -2)\colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (-2, 0)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, 2)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (2, \infty)\colon f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, -2]$,
- ryze konvexní na $[-2, 0)$,
- ryze konvexní na $[0, 2]$,
- ryze konkávní na $[2, \infty)$.

Z těchto výsledků ovšem nevyplývá, zda je nebo není funkce f konvexní na celém intervalu $[-2, 2]$. Tuto otázku musíme vyšetřit. Povšimneme si, že platí $f(-2) = f(2) = 0$ a zároveň $f(0) > 0$. Dosadíme-li $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 2$ do podmínky (ii) Lemmatu 5.5.9, zjistíme, že tato podmínka není splněna, neboť by muselo platit

$$\frac{f(0) - f(-2)}{2} \leq \frac{f(2) - f(0)}{2},$$

a tedy $\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4}$. Tato podmínka je ale podle lemmatu ekvivalentní konvexitě funkce f na intervalu $[-2, 2]$, takže jsme dokázali, že f na tomto intervalu není konvexní. (Příklad 5.6.8 nabízí alternativní postup ukazující, že f není konvexní na intervalu $[-2, 2]$.)

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ i v ∞ asymptotu $\frac{\pi}{2}$ (konstantní funkci). ♣

5.7.61. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}(|x - \sqrt{3}|).$$

Řešení. Definičním oborem funkce arctg je množina $\mathbb{R}$, takže $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce arctg i funkce $|\cdot|$ (absolutní hodnota) jsou spojité na $\mathbb{R}$. Odtud, z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Funkce f není lichá například proto, že $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq 0$. Funkce f není ani sudá, neboť například $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$, ale $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, a tedy $f(-\sqrt{3}) \neq -f(\sqrt{3})$. Periodicitu funkce f vyšetříme později.

Protože $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{3}]$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom buď platí $x = 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{3} > 0$ nebo $x \neq 0$ a $f(x) \geq |x| > 0$. Platí tedy $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, 0)$. Potom $f(x) = -x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní nechť $x \in (0, \sqrt{3})$. Potom $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Konečně nechť $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. Potom $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní vyšetříme existenci derivace v bodech 0 a $\sqrt{3}$, pro které jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v těchto bodech. Funkce f je v obou těchto bodech spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{-2-(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = -\frac{5}{4},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4},$$

$$f'_-(\sqrt{3}) = \lim_{x\to \sqrt{3}_-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}_-} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 0,$$

$$f'_+(\sqrt{3}) = \lim_{x\to \sqrt{3}_+} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}_+} \frac{2+(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Z uvedených výsledků vyplývá, že funkce f nemá první derivaci v bodech 0 a $\sqrt{3}$. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{3})\colon\ f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (\sqrt{3}, \infty)\colon\ f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, 0]$,
- rostoucí na $[0, \sqrt{3}]$,
- rostoucí na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\frac{\pi}{3}$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Zbývá vyšetřit bod $x = \sqrt{3}$. V tomto bodě ale funkce f nemá lokální extrém, protože f je rostoucí na pravém okolí tohoto bodu a klesající na levém okolí tohoto bodu. Tudíž funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedený bod $\sqrt{3}$.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[0, \frac{\pi}{3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [\frac{\pi}{3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $[0, \infty]$, $f(0) = \frac{\pi}{3}$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) =$

∞, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[\frac{\pi}{3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [\frac{\pi}{3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}\setminus\{0, \sqrt{3}\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $0, \sqrt{3}$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt{3}), \\ \frac{-2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, 0) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (0, \sqrt{3}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (\sqrt{3}, \infty) \colon f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, \sqrt{3}]$
- ryze konkávní na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Ověřme, že funkce f není konkávní na intervalu $[0, \infty)$. Byla-li by totiž f konkávní na tomto intervalu, platila by podle Příkladu 5.6.8 nerovnost $f'_-(\sqrt{3}) \geq f'_+(\sqrt{3})$. Tak však dle předchozích výpočtů neplatí.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}(f')$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = -1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-1)\cdot x) &= \lim_{x\to-\infty} (-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3}) + x) \\ &= \lim_{x\to-\infty} (-\operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ asymptotu $-x + \frac{\pi}{2}$. Podobně platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x) &= \lim_{x\to\infty}(x+\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})-x)\\ &= \lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Funkce f má tedy v ∞ asymptotu $x + \frac{\pi}{2}$. ♣

5.7.62. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log(4+x^2) + 3\operatorname{arccotg}(\tfrac{2}{x}).$$

Řešení. Definičním oborem funkce log je interval $(0,\infty)$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4 + x^2 \in (0,\infty)$. Definičním oborem funkce arccotg je $\mathbb{R}$. Definičním oborem funkce $x \mapsto \frac{2}{x}$ je množina $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tedy celkem platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce f spojitá na svém definičním oboru, tedy na množině $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru. Jest

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, &&\lim_{x\to 0_-} f(x) = \log(4) + 3\pi,\\ &\lim_{x\to 0_+} f(x) = \log(4), &&\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.\end{aligned}$$

Z výše uvedených limit funkce f v bodech $\pm\infty$ vyplývá, že funkce není periodická ani lichá. Z jednostranných limit v bodě 0 dále vyplývá, že funkce f není ani sudá.

Vzhledem k tomu, že $0 \notin \mathcal{D}(f)$, funkce f nemá průsečík s osou y. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4 + x^2 > 1$. Protože je funkce log je na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ také $\log(4+x^2) > \log(1) = 0$. Dále víme, že $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0,\pi)$. Celkem tedy pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ dostáváme

$$f(x) \geq \log(4+x^2) > 0.$$

Odtud vyplývá, že funkce f nemá žádný průsečík s osou x.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Jest

$$f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} + \frac{-3}{1+\frac{4}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^2} = \frac{2x+6}{x^2+4} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\begin{aligned}&\forall x \in (-\infty,-3)\colon f'(x) < 0,\\ &\forall x \in (-3,0)\colon f'(x) > 0,\\ &\forall x \in (0,\infty)\colon f'(x) > 0.\end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, 0)$,
- rostoucí na $(0, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální minimum v bodě $x = -3$, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\log(13) + 3 \operatorname{arccotg}(\frac{-2}{3})$. Toto minimum není globální, protože $\lim_{x\to 0+} f(x) < f(-3)$, a tedy na pravém prstencovém okolí bodu 0 existuje bod y takový, že $f(y) < f(-3)$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Tudíž funkce f nemá žádné jiné lokální extrémy než výše uvedený bod -3. Globální extrémy tedy tato funkce nemá vůbec.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že

$$f(x) \in (f(-3), \infty) \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0)$$

a

$$f(x) \in (\log(4), \infty) \quad \text{pro } x \in (0, \infty).$$

Protože $f(-3) > \log(4)$, vyplývá odtud, že $\mathcal{H}(f) \subset (\log(4), \infty)$. Protože f je spojitá na $(0, \infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \log(4)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $(\log(4), \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = (\log(4), \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Jest

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + 6x - 4}{(x^2 + 4)^2} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že

$$x^2 + 6x - 4 = (x - x_1)(x - x_2), \quad \text{kde } x_1 = -3 - \sqrt{13},\ x_2 = -3 + \sqrt{13},$$

a že

$$x_1 < -3 < 0 < x_2.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, x_1)\colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (x_1, 0)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, x_2)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (x_2, \infty)\colon f''(x) < 0. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, x_1]$,

- ryze konvexní na $[x_1, 0)$,
- ryze konvexní na $(0, x_2]$,
- ryze konkávní na $[x_2, \infty)$.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body x_1 a x_2. Víme, že existují vlastní derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$ a f' je zjevně spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z nerovností (5.77) vidíme, že jsou splněny podmínky Věty 5.5.19 (postačující podmínky pro inflexi). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f. Z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty.$$

Funkce f tedy nemá asymptotu v $-\infty$ ani v ∞.

Závěrem ještě určíme jednostranné limity funkce f' v bodě 0. Tato informace se bude při náčrtu grafu funkce f hodit. Jest

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

♣

5.7.63. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x^2 - x + 2)e^{|x+3|-3}.$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Protože $f(0) = 2$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, 2]$. Rovnice $x^2 - x + 2 = 0$ nemá žádné reálné řešení a navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e^{|x+3|-3} > 0$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Z toho vyplývá, že f není ani periodická, ani lichá. Není ani sudá, neboť například $f(-3) = 14e^{-3}$, ale $f(3) = 8e^3$, a tedy $f(-1) \neq -f(1)$.

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, -3)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^{-x-6}$, a tedy

$$f'(x) = (-x^2 + 3x - 3)e^{-x-6}.$$

Nyní nechť $x \in (-3, \infty)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$, a tedy

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Zbývá vyšetřit existenci derivace v bodě $x = -3$, pro který jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v tomto bodě. Funkce f je v bodě $x = -3$ spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$\begin{aligned} f'_-(-3) &= \lim_{x \to -3_-} f'(x) = \lim_{x \to -3_-} (x^2 - x + 2)e^{-x-6} = -21e^{-3}, \\ f'_+(-3) &= \lim_{x \to -3_+} f'(x) = \lim_{x \to -3_+} (x^2 - x + 2)e^{x} = 7e^{-3}. \end{aligned}$$

Protože $f'_-(-3) \neq f'_+(-3)$, funkce f nemá první derivaci v bodě -3. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Protože ani jeden z mnohočlenů $(-x^2 + 3x - 3)$ a $(x^2 + x + 1)$ nemá žádný reálný kořen, plyne z výše uvedeného výpočtu, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -3) \colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (-3, \infty) \colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě -3, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $14e^{-3}$. Z těchto intervalů monotonie též plyne, že f nemá jiné globální a ani lokální extrémy.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[-3, 14e^{-3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [14e^{-3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $(-\infty, -3]$, $f(-3) = 14e^{-3}$ a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[14e^{-3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [14e^{-3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodě -3. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x-6}(-2x+3) & \text{pokud } x \in (-\infty, -3), \\ e^x(x+2)(x+1) & \text{pokud } x \in (-3, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -3)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (-3, -2)\colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (-2, -1)\colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (-1, \infty)\colon f''(x) > 0. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konvexní na $(-\infty, -3]$,
- ryze konvexní na $[-3, -2]$,
- ryze konkávní na $[-2, -1]$,
- ryze konvexní na $[-1, \infty)$.

Protože $f'_-(-3) \le f'_+(-3)$, je f dle Příkladu 5.6.8 ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -2]$.

Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. Potom buď $x = -3$ a neexistuje $f'(-3)$ nebo $x \neq -3$ a platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body $x_1 = -2$ a $x_2 = -1$. Víme, že f' existuje a spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Díky (5.78) jsou splněny podmínky Věty 5.5.19 (postačující podmínky pro inflexni). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f a z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

funkce f nemá v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu. ♣

5.7.64. Příklad. Vyštřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x} - 3}.$$

Řešení. Zadaná funkce je zřejmě dobře definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{27\}$. Dále je díky Větám 4.2.5 a 4.3.3 na svém definičním oboru spojitá. Při výpočtu limit v krajních bodech definičního oboru dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = \infty,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = -\infty,\\
\lim_{x\to 27+} f(x) &= \infty, \qquad \lim_{x\to 27-} f(x) = -\infty.
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f)$ není symetrický a ani periodický, funkce není ani sudá, ani lichá, či periodická.

Při výpočtu první derivace funkce f můžeme v bodech $\mathcal{D}(f)\setminus\{0\}$ použít Větu 5.1.16 a obdržíme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}}\right)'\\
&= \frac{\frac{10}{9}x^{\frac{1}{9}}\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{10}{9}}\frac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{4}{3}}}\left(3x^{\frac{1}{3}}-10\right), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 27\}.
\end{aligned}$$

V bodě 0 dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{9}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f'(x) > 0,\\
&\forall x \in (0, 27)\colon\ f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (27, \frac{1000}{27})\colon\ f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (\frac{1000}{27}, \infty)\colon\ f'(x) > 0.
\end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $(-\infty, 0]$,
- klesající na $[0, 27)$,
- klesající na $(27, \frac{1000}{3}]$,

- rostoucí na $[\frac{1000}{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Vzhledem k (5.79) nemá f globální extrémy. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna 0, a má lokální minimum v bodě $\frac{1000}{27}$, přičemž hodnota tohoto minima je $\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}$. Z těchto intervalů též vyplývá, že f jiných lokálních extrémů nemá.

Určíme nyní $\mathcal{H}(f)$. Jelikož je f spojitá na intervalu $(-\infty, 27)$ i na intervalu $(27, \infty)$, dostáváme kombinací Věty 4.3.6, (5.79) a znalosti lokálních extrémů f, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}, \infty).$$

Druhou derivaci funkce f spočteme v bodech $\mathcal{D}(f)\setminus\{0\}$. Pro tyto body platí

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{4}{3}}}\right)' \\
&= \frac{\left(\frac{12}{9}x^{-\frac{5}{9}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{9}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{4}{3}} - \left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right)\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{8}{3}}} \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{8}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{8}{3}}}\left(\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{9}} - \frac{10}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right) - \frac{4}{9}x^{\frac{2}{9}}\left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right)\right) \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{8}{9}}}{3\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{8}{3}}}\left(-2x^{\frac{1}{3}}+10\right).
\end{aligned}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (0, 27)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (27, 125)\colon\ f''(x) > 0, \\
&\forall x \in (125, \infty)\colon\ f''(x) < 0.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Podle Věty 5.5.14 je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, 27)$,
- ryze konvexní na $(27, 125]$,
- ryze konkávní na $[125, \infty)$.

Jelikož je $f'(0) = 0$, je podle Příkladu 5.6.8 f ryze konkávní na $(-\infty, 27)$. Dále z Věty 5.5.19 plyne, že bod 125 je inflexním bodem funkce f. Vzhledem k (5.80) funkce f jiných inflexních bodů nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) &= \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}} - y^3 (y-3)^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 (y - (y-3))}{(y-3)^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} (y-3)^{\frac{1}{3}} + (y-3)^{\frac{2}{3}} \right)} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{3y^2}{\left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{2}{3}} \right)} = \infty.
\end{aligned}$$

Z této limity a Věty 4.2.20 nyní plyne

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} - x \right) = \infty.$$

Z těchto výpočtů plyne, že f nemá v ∞ asymptotu.

Obdobně obdržíme, že

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

dále

$$\lim_{y\to-\infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) = \infty,$$

a tedy

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \infty.$$

Ani v $-\infty$ tedy funkce f asymptotu nemá. ♣

5.7.65. Příklad. Vyštřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{\log^2 x}}, & x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$, nemůže být f ani sudá, lichá či periodická. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$

je f spojitá v bodech 0 a 1. Zřejmě je též spojitá v bodech množiny $(0,1) \cup (1,\infty)$, a tedy je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Limita v nekonečnu je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = \infty.$$

Počítáme-li první derivaci funkce f, obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + xe^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot \frac{2}{x} \cdot (\log x)^{-3} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (\log x)^{-3} \left[\log^3 x + 2\right], \quad x \in (0,1) \cup (1,\infty). \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítáme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1.$$

Konečně díky Větě 5.2.10 dostáváme

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\log^3 x + 2\right) \cdot \lim_{x\to 1} \left(\frac{\log^{-4} x}{e^{\log^{-2} x}} \log^{-3} x \log^4 x\right) = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili Větu 4.2.20 a fakt $\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, viz Příklad 5.7.43.)

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (0, e^{-\sqrt[3]{2}})\colon f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (e^{-\sqrt[3]{2}}, 1)\colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (1, \infty)\colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $[0, e^{-\sqrt[3]{2}}]$,
- klesající na $[e^{-\sqrt[3]{2}}, 1]$,
- rostoucí na $[1, \infty)$.

V bodech 0 a 1 má tedy funkce f globální minimum o hodnotě 0, v bodě $e^{-\sqrt[3]{2}}$ má lokální maximum. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce f nemá globální maximum.

Z těchto úvah a Věty 4.3.4 plyne, že $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$.

Pro $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ spočteme

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}}\left(2\log^{-3} x \cdot \frac{1}{x}\right)\left(1 + 2\log^{-3} x\right) + e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \log^{-4} x \frac{-6}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \frac{2}{x} \log^{-6} x \left[\log^3 x + 2 - 3\log^2 x\right]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2 - 2y + 2) = (y-1)\left(y - (1+\sqrt{3})\right)\left(y - (1-\sqrt{3}\right),$$

máme

$$\begin{aligned} &\forall x \in (0, e^{1-\sqrt{3}}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (1, e) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (e, e^{1+\sqrt{3}}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (e^{1+\sqrt{3}}, \infty) \colon f''(x) > 0. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $[0, e^{1-\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, 1]$,
- ryze konvexní na $[1, e]$,
- ryze konkávní na $[e, e^{1+\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1+\sqrt{3}}, \infty)$.

Díky Příkladu 5.6.8 je funkce f ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, e]$. Z Věty 5.5.19 plyne, že $e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}$ jsou inflexní body funkce f. V bodě 1 má tečna ke grafu funkce f tvar $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, z čehož přímo z definice plyne, že 1 není inflexní bod f. Konečně můžeme z (5.81) usoudit, že jiné než výše uvedené inflexní body funkce f nemá.

Zjistíme nyní, zdali má funkce f v nekonečnu asymptotu. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x}\right)(-\log^{-2} x) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\log^{-2} x} = -\infty, \end{aligned}$$

funkce f nemá v nekonečnu asymptotu. (Při výpočtu jsme užili Příklad 5.7.43.)

♣

5.7.66. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{6\sin x}.$$

Řešení. Definiční obor funkce f je množina

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (1+k)\pi)$$

a f je zjevně na $\mathcal{D}(f)$ spojitá.

Vzhledem k tomu, že sinus je lichá funkce, je f též lichá. Navíc je periodická s periodou 2π. Omezíme se tedy při vyšetřování průběhu f na množinu $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Cenným vodítkem nám přitom bude právě lichost zadané funkce.

Máme

$$\lim_{x\to-\pi_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to\pi_-} f(x) = \infty. \tag{5.82}$$

Platí

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{6\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}\left(\sin^2 x - \frac{1}{6}\right), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$ a nechť

$$x_1 = -\pi + \alpha, \quad x_2 = -\alpha, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \pi - \alpha.$$

Tedy

- $f' > 0$ na intervalech $(-\pi, x_1), (-\frac{\pi}{2}, x_2), (x_3, \frac{\pi}{2}), (x_4, \pi)$ a
- $f' < 0$ na intervalech $(x_1, -\frac{\pi}{2}), (x_2, 0), (0, x_3), (\frac{\pi}{2}, x_4)$.

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na intervalech $(-\pi, x_1], [-\frac{\pi}{2}, x_2], [x_3, \frac{\pi}{2}], [x_4, \pi]$ a
- klesající na $[x_1, -\frac{\pi}{2}], [x_2, 0), (0, x_3], [\frac{\pi}{2}, x_4]$.

V bodech $-\frac{\pi}{2}, x_3, x_4$ má lokální minima, přičemž $f(x_3) = f(x_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{6}$, a v bodech $x_1, x_2, \frac{\pi}{2}$ má lokální maxima, přičemž $f(x_1) = f(x_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}$.

Z právě provedených úvah, Věty 4.3.4 a (5.82) plyne, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty).$$

Druhá derivace funkce f je pak pro $x \in \mathcal{D}(f)$ rovna

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos x\left(1 - \frac{1}{6\sin^2 x}\right)\right)' \\ &= (-\sin x)\left(1 - \frac{1}{6\sin^2 x}\right) + \cos x \frac{-2}{6}(\sin x)^{-3}\cos x \\ &= \frac{-6\sin^4 x \sin^2 x + 2\cos^2 x}{6\sin^3 x} \\ &= \frac{-6\sin^4 x - \sin^2 x + 2}{6\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice

$$-6y^2 - y + 2 = 0$$

má kořeny $-\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, hledáme ta čísla x, pro která $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Zajímá nás tedy množina $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Protože je

- $f'' > 0$ na intervalech $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- $f'' < 0$ na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,

je podle Věty 5.5.14 funkce f

- ryze konvexní na intervalech $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$, $(0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- ryze konkávní na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$, $[-\frac{\pi}{4}, 0)$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Dle Věty 5.5.19 jsou body $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ inflexními body funkce f. Vzhledem ke znaménku druhé derivace jiných inflexních bodů funkce f nemá, viz Věta 5.5.17.

Asymptoty zřejmě nemá smysl vyšetřovat, a tedy zbývá pouze načrtnout graf. ♣

5.7.67. Příklad. Vyšetřete průběh funkce zdané parametricky rovnicemi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přesněji se požaduje následující úvaha. Ukažte, že funkce $\varphi(t) = t - \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, je rostoucí a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Existuje proto její inverzní funkce $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\psi(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce φ i ψ jsou nekonečně diferencovatelné a platí

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty.$$

Dále

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy $\varphi' > 0$ na intervalech $(2k\pi, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má derivaci rovnou 0. Funkce φ je proto rostoucí na $\mathbb{R}$ a díky Větě 4.3.4 je $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tím je zaručena existence funkce $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Navíc je φ^{-1} spojitá díky Větě 4.3.13.

Ukažme, že f je 2π-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ splňuje $\varphi(t) = x$. Pak též

$$\varphi(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = x + 2\pi.$$

Tedy

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(t) = \psi(t + 2\pi) = \psi(\varphi^{-1}(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi).$$

Stačí tedy vyšetřit průběh funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

Podle Věty 5.1.25 spočteme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\psi(\varphi^{-}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Ozančíme-li $t = \varphi^{-1}(x)$, je výraz $\frac{\sin t}{1 - \cos t}$ kladný pro $t \in (0, \pi)$, záporný pro $t \in (\pi, 2\pi)$ a nulový pro $t = \pi$. Tedy $f' > 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $f' < 0$ na intervalu $(\pi, 2\pi)$ a $f'(x) = 0$ pro $x = \pi$. Jelikož f je spojitá, můžeme použít Větu 5.2.10 a odvodit pomocí Věty 4.2.24

$$\begin{aligned} f'_{+}(0) &= \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \lim_{t \to 0_+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0_+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{1 - \cos t} \cdot \frac{1}{t} = \infty. \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme (například podle Věty 5.4.1)

$$f'_{-}(2\pi) = \lim_{t \to 2\pi_-} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 2\pi_-} \frac{\cos t}{\sin t} = -\infty.$$

Z těchto výpočtů nyní vidíme, že f roste na intervalu $[0, \pi]$ a klesá na intervalu $[\pi, 2\pi]$. Dále má v bodě π globální maximum o hodnotě 2. Vzhledem k tomu, že f je kladná na inttervalu $(0, 2\pi)$, má f v bodech 0 a 2π globální minima splňující $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Vzhledem k tomu, že f je jakožto složení spojitých funkcí spojitá, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(f) = [0, 2]$.

K výpočtu f'' opět použijeme Větu 5.1.25. Nejprve označme $\omega(t) = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, $t \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\omega'(t) = \frac{-1}{1-\cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Tedy máme

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))}\right)' = \big(\omega(\varphi^{-1}(x))\big)' \\
&= \omega'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \frac{-1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \\
&= \frac{-1}{(1-\cos(\varphi^{-1}(x)))^2}, \quad x \in (0, 2\pi).
\end{aligned}$$

Tedy $f'' < 0$ na $(0, 2\pi)$, a tedy je f ryze konkávní na $[0, 2\pi]$ (viz Věta 5.5.14).

Vzhledem k její periodicitě nemá asymptoty, viz Příklad 5.6.7. ♣

KAPITOLA 6

Taylorův polynom

V této kapitole si ukážeme, jak lze za jistých předpokladů aproximovat danou funkci polynomem. To znamená, že se budeme snažit přiblížit hodnoty (obecně komplikované) funkce hodnotami polynomu tak, aby odchylka byla v jistém dobře definovaném smyslu co nejmenší.

6.1. Taylorův polynom funkce jedné proměnné

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom afinní funkce

$$t\colon x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$, aproximuje chování f v blízkosti bodu a, neboť platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{|f(x)-t(x)|}{|x-a|} &= \lim_{x\to a} \frac{|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = \\ &= \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Neformálně řečeno, pro hodnoty x dostatečně blízké k bodu a je výraz $|f(x)-t(x)|$ podstatně menší než $|x-a|$.

Pokud místo afinní funkce, což je polynom stupně nejvýše 1, použijeme vhodný polynom P obecně vyššího stupně, můžeme doufat v lepší aproximaci, např.

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-P(x)|}{|x-a|^n} = 0$$

pro jisté $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Takový polynom P by skutečně aproximoval f s větší přesností, neboť výraz $|x-a|^n$ je pro x dostatečně blízké k bodu a podstatně menší než $|x-a|$, přesněji platí

$$\lim_{x\to a} \frac{|x-a|^n}{|x-a|} = 0.$$

Ukážeme, že polynom, který je zaveden následující definicí, nám právě takovou aproximaci poskytuje.

6.1.1. Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{6.2}$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n**.

V dalším textu budeme používat následující úmluvu: symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací" funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

6.1.2. Poznámky. (a) Pokud $f^{(n)}(a)$ existuje vlastní, pak existují vlastní derivace $f^{(j)}(x)$ pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ na nějakém okolí bodu a. Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je tedy dobře definován.

(b) Platí $\operatorname{st}(T_n^{f,a}) \leq n$. Tato nerovnost skutečně může být ostrá, jak ukazuje příklad funkce sinus, pro niž platí $T_2^{\sin,0}(x) = x$, tj. $\operatorname{st}(T_2^{\sin,0}) = 1$.

(c) Platí $T_n^{f,a}(a) = f(a)$. Označme-li $T = T_n^{f,a}$. Pak postupně dostaneme pro každé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
T'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1},\\
T''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2},\\
&\ \vdots\\
T^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a),\\
T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = a$, obdržíme vztahy

$$T'(a) = f'(a),\ T''(a) = f''(a), \dots,\ T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Odtud plyne, že funkce f a Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ mají v bodě a shodné derivace až do řádu n.

6.1.3. Příklad. Spočtěte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 pro funkce sinus a kosinus.

Řešení. Pro hodnoty funkce sinus a jejích derivací v bodě 0 platí

$$\sin 0 = 0,\ \sin' 0 = \cos 0 = 1,\ \sin'' 0 = -\sin 0 = 0,\ \sin''' 0 = -\cos 0 = -1.$$

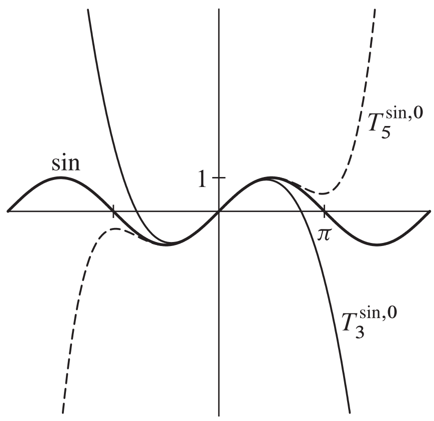
Dostáváme tedy

$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Podobně lze odvodit vztah

$$T_3^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Na následujícím obrázku jsou zachyceny grafy funkce sinus a Taylorových polynomů $T_3^{\sin,0}$ a $T_5^{\sin,0}$.



Obrázek 1. Taylorovy polynomy funkce sinus

♣

Budeme studovat otázku, jak kvalitní je aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem. Kvalitu přiblížení obvykle měříme velikostí „chyby aproximace“, tedy veličiny $|f(x) - T_n^{f,a}(x)|$ v daném bodě x. Tuto chybu je možné jen málokdy spočítat přesně, uvedeme ale pro ni několik velmi efektivních odhadů. Chybu aproximace budeme v dalším textu nazývat „zbytkem“ (tím míníme zbytek po odečtení hodnoty Taylorova polynomu od hodnoty funkce v daném bodě). Důležitou charakteristikou kvality aproximace je popis a nebo alespoň horní odhad velikosti zbytku v závislosti na bodu x, jestliže se tento bod blíží k bodu a. Následující věta takový odhad udává.

6.1.4. Věta (Peanův tvar zbytku). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{6.3}$$

Důkaz. K odvození platnosti vztahu (6.3) použijeme matematickou indukci podle n. Pokud $n = 1$, potom dle definice derivace platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

jak jsme již ukázali v úvodu tohoto oddílu.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro $n-1$ a dokažme jeho platnost pro n. Mějme tedy funkci f mající v bodě a vlastní n-tou derivaci. Funkce f' má v bodě a vlastní derivaci řádu $n-1$, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Funkce f je v bodě a spojitá, stejně jako Taylorův polynom $T_n^{f,a}$. Platí tedy $\lim_{x\to a}\bigl(f(x) - T_n^{f,a}(x)\bigr) = f(a) - f(a) = 0$. Z definice Taylorova polynomu a Poznámky 6.1.2(c) snadno odvodíme, že platí $\bigl(T_n^{f,a}\bigr)' = T_{n-1}^{f',a}$. Dále z předpokladů plyne, že $f'(x)$ existuje vlastní na jistém okolí bodu a, a tedy podle l'Hospitalova pravidla (Věta 5.4.1) dostáváme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\bigl(f(x) - T_n^{f,a}(x)\bigr)'}{\bigl((x-a)^n\bigr)'} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

■

6.1.5. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Polynom Q má zřejmě v bodě a kořen. Pak podle **??** existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R takový, že $Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Potom platí

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$), což je spor. ■

6.1.6. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 6.1.4 víme, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Odtud dostáváme

$$\lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0+0 = 0.$$

Dále platí $\mathrm{st}\big(T_n^{f,a} - P\big) \leq n$, a tedy podle Lemmatu 6.1.5 je $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom, tj. $P = T_n^{f,a}$. ■

6.1.7. Poznámka. Z Věty 6.1.4 vyplývá, že za uvedených předpokladů můžeme funkci f na jistém okolí bodu a zapsat ve tvaru $f = T_n^{f,a} + \omega$, kde „chybová funkce" ω splňuje

$$\lim_{x \to a} \frac{\omega(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Taylorovy polynomy lze mimo jiné použít k počítání limit funkcí a posloupností a k vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy. Ve všech těchto případech většinou počítáme limitu nějaké komplikované funkce. Pro výpočet limity posloupnosti pak obvykle využijeme Heineovu větu a pro vyšetření konvergence řady srovnávací kritérium.

Základní myšlenka výpočtu limity funkce je následující. Funkce, které se objevují ve výrazu, jehož limitu počítáme, vyjádříme jako součet polynomu a chybové funkce. Výpočet limity pak bude sestávat z výpočtu limity obsahující pouze polynomy a chybové funkce. Při vhodném vyjádření funkce ve tvaru „polynom plus chybová funkce" pak mohou být tyto výpočty velmi jednoduché. Při počítání s chybovými funkcemi totiž nemusíme brát v úvahu jejich přesný tvar, ale pouze odhady velikosti chyby. Hlavní problém výpočtu pak spočívá v tom, jak nalézt k daným funkcím odpovídající polynomy vhodného stupně a chybové funkce. Takové postupy ukážeme v následujícím výkladu.

6.1.8. Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

6.1.9. Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$" chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

(b) Tvrzení Věty 6.1.4 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a,$$

proto bude v roli funkce g často vystupovat funkce $x \mapsto (x-a)^n$, nebo jen $x \mapsto x^n$ v případě $a = 0$.

(c) Symbol $f(x) = o(1), x \to a$ podle definice znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(d) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \to a$ vynechávat.

6.1.10. Věta (aritmetika malého o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iii) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) f_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iv) Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(v) Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x) f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(vi) Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Všechna tvrzení snadno plynou z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a Věty 4.2.15. Dokažme tedy pouze tvrzení (ii). Podle předpokladu máme

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0.$$

Odtud potom plyne

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 0 = 0,$$

což jsme měli dokázat. ■

6.1.11. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Předpokládejme, že platí $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení dostaneme z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)), jestliže za vnější funkci vezmeme $y \mapsto f(y)/g(y)$ a za vnitřní funkci $x \mapsto \varphi(x)$. ■

6.1.12. Příklad. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce tangens v bodě 0.

Řešení. Mohli bychom spočítat derivace funkce tangens až do třetího řádu v bodě 0 a pak sestavit příslušný Taylorův polynom podle definice, jako jsme to učinili v Příkladu 6.1.3. Ukážeme však ještě jiný postup.

Protože má funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ derivace všech řádů, stačí nalézt polynom P takový, že $\operatorname{st}(P) \leq 3$ a $\operatorname{tg} x - P(x) = o(x^3)$, $x \to 0$. Pak totiž podle Věty 6.1.6 již musí platit $P = T_3^{\operatorname{tg},0}$. Označme $P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$. Potom

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = o(x^3), \quad x \to 0,$$

neboli

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = \omega(x),$$

kde funkce ω je definována na prstencovém okolí bodu 0 a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\omega(x)}{x^3} = 0.$$

Potom pro každé x z tohoto prstencového okolí platí

$$\sin x = \big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \omega(x)\big) \cos x. \tag{6.4}$$

Funkce sinus a kosinus můžeme vyjádřit podle Příkladu 6.1.3 ve formě

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x),$$

kde funkce η a ζ splňují

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\zeta(x)}{x^3}=0.$$

Uvedená vyjádření funkcí sinus a kosinus nyní dosadíme do (6.4), pravou stranu roznásobíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x-\frac{1}{6}x^3+\eta(x) &= \left(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\omega(x)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\zeta(x)\right)= \\ &= A_0+A_1x+\left(A_2-\frac{1}{2}A_0\right)x^2+\left(A_3-\frac{1}{2}A_1\right)x^3+\tau(x), \end{aligned} \tag{6.5}$$

přičemž

$$\tau(x)=\omega(x)-\frac{1}{2}A_2x^4-\frac{1}{2}A_3x^5-\frac{1}{2}\omega(x)x^2+\left(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\omega(x)\right)\zeta(x).$$

Z tvaru funkce τ snadno odvodíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tau(x)}{x^3}=0.$$

Úpravou (6.5) obdržíme

$$A_0+(A_1-1)x+\left(A_2-\frac{1}{2}A_0\right)x^2+\left(A_3-\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{6}\right)x^3=\eta(x)-\tau(x).$$

Označme symbolem Q polynom na levé straně předchozího vztahu. Potom st $Q\le 3$ a z tvaru pravé strany plyne, že $Q(x)=o(x^3)$, $x\to 0$. Podle Lemmatu 6.1.5 musí být polynom Q nulový, a tedy musí mít nulové koeficienty, tj.

$$A_0=0,\quad A_1-1=0,\quad A_2-\frac{1}{2}A_0=0,\quad A_3-\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{6}=0.$$

Odtud dostaneme $A_0=0$, $A_1=1$, $A_2=0$, $A_3=\frac{1}{3}$, neboli $T_3^{\mathrm{tg},0}(x)=x+\frac{1}{3}x^3$. ♣

6.1.13. Při počítání úloh podobného typu, jaký jsme viděli v Příkladu 6.1.12 se často užívá následující konvence. Místo abychom pracovali s jednotlivými chybovými funkcemi – v našem příkladu to byly funkce ω,η,ζ,τ – budeme je značit vždy stejným symbolem, který bude obsahovat pouze informaci o přesnosti našeho odhadu. Místo abychom psali například $f(x)=g(x)+\omega(x)$, kde $\omega(x)=o(x^3)$, $x\to 0$, budeme psát rovnou $f(x)=g(x)+o(x^3)$, $x\to 0$. Tento způsob zápisu činí výpočet přehlednější, nicméně je třeba dát pozor na jistá jeho úskalí. Nebudeme se zde snažit dát tomuto zápisu přesný matematický význam. Budeme jej chápat pouze jako zkrácenou verzi zápisu s chybovými funkcemi, který již přesný matematický význam má.

Korektnost našeho výpočtu bude dána tím, že jej můžeme zapsat vždy naprosto přesně s použitím chybových funkcí. Výpočet z Příkladu 6.1.12 pak lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\bigr)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \\ = A_0 + A_1x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1\right)x^3 + \\ + o(x^3) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}x^2o(x^3) + \\ + \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\bigr)o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$-\frac{1}{2}A_2x^4 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)},$$
$$-\frac{1}{2}A_3x^5 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)},$$
$$-\frac{1}{2}x^2o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 6.1.10(v))},$$
$$\bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\bigr)o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 6.1.10(v))}.$$

Odtud plyne podle Věty 6.1.10(i)

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}\right)x^3 = o(x^3), \quad x \to 0.$$

Závěr výpočtu již nyní proběhne stejně jako v předchozí variantě.

Při bezpečném zvládnutí této metody lze k výsledku často dospět rychleji než postupným derivováním dané funkce, neboť s odhady chyb lze pracovat velmi efektivně.

6.1.14. Úmluva. Ve zbytku kapitoly budeme symbol tvaru $(x - a)^0$ chápat jako 1, což zpřehlední zápis některých polynomů a řad a nemusíme definovat hodnotu výrazu 0^0.

Věta 6.1.4 udává asymptotický odhad „řádu“ chyby, jíž se dopustíme při nahrazení funkce Taylorovým polynomem, neříká však nic o její skutečné velikosti. V následující větě odvodíme přesnější formuli pro vyjádření chyby, ovšem za silnějších předpokladů na funkci f.

6.1.15. Věta (obecný tvar zbytku). Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$ a že φ je spojitá funkce na $[a,x]$ mající v každém bodě intervalu (a,x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $F\colon [a,x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a,x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a,x), neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a,x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{6.6}$$

Pro každé $t \in (a,x)$ vypočteme

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\left(f'(t) + f'(t)\cdot(-1) + f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right) \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \end{aligned}$$

a dosadíme $t = \xi$. Tak obdržíme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Dále platí $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$ a $F(x) = 0$. Odtud a z (6.6) dostáváme

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

■

6.1.16. Poznámky. (a) Věta 6.1.15 platí i v případě $x < a$. Důkaz je stejný.

(b) O funkci f ve Větě 6.1.15 stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a,x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a,x). I za tohoto slabšího předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

Právě uvedenou větu použijeme k odvození dvou tvarů zbytku Taylorova polynomu.

6.1.17. Věta (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť a, x, f, n jsou jako ve Větě 6.1.15. Potom existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \tag{6.7}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in [a,x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a,x]$ a na otevřeném intervalu (a,x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.15 tedy existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!}\frac{0-(x-a)^{n+1}}{(-(n+1)(x-\xi)^n)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

6.1.18. Poznámka. Z Věty 6.1.17 plyne následující odhad zbytku pro funkci f na daném intervalu I. Je-li $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ pro každé $x \in I$, pak lze pro každé $x \in I$ absolutní hodnotu chyby, které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou polynomu $T_n^{f,a}(x)$, shora odhadnout výrazem $\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$.

6.1.19. Věta (Cauchyův tvar zbytku)**.** Nechť a, x, f, n jsou jako ve Větě 6.1.15. Potom existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a). \tag{6.8}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a,x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a,x]$ a na otevřeném intervalu (a,x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.15 existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

■

Ve Větě 6.1.4 jsme viděli, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f. Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

6.1.20. Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **MacLaurinově řadě**.

6.1.21. Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{6.9}$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (6.9) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0 (viz Příklad 5.7.41), takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

6.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

V tomto oddílu postupně spočteme Taylorovy polynomy a řady některých elementárních funkcí. Budeme se zároveň zabývat otázkou, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto řady konvergentní a zda je jejich součtem původně zadaná funkce. Místo symbolu $T_k^{f,a}$ budeme psát pro přehlednost pouze T_k, neboť z kontextu bude vždy zřejmé, s jakou funkcí f pracujeme. Bod a bude shodou okolností roven vždy 0. Dále budeme značit $R_k = f - T_k$. Platnost rovnosti (6.9) v daném bodě $x \in \mathbb{R}$ je pak ekvivalentní výroku $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$. Připomínáme, že i zde budeme využívat úmluvu $f^{(0)} = f$.

6.2.1 (exponenciální funkce). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\exp^{(l)} x = \exp x$. Je tedy $\exp^{(l)} 0 = 1$ pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Taylorův polynom T_k má pak tvar

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$

Taylorova řada se středem v bodě 0 má potom tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

podle definice exponenciální funkce (5.16).

6.2.2 (**funkce sinus**). Pro derivace funkce sinus platí

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin^{(3)} x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

a dále se funkce periodicky opakují, tj. $\sin^{(k+4)} x = \sin^{(k)} x$. Tedy

$$\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = 1, \quad \sin'' 0 = 0, \quad \sin^{(3)} 0 = -1, \quad \sin^{(4)} 0 = 0, \ldots$$

Taylorovy polynomy v bodě 0 mají tudíž tvar $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$. Obecně pak máme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Pro funkci sinus je Taylorův polynom řádu $2k$ v bodě 0 polynomem stupně $2k-1$. Podle (5.19) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

6.2.3 (**funkce kosinus**). Podobně jako v předchozím případě dostaneme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k}(x) = T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

Z (5.20) pak plyne pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

6.2.4 (**funkce $x \mapsto \log(1+x)$**). Funkce $f(x) = \log(1+x)$ má na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ derivace všech řádů. Snadno lze matematickou indukcí dokázat, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f^{(l)}(x) = (-1)^{l-1} \frac{(l-1)!}{(1+x)^l}.$$

Odtud dostáváme

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0!, \quad f''(0) = -1!, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

a tudíž pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_k(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k.$$

Zvolme $x \in (0,1]$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.1.17). Podle této věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $\xi_n \in (0,x)$ takové, že

$$\log(1+x) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} = \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Odhadneme

$$\left| \log(1+x) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \right| \le \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi_n} \right)^{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{6.10}$$

Uvažujme nyní $x \in (-1,0)$. Pro tyto hodnoty proměnné x využijeme Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.1.19). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle této věty číslo $\xi_n \in (x,0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x-\xi_n)^n \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} \cdot x \cdot (x-\xi_n)^n. \end{aligned}$$

Zřejmě platí nerovnost

$$1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \le -x,$$

a tedy můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} \left| \log(1+x) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \right| &\le \frac{(\xi_n - x)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}} |x| = \left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n} \right)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} \\ &= \left(1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \right)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} \le (-x)^n \frac{|x|}{1+x} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}. \end{aligned}$$

Protože dále platí $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = 0$, dostáváme

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ tedy platí

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{6.11}$$

6.2.5. Ze vztahu (6.11) dostaneme dosazením $x = 1$ zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ řada v (6.11) diverguje, a pro takové x vztah (6.11) neplatí.

6.2.6. Příklad. Napište MacLaurinovu řadu pro funkci $x \mapsto \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Z 6.2.4 plyne, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}\big(\log(1+x) - \log(1-x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}.
\end{aligned}$$

♣

6.2.7 (funkce $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$). Poslední funkcí, pro kterou Taylorův polynom v bodě 0 odvodíme z definice, bude funkce $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x \in (-1, \infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Na svém definičním oboru má funkce f derivace všech řádů. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots \\
&\qquad \dots, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},
\end{aligned}$$

a tedy

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Taylorův polynom k-tého řádu pro funkci f v bodě 0 má proto tvar

$$T_k(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definujme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **zobecněné kombinační číslo** $\binom{\alpha}{j}$ předpisem

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \leq \alpha$ tento předpis dává obvyklé kombinační číslo. Nyní můžeme $T_k(x)$ přepsat ve tvaru

$$T_k(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k. \tag{6.12}$$

Ukážeme, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \tag{6.13}$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Zvolme tedy $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pevně. Podle Cauchyova tvaru zbytku (Věta 6.1.19) nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo ξ_n ležící mezi 0 a x takové, že

$$(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi_n)^{\alpha-n-1}(x-\xi_n)^n x.$$

Funkce $z \mapsto z^{\alpha-1}$ je na intervalu $(0, \infty)$ monotónní, a tedy

$$(1+\xi_n)^{\alpha-1} \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

Můžeme odhadnout

$$\left|(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j\right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\} \cdot \left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right|^n \cdot |x|, \tag{6.14}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right| \leq |x|,$$

můžeme dále odhadnout

$$\left|(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j\right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha\cdots(\alpha-n)|C \cdot |x|^{n+1}, \tag{6.15}$$

kde $C = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$. Označme $a_n = \frac{1}{n!}|\alpha \cdots (\alpha - n)|C \cdot |x|^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha - n - 1}{n+1}\right| \cdot |x| = |x| < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.12), a proto podle Věty 3.1.14 nutně platí $\lim a_n = 0$. Odtud a z (6.15) vyplývá platnost (6.13).

Nyní uvedeme několik příkladů na výpočet a použití Taylorova polynomu. Na následujícím příkladu ilustrujeme způsob, jak vypočítat Taylorův polynom bez derivování.

6.2.8. Příklad. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ nalezněte Taylorovy polynomy všech řádů v bodě 0.

Řešení. Víme (viz Příklad 3.1.8), že pro každé $x \in (-1, 1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n x^n =$$
$$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x}.$$

Dále

$$(-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x} = o(x^k),\ x \to 0,$$

a tedy $T_k^{f,0}(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k$ podle Věty 6.1.6. Tento výsledek, který jsme odvodili bez počítání derivací, je ve shodě se vztahem (6.12) pro případ $\alpha = -1$. ♣

6.2.9. Příklad. Nechť $f(x) = \sin(\sin x)$. Spočtěte $T_5^{f,0}$.

Řešení. Podle Věty 6.1.6 platí

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 + o(y^5),\ y \to 0.$$

Podle Věty 6.1.11, kde $g(y) = y^5$ a $\varphi(x) = \sin x$, dostáváme

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(\sin^5 x),\ x \to 0. \tag{6.16}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, je tedy podle Věty 6.1.10(iv)

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(x^5),\ x \to 0. \tag{6.17}$$

Spočítejme rozvoje pro funkce $\sin^3 x$ a $\sin^5 x$. S využitím toho, že $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, $x \to 0$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + 3x^2\left(-\tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + 3x\left(-\tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \\
&\qquad + \left(-\tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + \left(-\tfrac{1}{2}x^5 + 3x^2 o(x^3)\right) + 3x\left(o(x^2)\right)^2 + \left(o(x^2)\right)^3 = \\
&= x^3 - \tfrac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Při odvození posledních dvou rovností jsme využili Větu 6.1.10(i)-(iii),(vi). Podobně platí

$$\sin^5 x = \left(x + o(x)\right)^5 = x^5 + \sum_{j=1}^{5} \binom{5}{j} x^{5-j}\left(o(x)\right)^j = x^5 + o(x^5),\ x \to 0.$$

Všimněme si, že při umocňování Taylorova rozvoje je vhodné stanovit jeho řád pokud možno co nejnižší, abychom si výpočet zbytečně nekomplikovali, ale tak aby výsledný odhad chyby byl požadovaného řádu. Pro rozvoj $\sin^3 x$ s chybou $o(x^5)$ stačilo pracovat s Taylorovým polynomem funkce sinus třetího řádu, a pro rozvoj $\sin^5 x$ s chybou $o(x^5)$ jsme vystačili dokonce s Taylorovým polynomem funkce sinus prvního řádu.

Po dosazení do (6.17) a (6.16) dostaneme

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5),\ x \to 0,$$

takže $T_5^{f,0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$. ♣

6.2.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu platí

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a dále podle Věty 6.1.11, Věty 6.1.10(iv), (6.17) a 6.12 platí

$$\begin{aligned}
&\sin(2x) = (2x) - \tfrac{1}{6}(2x)^3 + \tfrac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{4}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0, \\
&\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}(x^2)^2 + o(x^4), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nyní vyjádříme

$$\begin{aligned}\sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2} &= \left(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) = \\ &= 2x - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Nakonec spočteme zadanou limitu:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5} = \\ &\quad = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) - \left(2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5)\right)}{x^5} = \\ &\quad = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

♣

6.2.11. Příklad. Nalezněte $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, aby pro Taylorův polynom T_k funkce exp platil odhad $\left|\exp(x) - T_k(x)\right| < 0{,}001$ pro každé $x \in [0,1]$.

Řešení. Nechť $x \in [0,1]$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku (Věta 6.1.17) existuje $\xi_k \in (0,1)$ takové, že

$$\left|\exp x - T_k(x)\right| = e^{\xi_k} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{e}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}. \tag{6.18}$$

Pro $k = 6$ platí $\frac{3}{(k+1)!} = \frac{1}{1680} < 0{,}001$. Zadané přesnosti tedy podle odhadu (6.18) dosáhneme na celém intervalu $[0,1]$ pro $k = 6$, tj. použijeme-li k přibližnému výpočtu hodnoty $\exp x$ polynom

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6.$$

♣

6.3. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu

6.3.1. Příklad. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v každém bodě intervalu $[a,b]$, přičemž existuje číslo M takové, že $|f^{(n)}(x)| \le M$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in [a,b]$. Pak pro každé x a x_0 v $[a,b]$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Řešení. Zvolme pevně $x, x_0 \in [a,b]$. Použijeme pro odhad chyby Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.1.17). Z této věty plyne, že existuje ξ ležící mezi x_0 a x splňující

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n,$$

kde

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Odtud ihned vyplývá odhad

$$|r_n| \le M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ a platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

♣

Následující příklad obsahuje pomocné technické tvrzení, které využijeme v dalším výkladu.

6.3.2. Příklad. Nechť φ je omezená funkce na $\mathbb{R}$ taková, že φ' je omezená na $\mathbb{R}$. Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom je funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

diferencovatelná a platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nechť $C \in \mathbb{R}$ je takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\varphi(x)| \le C \quad \text{a} \quad |\varphi'(x)| \le C. \tag{6.19}$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k C$ konverguje, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x)$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.4.3 tedy tato řada konverguje, takže funkce g je dobře definovaná na $\mathbb{R}$.

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2}$ konverguje, a tedy k tomuto ε lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} < \varepsilon. \tag{6.20}$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 5.2.4) aplikované na funkci $y \mapsto \varphi(n^2 y)$ vyplývá, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b) = n^2 \varphi'(n^2 \xi)(a - b).$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b)| \le C n^2 \, |a - b| \, . \tag{6.21}$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $h \in P(0, \delta)$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, platí

$$\left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| < \frac{\varepsilon}{n^k}. \tag{6.22}$$

Pak pro $h \in P(0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right) \right| \\
&\le \sum_{n=1}^{n_0 - 1} 2^{-n} n^k \left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) \right| + \left| n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \right).
\end{aligned}$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (6.22) a druhou pomocí (6.19), (6.20) a (6.21), dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{k+2}\varphi'(n^2x)\right|\\
&<\sum_{n=1}^{n_0-1}2^{-n}n^k\frac{\varepsilon}{n^k}+\sum_{n=n_0}^{\infty}2^{-n}n^k 2Cn^2\\
&\le\sum_{n=1}^{n_0-1}2^{-n}\varepsilon+2C\sum_{n=n_0}^{\infty}2^{-n}n^{k+2}\\
&\le(1+2C)\varepsilon.
\end{aligned}$$

♣

6.3.3. Příklad. Položme $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos(n^2x)$, $x\in\mathbb{R}$. Ukažte, že f má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 6.3.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k\in\mathbb{N}$ a $x\in\mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{2k}\cos^{(k)}(n^2x). \tag{6.23}$$

Pro každé $k\in\mathbb{N}$ a $y\in\mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y)=\cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{8k}.$$

Nyní dokážeme, že Taylorova řada funkce f nekonverguje v žádném bodě různém od nuly. Vezměme tedy $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Protože $(4k)!\le(4k)^{4k}$, pro každé $k,m\in\mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(4k)!}f^{(4k)}(0)x^{4k}\right|&=\frac{1}{(4k)!}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{8k}|x|^{4k}\\
&\ge\frac{1}{(4k)!}2^{-m}m^{8k}|x|^{4k}\\
&\ge\frac{1}{(4k)^{4k}}2^{-m}m^{8k}|x|^{4k}.
\end{aligned}\tag{6.24}$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položme $m = 2k$. Potom z (6.24) dostaneme

$$\left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0) x^{4k}\right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2}\right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty 3.1.14 diverguje. ♣

6.3.4. Příklad. [1,2] Nechť $\sum a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ taková, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a položme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1)\log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n}{n \log^p n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ použijeme Větu 6.1.17 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(c_n).$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned}&(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n \\ &= \log^p n + p \log^{p-1} n + \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\beta_n = \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

[1] de Morgan
[2] Bertrand

platí podle Příkladu 5.7.43 a Věty 4.2.16

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takové, že

$$\beta_n < (q-p)\log^{p-1} n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_1.$$

Pro $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ pak platí

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= 1 + \frac{\log^p n + p\log^{p-1} n + \beta_n}{n\log^p n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q\log^{p-1} n}{n\log^p n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n\log n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_2. \end{aligned}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, pak dostáváme

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n\log n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Díky Příkladu 3.8.2 dostáváme konvergenci řady $\sum a_n$, neboť řada $\sum b_n$ konverguje podle Příkladu 5.7.44.

(b) Položme $b_n = \frac{1}{n\log n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Podobně jako výše nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log n}{n\log n} = 1 + \frac{1}{n\log n}\left(1 + \log n + \frac{1}{2c_n}\right).$$

Dostaneme tedy pro $n \in N \setminus \{1\}$, $n \geq n_0$, odhad

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\log n} + \frac{1}{2c_n n\log n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Tedy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \geq n_0,$$

Vzhledem k tomu, že řada $\sum \frac{1}{n\log n}$ diverguje (viz Příklad 5.7.44), dostáváme díky Příkladu 3.8.2 divergenci řady $\sum a_n$. ♣

6.3.5. Příklad. [3]Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $\{b_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pokud $a > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $a \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

[3]Gauss

Řešení. Pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lze použít Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{b_n}{n^{\varepsilon}}\right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Pokud $a = 1$, platí díky Příkladu 5.7.43

$$\lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n \log n}{n^{\varepsilon}} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n\log n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

Z Příkladu 6.3.4 nyní plyne divergence dané řady. ♣

6.4. Početní příklady k Taylorovu polynomu

6.4.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0{,}1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Poznámky 6.1.18 tedy pro $a = 0$, $x = 0{,}1$ a $M = 1$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_n^{f,0}(0{,}1)| \leq \frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_3^{f,0}(0{,}1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0{,}1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako hodnotu Taylorova polynomu funkce kosinus řádu 3, tedy

$$T_3^{f,0}(0{,}1) = 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

6.4.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Řešení. Podle 6.2.3 platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}\Big)=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

♣

6.4.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin x-x}.$$

Řešení. Podle 6.2.1 a 6.2.2 dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^3+o(x^3)-1}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=-6.$$

♣

6.4.4. Příklad. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos\big(\tfrac{1}{n}\big)-e^{-\frac{1}{2n^2}}\right).$$

Řešení. Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos\big(\tfrac{1}{n}\big)-e^{-\frac{1}{2n^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$$

pokud limita vpravo existuje. Stačí tedy spočítat tuto limitu. Z 6.2.3 a 6.2.1 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left(1+\frac{-x^2}{2}+\frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)\right)}{x^4}\\&=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

♣

6.4.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right).$$

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Z Příkladu 5.7.1 a věty o aritmetice limit plyne, že $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$. Pro druhý zlomek využijeme Taylorových rozvojů příslušných funkcí, tedy 6.2.2 a 6.2.3. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Z věty o aritmetice limit tedy vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x \right) = \frac{2}{3}.$$

♣

6.4.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 6.2.2 platí

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Dál máme z 6.2.7

$$\begin{aligned}(1+y)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0, \\ (1+y)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0.\end{aligned}$$

V následujícím výpočtu bude symbol $o(x^3)$ uvažován pro $x \to 0$. Podle Věty 6.1.10 platí

$$\begin{aligned}(1 + (x^3 - 2x))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3 - 2x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + \frac{1}{16}(-8x^3) + o(x^3)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(1+(x^2-3x))^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{3}(x^2-3x)-\frac{1}{9}(x^2-3x)^2+\frac{5}{81}(x^2-3x)^3+o(x^3)\\ &= 1+\frac{1}{3}(x^3-2x)-\frac{1}{9}(9x^2-6x^3)+\frac{5}{81}(-27x^3)+o(x^3).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6} &= x\left(-2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right)+x^2\left(-\frac{4}{8}-\frac{1}{3}+\frac{9}{9}-\frac{1}{6}\right)\\ &\quad +x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{16}-\frac{6}{9}+27\frac{5}{81}\right)\\ &= x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6}}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right)=-6.$$

♣

6.4.7. Příklad. Nechť

$$f(x)=\frac{1}{e}\,(1+x)^{\frac{1}{x}}\,,\quad x\in(-1,0)\cup(0,\infty).$$

Najděte polynom P třetího stupně, který splňuje

$$f(x)-P(x)=o(x^3),\quad x\to 0.$$

Řešení. V následujícím výpočtu budeme uvažovat symbol o pro $x\to 0$. Platí

$$f(x)=e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1}=e^{\frac{\log(1+x)-x}{x}},\quad x\in\mathcal{D}(f).$$

Označme $g(x)=\frac{\log(1+x)-x}{x}$, $x\in\mathcal{D}(f)$. Protože podle 6.2.4 platí

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

máme

$$\log(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

a tedy

$$g(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3).$$

Protože

$$g(x)=x\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right),$$

platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ a existuje okolí $P(0,\delta)$, na kterém funkce g nenabývá hodnoty 0.

Jelikož dle 6.2.1 platí

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

dostáváme díky Větě 4.2.20

$$\begin{aligned} e^{g(x)} &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Požadovaný polynom P je tedy tvaru

$$P(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

6.4.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3}.$$

Řešení. Symbol o opět uvažujeme pro $x \to 0$. Díky Příkladu 6.4.7 máme

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex &= e\left(\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}} + x\right) \\ &= e\left(\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) - \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3\right) + x\right) \\ &= e\left(-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{8}.$$

♣

6.4.9. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log\left(\sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\right) - \sin(\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{2n^3}\right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

v závislosti na parametru α.

Řešení. Podle Příkladu 6.2.6 a dále podle 6.2.4 a 6.2.2 jest pro každé $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}\right) - \sin(x) - \tfrac{x^3}{2} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2} + o(x^5) \\ &= x^5\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\Big) + o(x^5) = \frac{23}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Pro speciální volbu $x = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostáváme

$$\log\left(\sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\right) - \sin(\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{2n^3} = \frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}), \quad n \to \infty.$$

Označme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$a_n = \left(\log\left(\sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\right) - \sin(\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{2n^3}\right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

a

$$b_n = \frac{n^{\alpha-5}}{\log^2 n}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^5 \left(\frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5})\right) = \frac{23}{120}. \tag{6.25}$$

Srovnávací posloupnost $\{b_n\}$ volíme tak, aby $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ vyšla konečná a nenulová. Jelikož jsou členy řady $\sum b_n$ kladné, z (6.25) plyne, že řada $\sum a_n$ má od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné členy. Dále z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Stačí tedy vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ v závislosti na parametru α.

To jsme však již provedli v Příkladu 5.7.44, podle kterého řada $\sum b_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. Zadaná řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. ♣

6.4.10. Příklad. Pro $p \in (0, \infty)$ vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n^p$, kde

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Použijeme Raabeovo kritérium 3.8.1. Počítejme tedy pro $n \in \mathbb{N}$ výraz

$$n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p}-1\right)=n\left(\left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right)^p-1\right)=\frac{n\left((n+1)^p-(n+\frac{1}{2})^p\right)}{(n+\frac{1}{2})^p}.$$

Pro funkci $f(x)=x^p$, $x\in(0,\infty)$ a každý interval $[n+\frac{1}{2},n+1]$ použijeme Větu 6.1.17 a nalezneme tak $c_n\in(n+\frac{1}{2},n+1)$ splňující

$$(n+1)^p-(n+\frac{1}{2})^p=\frac{p}{2}(n+\frac{1}{2})^{p-1}+\frac{1}{2}p(p-1)c_n^{p-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^p}{(n+1)^2(n+\frac{1}{2})^p}\le\frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}\le\frac{(n+1)^p}{(n+\frac{1}{2})^{p+2}},\quad n\in\mathbb{N},$$

platí díky Větě 2.2.46 rovnost $\lim n\frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}=0$. Proto máme

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{p}{2}n(n+\frac{1}{2})^{p-1}}{(n+\frac{1}{2})^p}+\frac{p(p-1)}{8}\frac{nc_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}\right)=\frac{p}{2}.$$

Řada $\sum a_n^p$ tedy konverguje pro $p>2$ a diverguje pro $p<2$.

Je-li $p=2$, platí

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})^2}\right)^2=1+\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{4(n+\frac{1}{2})^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Položíme-li $b_n=-\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, dostaneme omezenou posloupnost splňující

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{b_n}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Podle Příkladu 6.3.5 tedy řada $\sum a_n^2$ diverguje. ♣

6.4.11. Příklad. Nechť $\alpha\in(0,\infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$, kde

$$a_n=\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Řešení. Podle Příkladu 6.2.4 platí

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\varphi(x),\quad x\in(-1,1),$$

kde φ je funkce splňující $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$. Položme

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \varphi(b_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože $b_n \in (-1, 1)$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, platí

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}\right) = 1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n = \sum(b_n + c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$.

♣

6.4.12. Příklad. Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \to 0$. Díky 6.2.3 a 6.2.1 máme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \text{a}$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).$$

Tedy

$$f(x) = x^4\left(\frac{12C - 1}{12}\right) + x^6\left(\frac{14}{6!}\right) + o(x^6).$$

Označme $c = \frac{12C-1}{12}$. Je-li $C > \frac{1}{12}$, tj. $c > 0$, máme

$$f(x) = x^4\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right).$$

Protože $\lim_{x\to 0}\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right) = c$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{c}{2}, \quad x \in P(0, \delta).$$

Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0, \delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6 \left(\frac{14}{6!} + o(1) \right).$$

Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

6.4.13. Příklad. Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \to 0$. Pro funkci platí

$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plat9 tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 6.2.1 a 6.2.2 vztahy

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \\ \sinh x &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{n=0}^{5} \frac{x^n}{n!} + o(x^5) \right) - \left(\sum_{n=0}^{5} \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5) \right) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5). \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f''(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(2 + o(x^2)).$$

Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{x^3} = 2$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > 1$ pro $x \in P(0, \delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, \delta)$. Podle Věty 5.5.19 má f v bodě 0 inflexní bod. ♣

KAPITOLA 7

Mocninné řady

Jak víme z kapitoly o Taylorově polynomu, je v některých případech možné vyjádřit danou funkci ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za jistých okolností pak může být práce s touto řadou snazší než s funkcí v původním tvaru. Odtud pramení hlavní motivace pro studium mocninných řad, kterému se budeme věnovat v této kapitole.

7.1. Poloměr konvergence

7.1.1. Definice. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je a_n reálné číslo a nechť $a \in \mathbb{R}$. **Mocninnou řadou o středu** a rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \tag{7.1}$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

7.1.2. Mocninnou řadu chápeme jako předpis, který proměnné x přiřazuje reálné číslo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, pokud je tento výraz dobře definován. Konvergence této řady závisí na konkrétní hodnotě, kterou dosadíme za proměnnou x. Budeme studovat zejména základní otázku, pro která $x \in \mathbb{R}$ je daná mocninná řada konvergentní, případně zda je tato konvergence absolutní. V některých případech se budeme snažit vyjádřit součet dané mocninné řady pomocí elementárních funkcí.

Množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro která je řada (7.1) konvergentní, je definičním oborem funkce $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

7.1.3. Poznámky.

(a) Důležitým speciálním případem mocninné řady je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, která odpovídá případu $a = 0$.
(b) Mocninná řada (7.1) je zřejmě konvergentní pro $x = a$.

7.1.4. Věta (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** Pro mocninnou řadu (7.1) existuje právě jeden nezáporný prvek ϱ množiny $\mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, je řada (7.1) absolutně konvergentní,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, je řada (7.1) divergentní.

Navíc platí

$$\varrho = \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{pokud } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0,\infty), \\ 0, & \text{pokud } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \infty, & \text{pokud } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ položme

$$b_n = |a_n(x-a)|^n.$$

Označme dále

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Předpokládejme nejprve, že $\gamma \in (0,\infty)$. Pak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-a| = \gamma|x-a|.$$

Odtud vyplývá, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} > 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| > \varrho$. Podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(b) a (d)) je tudíž řada (7.1) absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ a divergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| > \varrho$.

Je-li $\gamma = 0$, pak podle (7.2) platí $\varrho = \infty$ a obdobným výpočtem jako výše dostaneme

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Daná mocninná řada je tedy absolutně konvergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(b)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\gamma = \infty$, pak podle (7.2) platí $\varrho = 0$ a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$. Daná mocninná řada je tedy divergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(d)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$.

Ve všech třech případech jsme tedy ověřili, že číslo ϱ má požadované vlastnosti.

Dokážeme nyní jednoznačnost poloměru konvergence. Předpokládejme, že prvek $\varrho' \in \mathbb{R}^*$ má také uvedené vlastnosti, a přitom $\varrho \neq \varrho'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varrho < \varrho'$. Potom by ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\varrho < |x-a| < \varrho'$ musela řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergovat a zároveň divergovat, což není možné. Tím je důkaz dokončen. ■

7.1.5. Definice. Prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ z Věty 7.1.4 nazýváme **poloměrem konvergence** řady (7.1).

7.1.6. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je mocninná řada a nechť existuje $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Potom je tato limita rovna poloměru konvergence uvedené mocninné řady.

Důkaz. Podle Poznámky 3.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 7.1.4 a Věty **??**. ■

7.1.7. Příklady. Spočtěte poloměry konvergence pro následující mocninné řady:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ uvedené řady konvergují.

Řešení. (a) Podle Příkladu 2.6.29 platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je roven ∞ a řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(b) Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

a tedy poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ je roven 0. Řada konverguje pouze pro $x = 0$.

(c) Díky Příkladu 2.2.49 víme, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je roven 1. Řada tedy konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| > 1$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech 1 a -1. Jak víme z Příkladů 3.1.11 a 3.3.2, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ diverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tedy konverguje pro $x \in [-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. ♣

7.1.8. Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = a$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0, \infty)$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = a + \varrho$ a pro $x = a - \varrho$.

7.2. Derivace mocninné řady

V dalším textu se nám bude hodit následující pomocné lemma technické povahy. Tvrzení je obdobné Lemmatu 5.3.1, které jsme využili při odvozování elementárních funkcí. Zde však potřebujeme přesnější odhad a obecnější formu výrazu na pravé straně nerovnosti.

7.2.1. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta, \delta)$ platí

$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \leq h^2\delta^{-2}(|x|+\delta)^n. \tag{7.3}$$

Důkaz. Pokud $n = 1$, pak tvrzení zřejmě platí, neboť na levé straně nerovnosti je nula a na pravé je nezáporné číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Potom z binomické věty pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Z nerovnosti $|h| < \delta$ pak odvodíme odhad

$$\begin{aligned}|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} h^2 \\ &\le h^2 \delta^{-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &= h^2 \delta^{-2} (|x| + \delta)^n.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

7.2.2. Věta (o derivaci mocninné řady)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence řady (7.1). Potom poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \tag{7.4}$$

je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Potom v každém takovém bodě má funkce f vlastní derivaci a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Důkaz. Podle Důsledku 2.5.7(a) a Příkladu 2.2.49 platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^n$ má stejný poloměr konvergence jako řada (7.1). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ je zřejmě konvergentní pro $x = a$. Nechť $x \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < |x-a| < \varrho$. Potom je řada (7.1) konvergentní, a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^n$. Protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \frac{1}{x-a} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^n,$$

je konvergentní i řada (7.5). Tedy řada (7.5) má stejný poloměr konvergence jako řada (7.1).

Bez újmy na obecnosti budeme ve zbytku důkazu předpokládat, že $a = 0$. Zvolme $x \in (-\varrho, \varrho)$. K němu nalezneme $\delta > 0$ splňující $|x| + \delta < \varrho$.

Zvolme dále $h \in (-\delta, \delta)$. Pak

$$|x+h| \leq |x| + |h| < |x| + \delta > \varrho,$$

a tedy $x + h \in (-\varrho, \varrho)$. Z Lemmatu 7.2.1 tudíž plyne

$$\begin{aligned}
&\left| f(x+h) - f(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\
&\quad = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\
&\quad = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n ((x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}) \right| \\
&\quad \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |(x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}| \\
&\quad \leq h^2 \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n.
\end{aligned}$$

Protože $|x| + \delta < \varrho$, je podle Věty 7.1.4 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (|x| + \delta)^n$ absolutně konvergentní, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n$ je konvergentní. Označme $C = \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n$. Potom

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &= \left| \frac{1}{h} \big(f(x+h) - f(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \big) \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} |h|^2 C = |h| C.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \leq \lim_{h \to 0} |h| C = 0,$$

a tedy podle Věty 4.1.17 také

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) = 0.$$

Z definice derivace a podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) pak dostaneme

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Tvrzení je dokázáno. ■

7.2.3. Důsledek. Nechť mají symboly f a ϱ stejný význam jako ve Větě 7.2.2. Pak má funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, derivace všech řádů a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Speciálně platí $f^{(k)}(a) = k!\,a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. K důkazu tvrzení stačí k-krát aplikovat Větu 7.2.2. ■

7.2.4. Důsledek. Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ poloměr konvergence $\varrho \in (0,\infty]$. Označme $f(x)$ její součet pro $x \in (a-\varrho, a+\varrho)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (a-\varrho, a+\varrho)$ platí

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Důkaz. Podle Důsledku 7.2.3 má funkce f na intervalu $(a-\varrho, a+\varrho)$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Podle definice Taylorova polynomu pak máme

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

7.2.5. Při derivování mocninné řady (7.1) člen po členu se zachovává poloměr konvergence ϱ. V případech, kdy $\varrho \in (0,\infty)$, se však může stát, že v některém z krajních bodů $a+\varrho$ a $a-\varrho$ zderivovaná řada (7.5) diverguje, přestože původní řada (7.1) v těchto bodech konverguje. Příkladem je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, která je konvergentní pro $x \in [-1,1)$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ není konvergentní pro $x = -1$.

7.2.6. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ jsou mocninné řady. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ obě řady konvergují ke stejnému součtu, potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = b_n$.

Důkaz. Pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ potom platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$. Podle Důsledku 7.2.3 je $f^{(n)}(a) = n!a_n = n!b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n = b_n$. Rovnost $a_0 = b_0$ plyne ze vztahu $f(a) = a_0 = b_0$. ■

7.2.7. Věta. Nechť ϱ je poloměr konvergence řady (7.1). Potom poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \tag{7.5}$$

je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ označme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Potom v každém takovém bodě má funkce g vlastní derivaci a platí

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 0, \\ \frac{a_{n-1}}{n}, & \text{pokud } n \geq 1. \end{cases}$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Podle Věty 7.2.2 mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ stejný poloměr konvergence ϱ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

7.2.8. Příklad. Dokažte, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1). \tag{7.6}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že výraz na pravé straně rovnosti (7.6) je možné zapsat ve tvaru mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & \text{pokud } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{pokud } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Z Příkladu 2.2.49 plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}} = 1,$$

a tedy má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence rovný 1. Označíme-li

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

pak dle Věty 7.2.2 a Příkladu 3.1.8 platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Zároveň však pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$. Položme

$$g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-1, 1).$$

Pak podle věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.16) platí $g'(x) = 0$ pro každé $x \in (-1, 1)$. Protože g má v každém bodě intervalu $(-1, 1)$ vlastní derivaci, je podle věty o vztahu derivace a spojitosti (Věta 5.1.14) na tomto intervalu spojitá. Tudíž podle Věty 5.2.9 existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující $g(x) = c, x \in (-1, 1)$, tedy $f(x) = \operatorname{arctg} x + c$, $x \in (-1, 1)$. Protože $f(0) = 0$, a tedy $g(0) = f(0) - \operatorname{arctg} 0$, je $c = 0$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$. ♣

7.2.9. Příklad. Dokažte, že platí

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Řešení. Rovnost lze dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 7.2.8 s použitím vzorce

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k}, \quad x \in (-1, 1),$$

jenž vyplývá ze vztahu (6.13) pro $\alpha = -\frac{1}{2}$. ♣

7.3. Abelova věta

Vraťme se nyní k identitě (7.6). Z Leibnizovy věty (Věta 3.3.1) vyplývá, že řada na pravé straně této identity konverguje také pro krajní body intervalu $(-1, 1)$. Vzniká tedy přirozená otázka, zda je možné platnost vzorce (7.6) rozšířit i na tyto krajní body. Kladná odpověď vyplyne z Abelovy věty, kterou zformulujeme a dokážeme v tomto oddílu.

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení.

7.3.1. Lemma. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada a nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Nechť $x \in (-1, 1)$. Potom řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolutně konvergují a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Důkaz. Protože je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní, je posloupnost jejích částečných součtů omezená. Existuje tedy $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq C$. Pro každé $x \in (-1, 1)$ tudíž platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n||x|^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = |x| < 1.$$

Z Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.4(a)) tedy vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ je absolutně konvergentní. Z Poznámky 7.1.8 pak plyne, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je absolutně konvergentní.

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

$$\begin{aligned}
(1 - x) \sum_{n=0}^{k} s_n x^n &= (1 - x)(a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + \cdots + a_k)x^k) \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + \cdots a_k)x^k \\
&\quad - (a_0 x + (a_0 + a_1)x^2 + \cdots + (a_0 + \cdots + a_{k-1})x^k + (a_0 + \cdots + a_k)x^{k+1}) \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + s_k x^{k+1}.
\end{aligned}$$

Podle Věty 2.2.41 platí $\lim_{k\to\infty} s_k x^k = 0$, a tedy také $\lim_{k\to\infty} s_k x^{k+1} = 0$. Odtud vyplývá požadovaný vztah. ∎

7.3.2. Věta (Abelova). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ je mocninná řada a nechť ϱ je její poloměr konvergence. Předpokládejme, že platí $\varrho \in (0, \infty)$. Nechť dále $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje. Potom

$$\lim_{x\to\varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

Důkaz. Povšimněme si nejprve, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Předpokládejme dále, že $\varrho = 1$. Označme $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Nechť s_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jsou částečné součty řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s_n - S| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Dále zvolme $\delta \in (0, 1)$, takové, že $(1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - S| < \varepsilon$ pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$. Pro tato x pak z Lemmatu 7.3.1 dostaneme odhad

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S| &= \left|(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - S\right| = \left|(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1 - x) S \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right| \\
&= \left|(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - S) x^n\right| \\
&\leq \left|(1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} (s_n - S) x^n\right| + \left|(1 - x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (s_n - S) x^n\right| \\
&\leq (1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - S| + (1 - x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |s_n - S|\, x^n \\
&\leq \varepsilon + (1 - x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon x^n = \varepsilon + \varepsilon (1 - x) \frac{x^{n_0+1}}{1 - x} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tedy $\lim_{x \to 1_-} f(x) = S$. Tím je tvrzení dokázáno pro $\varrho = 1$.

Nechť $\varrho \in (0, \infty)$. Pak má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n x^n$ poloměr konvergence roven 1. Z již dokázaného speciálního tvrzení pro $\varrho = 1$ a z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) tedy vyplývá rovnost

$$
\lim_{x \to \varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to \varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n \left(\tfrac{x}{\varrho}\right)^n = \lim_{y \to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.
$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

7.3.3. Poznámka. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n$, pak platí

$$
\lim_{x \to (a-\varrho)+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n.
$$

Důkaz. Víme, že konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \varrho^n$. Dle Abelovy věty tedy platí

$$
\lim_{x \to (a+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \varrho^n.
$$

Tvrzení plyne z toho, že

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \varrho^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$$

a

$$\lim_{x\to(a+\varrho)_-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(x-a)^n = \lim_{y\to(a-\varrho)_+}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-a)^n.$$

■

7.3.4. Poznámka. Bez předpokladu konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ tvrzení Věty 7.3.2 neplatí. Příkladem je řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Poloměr konvergence této řady je roven 1, řada nekonverguje (osciluje) v bodě $x = -1$, avšak platí

$$\lim_{x\to(-1)_+}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{x\to(-1)_+}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

7.3.5. Příklad. Dokažte, že platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}, \quad x \in [-1,1].$$

Řešení. Dle (7.6) víme, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

pro každé $x \in (-1,1)$. Dle vlastnosti (C12) z 5.3.18 víme, že funkce arctg je spojitá na $\mathbb{R}$. Z Leibnizovy věty (Věta 3.3.1) plyne, že je řada $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$ konvergentní pro $x = 1$. Z Abelovy věty (Věta 7.3.2) a Poznámky 7.3.3 tedy plyne, že

$$\lim_{x\to 1_-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Ze spojitosti funkce arctg dostáváme kýženou rovnost pro $x = 1$. Obdobným postupem odvodíme stejnou rovnost i pro $x = -1$. ♣

7.3.6. Zvolíme-li v Příkladu 7.3.5 speciálně $x = 1$, obdržíme následující zajímavý vztah pro číslo π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

7.4. Teoretické příklady na mocninné řady

7.4.1. Příklad (Tauberova[1] věta). Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence 1 a nechť $L \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Jestliže platí $\lim n a_n = 0$ a $\lim_{x \to 1_-} f(x) = L$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

Řešení. Protože $\lim n a_n = 0$, platí podle Věty 2.2.25 také $\lim n|a_n| = 0$. Z Věty 3.8.21 pak vyplývá, že i $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0$.

Označme
$$x_n = 1 - \tfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$
Potom $\lim f(x_n) = L$.

Nechť nejprve $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí
$$|f(x_n) - L| < \varepsilon, \tag{7.7}$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| < \varepsilon \tag{7.8}$$
a
$$n|a_n| < \varepsilon. \tag{7.9}$$
Položme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in (0, 1)$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí
$$\begin{aligned} s_n - L = \sum_{k=0}^{n} a_k - L &= \sum_{k=0}^{n} a_k - L + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) + f(x) - L - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \end{aligned}$$
a tedy
$$|s_n - L| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + |f(x) - L| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k.$$
Protože pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ máme
$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$
dostáváme
$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) \leq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k|.$$

[1] Alfred Tauber (1866–1942)

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $n \geq n_0$. Potom z (7.9) plyne

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon x^{n+1}}{n(1-x)} < \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Celkově dostáváme pro každé $x \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ odhad

$$|s_n - L| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Do tohoto odhadu nyní dosadíme hodnotu $x = x_n$. Ze (7.7) a (7.8) pak obdržíme

$$\begin{aligned} |s_n - L| &\leq (1-x_n) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x_n) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x_n)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x_n) - L| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy $\lim s_n = L$.

Nyní předpokládejme, že $L = \infty$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) + f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &\geq f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \end{aligned}$$

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Pak pro každé takové n dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{x^{n+1}}{n(1-x)} \leq \frac{1}{n(1-x)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do tohoto odhadu $x = x_n$, dostaneme $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq 1$. Tedy celkem

$$s_n \geq f(x_n) - 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Tvrzení nyní plyne z toho, že $\lim f(x_n) = \infty$.

Nechť $L = -\infty$. Položíme $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $g(x) = \sum_{n-0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Potom zřejmě platí $\lim n b_n = 0$ a $\lim_{x \to 1-} g(x) = \infty$. Z již dokázaného tvrzení tudíž plyne $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$. ♣

7.4.2. Poznámka (Littlewoodovo zobecnění Tauberovy věty)**.** V Tauberově větě z Příkladu 7.4.1 lze předpoklad $\lim n a_n = 0$ nahradit předpokladem, že posloupnost $\{n a_n\}$ je omezená. Důkaz tohoto tvrzení, který podal J. E. Littlewood[2], je podstatně obtížnější než důkaz původní Tauberovy věty a zde jej uvádět nebudeme.

7.4.3. Poznámka. Nechť (7.1) je mocninná řada s poloměrem konvergence $\varrho \in (0, \infty)$. Konverguje-li řada (7.1) v jednom z bodů ϱ nebo $-\varrho$ absolutně, pak zřejmě konverguje absolutně i v druhém bodě. Pro konvergenci však obdobné tvrzení neplatí. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ neabsolutně konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1 (srovnej 7.2.5).

7.5. Početní příklady na mocninné řady

7.5.1. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $a = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{n^3} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Platí

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

a tudíž ze vzorce (7.2) dostaneme $\varrho = 1$.

Poloměr konvergence ϱ lze také vypočítat pomocí Poznámky 3.2.16, neboť platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

♣

7.5.2. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $a = 0$ a koeficienty

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[2]John Edensor Littlewood (1885–1977)

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \infty.$$

Podle Poznámky 3.2.16 je tedy poloměr konvergence roven $\varrho = \infty$. ♣

7.5.3. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k!}}{k!}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu s koeficienty

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pokud } n = k! \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, a tedy podle Věty 2.4.13 a Příkladu 2.2.49 máme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{a_{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{\frac{1}{k!}} = 1,$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odtud a ze vzorce (7.2) vyplývá, že poloměr konvergence je roven 1. ♣

7.5.4. Příklad. Nechť $0 < a < b$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n.$$

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $a = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ na^n + \frac{b^n}{n^2} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí odhady

$$\frac{b^n}{n^2} \leq na^n + \frac{b^n}{n^2} \leq 2nb^n.$$

Pomocí limity z Příkladu 2.2.49 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} = b \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2nb^n} = b,$$

a proto podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n + \tfrac{b^n}{n^2}} = b.$$

Podle (7.2) je tedy poloměr konvergence ϱ roven $\frac{1}{b}$. ♣

7.5.5. Příklad. Nechť $c > 0$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{c^{n^2}} x^n.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{c^{n^2}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{c^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{c^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

Podle Poznámky 3.2.16 tedy pro poloměr konvergence ϱ dostáváme

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

♣

7.5.6. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in (-1,1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady a jednoduché úpravy platí pro $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2+1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = -(x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^{2n+2} - x^{2n}) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n}. \end{aligned}$$

Tedy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1,1)$, kde

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché}, \\ -2 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé}. \end{cases}$$

♣

7.5.7. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Dostali jsme mocninnou řadu se středem v bodě 0 a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{pokud } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{pokud } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Poloměr konvergence této řady je roven 1. Podle Věty 7.1.4 konverguje mocninná řada na intervalu $(-1, 1)$ absolutně. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k a_{n-k} x^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n - k$ stejnou paritu, tj. jsou obě lichá nebo obě sudá. Pokud je navíc k sudé, pak platí

$$a_k a_{2n-k} = (-1)^{\frac{k}{2}} (-1)^{n-\frac{k}{2}} = (-1)^n.$$

Pokud je k liché, pak platí $a_k a_{2n-k} = 0 \cdot 0 = 0$. Počet sudých čísel v množině $\{0, 1, \dots, 2n\}$ je roven $n + 1$. Máme tedy $b_{2n} = (-1)^n (n + 1)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n + 1 - k$ rozdílnou paritu, a proto je právě jedno z čísel a_k a a_{2n+1-k} rovno 0. Odtud plyne, že $b_{2n+1} = 0$.

Výsledná řada má tedy tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

♣

7.5.8. Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x$ do mocninné řady.

Řešení. Podle vzorce pro sin polovičního úhlu a podle známé mocninné řady pro cos dostáváme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} .$$

♣

7.5.9. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}x^{2n+3} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence je $R = 1$. Posloupnost $\frac{1}{2n+3}$ monotónně klesá k nule, a tedy podle Leibnitzova kritéria, Věta ???, tato mocninná řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady, Věta ???, platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2} = \frac{x^2}{1+x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku využili vzorce pro součet geometrické řady. Snadnou integrací dostaneme

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x + C .$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C ,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4} .$$

♣

7.5.10. Příklad. Sečtěte řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n)\frac{1}{3^n}\,.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$
pro $x\in(-1,1)$. Pravou stranu můžeme snadno zderivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady, Věta ???, platí pro všechna $x\in(-1,1)$
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\,.$$
První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme
$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}\,.$$
Z posledních dvou rovností snadno dostáváme
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n)x^n&=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^{n-2}+3x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\\&=x^2f''(x)+3xf'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{3x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$
pro všechna $x\in(-1,1)$. Dosazením $x=\frac{1}{3}$ dostaneme
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n)\frac{1}{3^n}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3\,.$$

♣

7.5.11. Příklad. Sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\,.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} x^{2n+1} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R = 1$ a že tato řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty, Věta ???, tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady, Věta ???, platí pro všechna $x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} . \tag{7.10}$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1,1)$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}\right) dx = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(1-x) + C .$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (7.10) máme

$$f'(x) = xg(x) = \frac{1}{2}x\log(x+1) - \frac{1}{2}x\log(1-x) .$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{2}x^2\log(1+x)\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}x^2\log(1-x)\right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4}x^2\log\frac{x+1}{1-x} + C_2 . \end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ pak snadno zjistíme, že $C_2 = 0$. Podle Abelovy věty dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2-1)\log\frac{x+1}{1-x} = \frac{1}{2},$$

kde jsme v posledním kroku mimo jiné využili známou limitu $\lim_{x\to 1-}(x-1)\log(1-x) = 0$. ♣

7.5.12. Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ je limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} \tag{7.11}$$

konečná a nenulová.

Řešení. Jest

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^{k+1}}.$$

Podle **??** a 6.2.3 máme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x \cos x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6)\\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Odtud a z 6.2.2 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^k}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^k}.\end{aligned}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, plyne z věty o aritmetice limit, že pro volbu $k = 3$ je hledaná limita konečná a nenulová, přesněji

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Opětovným použitím věty o aritmetice limit odtud ihned dostaneme, že pro $k = 1$ nebo $k = 2$ platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = 0.$$

Konečně pro sudé číslo k, $k > 3$, platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = \infty$$

a pro liché číslo k, $k > 3$, limita (7.11) neexistuje. ♣

KAPITOLA 8

Integrál

8.1. Primitivní funkce

8.1.1. Definice. Nechť I je otevřený interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkcí k funkci** f **na** I, pokud pro každé $x \in I$ existuje vlastní $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

8.1.2. Poznámky.

(a) Nechť F je primitivní funkcí k nějaké funkci f na otevřeném intervalu I. Potom F je na I spojitá, neboť má v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci. Příkladem je funkce sign na intervalu $\mathbb{R}$.

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce $F + c$ je také primitivní funkcí k f na I.

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

8.1.3. Označení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

8.1.4. Věta (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** Nechť I je otevřený interval a nechť funkce f je definovaná alespoň na I. Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$, $x \in I$.

Důkaz. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - G(x), \quad x \in I.$$

Pak
$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
a tedy dle Věty 5.2.9 je H konstantní na I. ■

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později (Důsledek 8.2.25).

8.1.5. Věta (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu I. Pak má na I primitivní funkci.

8.1.6. Věta (linearita primitivní funkce)**.** Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Důkaz. Podle Věty 5.1.16 platí
$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$
pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. ■

8.1.7. Věta (Darbouxova vlastnost derivace)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak má f na I **Darbouxovu vlastnost**, tj. $f(J)$ je interval, kdykoli $J \subset I$ je interval.

Důkaz. Nechť J je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu **??**.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci
$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$
Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí
$$H'(x) = f(x) - z,$$
tj. H má na I vlastní derivaci.

Nalezneme$x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. (V opačném případě bychom postupovali obdobně.) Protože funkce H nabývá na intervalu $[x_1, x_2]$ minima (Věta **??**), můžeme ho označit jako x_0. Jelikož
$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$
existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že
$$\forall x \in P^+(x_1, \delta) : H(x) < H(x_1).$$
Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a platí proto $H'(x_0) = 0$ (viz Věta **??**). Odtud $f(x_0) = z$. ■

8.1.8. Poznámka. Nechť I je otevřený interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

8.1.9. Poznámka. Z Věty 8.1.7 plyne, že funkce $\operatorname{sign} x$ nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

8.1.10. Věta (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta **??**) platí

$$(F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

8.1.11. Příklad. Nechť $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(x) = x^4,\ x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 8.1.10) platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{5}\sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

8.1.12. Věta (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Podle Věty 8.1.7 nemění φ' na (α, β) znaménko. Podle Věty **??** je φ klesající nebo rostoucí na (α, β). Tedy existuje inverzní funkce $\varphi^{-1} : (a, b) \to$

(α, β). Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}(G(\varphi^{-1}(x))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta **??**) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta **??**). ■

8.1.13. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k $\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(a, b) = (-1, 1)$ a

$$f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\varphi((\alpha, \beta)) = \varphi((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1) = (a, b)$$

a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

♣

8.1.14. Věta (integrace per partes)**.** Nechť I je otevřený interval a nechť f je spojitá funkce na I. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I a G je primitivní funkce k funkci g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I dle Poznámky 8.1.2(a), takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 8.1.5. Uvažujme nějaký prvek množiny vlevo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z Věty **??** máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Obě množiny tedy obsahují funkci $GF - H$, a proto se rovnají (viz Věta 8.1.4). ■

8.1.15. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Potom f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 8.1.14 platí

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int g(x)F(x) \, \mathrm{d}x \\
&= G(x)F(x) - \int G(x) f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\
&\stackrel{c}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♣

8.1.16. Při hledání primitivní funkce k dané funkci na nějakém otevřeném intervalu používáme následující symboliku:

$$\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Na levé straně rovnosti stojí **množina** funkcí (přesněji množina všech primitivních funkcí k funkci f), zatímco na pravé straně stojí (libovolný) reprezentant této množiny, tedy funkce F, jedna z primitivních funkcí k funkci f na I. Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém slova smyslu, čteme jej jako **rovnost až na konstantu** a znamená, že všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu I obdržíme tak, že k funkci F přičteme libovolnou konstantní funkci na I.

Zadání úlohy nalézt primitivní funkci k funkci f symbolicky zapisujeme ve formě

$$\int f(x) \, dx.$$

Jednotlivé části tohoto zápisu jsou tyto:

$\int$ …znak integrálu

$f(x)$ …**integrand**, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci

dx …**diferenciál**, symbol, jenž označuje jednak konec integrandu a jednak určuje proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

POZOR! Symbol dx nemá žádný matematický význam a nelze s ním žádným způsobem algebraicky manipulovat. Nesmí se tedy například objevit ve jmenovateli zlomku, nelze jím krátit a podobně. Tento symbol lze v některých případech i vynechat, například tvrzení první věty o substituci lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' \stackrel{c}{=} F \circ \varphi.$$

Symbol dx však může posloužit jako užitečná mnemotechnická pomůcka při praktických výpočtech, například při použití jedné z vět o substituci. Hledáme-li kupříkladu primitivní funkci k funkci $g(t)$ na intervalu (α, β) pomocí první věty o substituci, často postupujeme tak, že se snažíme nalézt funkce f a φ takové, aby platilo $g(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$. V takových případech obvykle nejprve najdeme funkci φ', k ní pak dopočítáme φ a interval (a, b). Formálně zaměníme $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t)\,dt$, zbytek integrandu by pak již měl být ve formě $\varphi(t)\varphi'(t)$.

POZOR! Výše uvedený vztah $dx = \varphi'(t)\,dt$ nemá žádný matematický význam, jde jen o užitečnou pomůcku při výpočtech.

Například při výpočtu integrálu $\int \frac{dx}{x(1+\log^2(x))}$, $x \in (0, \infty)$, položíme $y = \log x$, a tedy $dy = \frac{1}{x}dx$, takže

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(1+\log^2(x))} &= \int \frac{dy}{1+y^2}\bigg|_{y=\log x} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(y)\big|_{y=\log x}\\ &= \operatorname{arctg}(\log x),\ x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

Při výpočtu integrálu pomocí druhé věty o substituci je postup obdobný. Například při výpočtu integrálu $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, položíme $x = \sinh t$, potom $dx = \cosh t\,dt$, takže

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\cosh t\,dt}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\bigg|_{t=\sinh^{-1}(x)} = \int dt\bigg|_{t=\sinh^{-1}(x)}\\ &\stackrel{c}{=} t\big|_{t=\sinh^{-1}(x)} = \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}).\end{aligned}$$

8.1.17. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 8.1.14 položme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $g(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int xe^x\,\mathrm{d}x &= \int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x(x-1), \quad x \in (-\infty, \infty).\end{aligned}$$

♣

8.1.18. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 8.1.14 položme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int \log x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \int g(x) F(x) \, \mathrm{d}x \\ &= G(x)F(x) - \int G(x) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x \log x - \int 1 \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

8.1.19. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \overset{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.1.5) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Z Věty 8.1.14 dostaneme

$$\begin{aligned}I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n) \frac{2x}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}.\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

8.1.20. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.1.5) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Dvojím použitím Věty 8.1.14 dostaneme

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

♣

8.1.21. Definice. **Racionální funkcí** budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

8.1.22. Věta (rozklad na parciální zlomky)**.** Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,
(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,
(iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
(v) žádný z mnohočlenů $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemá reálný kořen,
(vi) žádné dva z mnohočlenů $x-x_1, x-x_2, \dots, x-x_k$, nemají společný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} \\ & + \dots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

8.1.23 (postup při integraci racionální funkce)**.** Při integraci racionální funkce postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde st $P_2 <$ st Q pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 8.1.22;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujících formulí:

(i) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(ii) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

potom

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\,dx = \frac{1}{(\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2+1\right]^q}\,dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $y = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $dy = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}dx$ a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Výsledný integrál pak spočítáme podle Příkladu 8.1.19.

8.1.24. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^5-x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1}$.

Řešení. Standardním postupem (dělením polynomů) spočteme

$$\frac{x^5-x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1} = x^3+2+3\frac{x+1}{x^2-1} = x^3+2+3\frac{1}{x-1}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^5-x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^4}{4}+2x+3\log|x-1|$$

$$\text{na } (-\infty,-1), (-1,1) \text{ a na } (1,\infty).$$

♣

8.1.25. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

Řešení. Obecný rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vynásobíme obě strany výrazem $(x+1)^2(x^2+x+1)$ a obdržíme

$$x^2+1 = x^3(B+C)+x^2(A+2B+2C+D)+x(A+2B+2C+2D)+(A+B+D).$$

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty. Tedy dostaneme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned}0 &= B+C\\ 1 &= A+2B+2C+D\\ 0 &= A+2B+C+2D\\ 1 &= A+B+D.\end{aligned}$$

Jejím řešením je

$$A=2, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=-1.$$

Tedy

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{-2}{x+1} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty)$$

a

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Ten substitucí $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ převedeme na integrál $\int \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \overset{c}{=} \sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dohromady máme

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$
$$\text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty).$$

♣

8.1.26. Označení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x,y)$ značit **racionální funkci dvou proměnných**, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij} x^i y^j,$$

kde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 0, \ldots, N_1(N_2)$ a $Q \not\equiv 0$.

8.1.27. Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(i) vždy lze užít substituce $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$,
(ii) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\sin x = t$,
(iii) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $\cos x = t$,
(iv) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít $\operatorname{tg} x = t$.

Dobrá rada: je-li to možné, bývá obvykle výhodnější zvolit některou ze substitucí (ii)-(iv) než substituci (i).

8.1.28. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{dx}{\cos(x)\sin^2(x)}.$$

8.1.29. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$.

Řešení. Protože $R(a,b) = \frac{1}{1+a^2}$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. V první větě o substituci (Věta 8.1.10) je pak $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$ a $(a,b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zjevně je $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nenulová na $(-\infty,\infty)$ a $\varphi((-\infty,\infty)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Protože $\operatorname{tg} x = t$, máme

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}.$$

Tedy

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t^2}\, \mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Z druhé věty o substituci (Věta 8.1.12) tedy plyne, že

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \tag{8.1}$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na celém $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 8.1.5 má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci G. Tu najdeme pomocí již nalezené funkce F z (8.1). Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

položíme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojitá funkce a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1+\sin^2 x)^{-1}$. V bodech tvaru $k\pi + \frac{\pi}{2}$ tato rovnost platí díky Větě **??**. ♣

8.1.30. Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\,dx$). Nechť $q \in \mathbb{N}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\,dx$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$.

8.1.31. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definovaná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Pak

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1} = \varphi(t),$$

přičemž $\varphi : (0,1) \to (-\infty, -1)$ a $\varphi : (1, \infty) \to (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}.$$

Podle druhé věty o substituci (Věta 8.1.12) dostaneme pro integrál

$$I = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|t+1| - \log|t-1| - 2\operatorname{arctg} t, \quad \text{na } (0,1) \text{ a } (1,\infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (1,\infty).$$

♣

8.1.32. Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(i) Nechť má trojčlen ax^2+bx+c dvojnásobný reálný kořen α a platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|.$$

(ii) Nechť má trojčlen ax^2+bx+c dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$ a platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $x \in (-\infty, \alpha_1)$ a $x \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|x-\alpha_1|\sqrt{\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{(-a)(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)} \\ &= \sqrt{-a}(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu, jejíž řešení je popsáno v Poznámce 8.1.30. V obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, přesněji, v prvním případě je $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě je $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(iii) Polynom ax^2+bx+c nemá reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít jednu z takzvaných

Eulerových substitucí

$$\sqrt{ax^2 + bx + x} = \sqrt{a}x + t \quad \text{nebo} \quad \sqrt{ax^2 + bx + x} = xt + \sqrt{c}.$$

8.1.33. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Použijeme substituci

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t.$$

Pak

$$x = \frac{1 - t^2}{2t} = \varphi(t)$$

a

$$\varphi'(t) = \frac{1(1 - t^2)}{2t^2}.$$

Pak $\varphi : (0,1) \to (0,\infty)$ a $\varphi : (1,\infty) \to (-\infty, 0)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Tedy počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t}\frac{1+t^2}{2t}} \frac{-(1+t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{-2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\left(\int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\overset{c}{=} -\log\left|t^2 - 1\right|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = -\log\left|\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 - 1\right| \quad \text{na } (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty).$$

♣

8.2. Riemannův integrál

8.2.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělícími body** D. **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělící body D jsou obsaženy v D'. Tento fakt zapisujeme jako $D \preceq D'$.

8.2.2. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t))(x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (\inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t))(x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D.

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

8.2.3. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f **má na intervalu** $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ a značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

8.2.4. Označení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}([a, b])$.

8.2.5. Poznámka. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

8.2.6. Příklady. (a) Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $\int_{\underline{a}}^{b} D(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $\int_a^{\overline{b}} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Nechť R je Riemannova funkce. Potom $R \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

8.2.7. Poznámka. Nechť $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, $M_1 \subset M_2$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na M_2. Potom platí

$$\sup_{M_1} f \le \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \ge \inf_{M_2} f.$$

8.2.8. Věta (vlastnosti dělení)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž $D' \preceq D$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D).$$

(b) Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí, neboť supremum je vždy větší než infimum. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D') - \overline{S}(f, D) = \left(\inf_{[x_{j-1},z]} f\right)(z - x_{j-1}) + \left(\inf_{[z,x_j]} f\right)(x_j - z) \\ - \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \ge \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \ge \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\overline{S}(f, D') - \overline{S}(f, D) \ge \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden. Důkaz třetí je pak možno vést obdobně.

(b) Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D'') \le \overline{S}(f, D'') \le \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a,b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f,D) \leq \inf\{\overline{S}(f,D'); D' \text{ dělení } [a,b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f,D); D \text{ dělení } [a,b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden. ■

8.2.9. Důsledek. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Označme kde $m = \inf_{[a,b]} f$ a $M = \sup_{[a,b]} f$. Pak

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f,D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a,b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 8.2.8. ■

8.2.10. Věta (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou)**.** Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

a

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f,D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \tfrac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{8.2}$$

Označme totiž jako $\mathcal{D}$ všechny intervaly dané dělením D a $\mathcal{P}$ všechny intervaly dané dělením P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\sup_I f\right) |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \left(\sup_I f\right) |I|$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\left(\sup_{[\alpha,\beta]} f\right)(\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f\right)(x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f\right)(\beta - x_i)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sup_{[\alpha,\beta]} f\right)(\beta - \alpha) - \left(\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f\right)(x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f\right)(\beta - x_i)\right)\right| \\
\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) \\
= 2K(\beta - \alpha) \leq 2k\nu(D).
\end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ protínajících X nejvýše n, máme

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \leq 2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (8.2).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D)\\ &\leq \overline{S}(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f,D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov. ■

8.2.11. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první by se dokázal obdobně. Mějme kladné číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dáno. K němu dle Věty 8.2.10 existuje kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dělení $\delta > 0$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f,D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.12. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť existuje posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a,b]$ splňující

$$\lim \nu(D_n) = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n).$$

Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dle Důsledku 8.2.11 a předpokladu platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce riemannovsky integrovatelná a platí požadovaný vztah. ■

8.2.13. Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a spočtěte $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Důsledku 8.2.12 pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. ♣

8.2.14. Věta (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,
(ii) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Větě 8.2.8 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D) &\le \overline{S}(f,D_1)-\underline{S}(f,D_2)\\ &\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}\\ &=\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

8.2.15. Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x,y \in I : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon).$$

8.2.16. Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x-y| < \delta$, je $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y)-f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0, respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I. ■

8.2.17. Příklad. Nechť $I = (0,1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n)-f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ tedy nenajdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, požadované v definici stejnoměrné spojitosti. ■

8.2.18. Věta (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

Důkaz. Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x,y \in [a,b] : (|x-y| < \delta)\ \&\ (|f(x)-f(y)| \ge \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in [a,b]$ takové, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě **??** vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a,b]$ (Věta **??**). Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Ukažme, že v bodě x není f spojitá. Kdyby byla, z Heineovy podmínky (Věta **??**) bychom měli

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Tedy by platilo

$$\left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right| \leq \left|f(x_{n_k}) - f(x)\right| + \left|f(x) - f(y_{n_k})\right| \to 0.$$

Ale $\varepsilon \leq \left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right|$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, což by byl spor. ■

8.2.19. Věta (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Funkce f je omezená na $[a,b]$ (Důsledek **??**) a stejnoměrně spojitá (Věta 8.2.18). Najdeme tedy $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a,b] : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro $i \in \{1,\ldots,n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f \leq \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f \right)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Věta 8.2.14 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. ■

8.2.20. Věta (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz. Předpokládejme, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 8.2.14. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě je $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ∎

8.2.21. Úmluva. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na množině M splňující $[a, b] \subset M$. Potom symbolem $f \in \mathcal{R}([a, b])$ značíme fakt, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$.

8.2.22. Věta (vlastnosti Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$. Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Nechť $c \in (a, b)$ a nechť f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a, c]) \;\&\; f \in \mathcal{R}([c, b])).$$

Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b])$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(d) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (a) Nejprve si povšimneme, že funkce f, g, jakožto riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\sup_I (f + g) \le \sup_I f + \sup_I g \quad \text{a} \quad \inf_I (f + g) \ge \inf_I f + \inf_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \le \underline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \quad (8.3)$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 8.2.11 platí

$$\lim(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\lim(\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ze (8.3) tedy máme

$$\lim \underline{S}(f + g, D_n) = \lim \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Z Důsledku 8.2.12 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Je-li nyní $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \ge 0$, je funkce αf omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f, \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ takovou, že $\nu(D_n) \to 0$, máme

$$\lim \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 8.2.12 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu (a) nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pak máme pro každý interval $I \subset [a,b]$

$$\sup_I (-f) = -\inf_I f, \quad \inf_I (-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D_n) \to 0$ dostáváme

$$\lim \overline{S}(-f, D_n) = \lim -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim \underline{S}(-f, D_n) = \lim -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\nu(D_n) \to 0$. Pak díky předpokladu máme $\sup_I f \le \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \overline{S}(f, D_n) \le \lim \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a,b]$, respektive $[b,c]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělicích bodů dělení D_n^1 a D_n^2. Pak též $\nu(D_n) \to 0$. Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná jak na $[a,b]$, tak na $[b,c]$. Pak platí

$$\lim \overline{S}(f, D_n^1) = \lim \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim \overline{S}(f, D_n^2) = \lim \underline{S}(f, D_n^2) = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim \overline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dle Důsledku 8.2.12 platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obráceně, nechť $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Pak platí

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\le \big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) + \big(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\big) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \overline{S}(f, D_n) \to 0. \end{aligned}$$

Proto i

$$\lim \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) = 0.$$

Odtud již plyne riemannovská integrovatelnost f na $[a,b]$. Případ intervalu $[b,c]$ se dokáže obdobně. Rovnost integrálů pak plyne z první části důkazu.

(d) Je-li $f \in \mathcal{R}([a,b])$, je omezená, a tedy i $|f|$ je omezená. Pro libovolný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f. \tag{8.4}$$

Pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \le \inf_I |f| + \varepsilon \quad \text{a} \quad |f(x)| \ge \sup_I |f| - \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\le |f(x)| + \varepsilon - |f(y)| + \varepsilon \\ &= |f(x)| - |f(y)| + 2\varepsilon \\ &\le |f(x) - f(y)| + 2\varepsilon \\ &\le \sup_I f - \inf_I f + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je (8.4) ověřena.

Ze (8.4) plyne pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D).$$

Podle Věty 8.2.14 je $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Dále máme pro libovolné dělení D odhad

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(|f|, D).$$

Tedy i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d} \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Dosadíme-li do tohoto odhadu $-f$ a použijeme-li (a), dostaneme konečně

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Proto $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. ■

8.2.23. Poznámka. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva integrály ve výrazu existují. To plyne z Věty 8.2.22(c) a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

8.2.24. Věta (o derivaci funkce horní meze Riemannova integrálu)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a nechť f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J,
(b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J. Dokážeme, že $\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky inegrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Nechť K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] : |f(x)| \le K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$\begin{aligned}|F(y) - F(y_0)| &= \left|\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech J, které nejsou levým krajním bodem J, se dokáže obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. ■

8.2.25. Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom f má na (a, b) primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.2.19 je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 8.2.24 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b), tj. F je primitivní k f.

(b)Definujme funkci

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a), \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in (b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá (viz Věta **??**). Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1.4 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.26. Věta (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$;

(ii) existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 8.2.14 existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \le \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení, $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \le \underline{S}(f, D) \le \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le \overline{S}(f, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tedy f splňuje podmínku (ii), položíme-li $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii)$\Rightarrow$ (i) Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Zvolíme-li totiž $\varepsilon = 1$ a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, je dané podmínkou (ii), pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}, \quad K = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nechť $j \in \{1, \dots, n\}$ je takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = x_i, i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}, \quad t_j = t.$$

Pak

$$\begin{aligned}
|f(t)(x_i - x_{i-1})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \ne j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&\le \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\
&\le 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) \\
&= 1 + |I| + K(b - a).
\end{aligned}$$

Tedy $|f(t)| \le \frac{1}{\eta}(1 + |I| + K(b - a))$ a f je omezená.

K důkazu faktu $f \in \mathcal{R}([a, b])$ použijeme Věty 8.2.14. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a nalezněme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle (ii). Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i = 1, \dots, n$ najdeme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1})\\ &< \sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i - x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a)\\ &\le I + \varepsilon + \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < 2(1+b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.

Platí-li nyní (i), v průběhu důkazu jsme odvodili $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) pro kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ z podmínky (ii) a dělení D, $\nu(D) < \delta$ odvozenou nerovnost

$$\overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

8.2.27. Poznámky. (i) Z důkazu Věty 8.2.26 vyplývá, že

- platí-li podmínka (i), pak platí také podmínka (ii), a to s hodnotou $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
- platí-li podmínka (ii) s nějakou hodnotou I, pak tato nutně platí $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Podmínka (ii) Věty 8.2.26 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

8.3. Newtonův integrál

8.3.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že **funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál**, případně že **Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje**, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

8.3.2. Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.3.3. Poznámky. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 8.1.4).

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

8.3.4. Označení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Je-li $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

8.3.5. Příklad. (a) Je-li $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$(N)\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1,\infty),\\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty,-1),\\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

(b) Obdobně,

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1,\infty),\\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty,-1),\\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

8.3.6. Příklady. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovalná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy podle Věty 8.2.20 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá f dle Poznámky 8.1.9 primitivní funkci.

8.3.7. Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

8.3.8. Věta (vlastnosti Newtonova integrálu)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$. Nechť platí $f(x) \leq g(x)$, $x \in (a,b)$. Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť f je spojitá na (a,b). Pak $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existuje a $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(d) Nechť $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a,c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a,c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.5}$$

(e) Nechť $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a f je spojitá v b, pak $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a platí (8.5).

Důkaz. (a) Nechť F a G jsou primitivní funkce k f, respektive ke g na intervalu (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit (Věta **??**) máme

$$[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť F a G jsou primitivní funkce k f, respektive ke g na intervalu (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) (viz Věta **??**). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle (a) máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 8.1.5. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající (viz Věta **??**). Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b) a rozdíl

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$$

je definován.

Je-li tento rozdíl roven ∞, požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$, můžeme použít tvrzení (b), jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$,

a tedy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \max\{\int_a^b f(x),\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\}\\ &= \max\{\int_a^b f(x),\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x\}\\ &\le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(d) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,c). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a,b) a (b,c). Navíc má v bodě b, jakožto spojitá funkce na (a,c), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^c = [F]_a^b + [F]_b^c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(e) Nechť F je primitivní k f na (a,b) a G na (b,c). Přičtením vhodné konstanty k jedné z funkcí můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x\to b_-} F(x) = \lim_{x\to b_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b),\\ \lim_{x\to b_-} F(x), & x = b,\\ G(x), & x \in (b,c).\end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,c) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \cup (b,c)$. V bodě b toto platí díky Větě **??**

$$H'(b) = \lim_{x\to b} H'(x) = \lim_{x\to b} f(x) = f(b),$$

neboť f je spojitá v b. Funkce H je tedy primitivní k f na (a,c) a má vlastní limity v krajních bodech (a,c), protože je v příslušných bodech mají funkce F a G. Tedy $f \in \mathcal{N}(a,c)$. ∎

8.3.9. Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť F a G jsou funkce definované na (a,b). Nechť existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

8.3.10. Věta (per partes pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce definované na (a, b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b). Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Z Poznámky 8.3.9 plyne, že

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b \\ &= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.3.11. Věta (substituce pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $\alpha < \beta$. Nechť f je funkce definovaná na (a, b) a nechť φ je funkce definovaná na (α, β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a nechť platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ' zřejmě má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 8.1.7) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ', tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β).

Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce (Věta **??**) plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \to \beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to \alpha_+} \varphi(t) = b$$

a z Věty **??**

$$\lim_{t\to\alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to b_-} F(x), \qquad \lim_{t\to\beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ &= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Předpokládáme-li existenci integrálu $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$, označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 8.1.12 pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \qquad \lim_{x\to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t), \qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

8.3.12. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** Nechť $a\in\mathbb{R}^*$ a nechť $\delta_0\in\mathbb{R}$, $\delta_0>0$. Nechť funkce F je definována alespoň na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \varepsilon>0\ \exists\delta\in\mathbb{R}, \delta>0\ \forall x,y\in P(a,\delta): |F(x)-F(y)|<\varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$ a $A\in\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta\in\mathbb{R}$ kladné, že

$$\forall x\in P(a,\delta): |F(x)-A|<\varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x,y\in P(a,\delta)$ máme

$$|F(x)-F(y)| \le |F(x)-A| + |A-F(y)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a,\delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a,\delta)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Věta **??**). Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbb{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$ (ta existuje díky Větě **??**). Pak $\lim_{x\to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty **??** máme proto $\lim_{x\to a} F(x) = A$. ■

8.3.13. Poznámka. Tvrzení Věty 8.3.12 platí obdobně i pro jednostranné limity.

8.3.14. Věta (o newtonovské integrovatelnosti omezené spojité funkce na omezeném intervalu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Podle Věty 8.1.5(a) má f na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) : |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí z Věty 8.1.6(c)

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x\to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 8.3.12.

Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně. ■

8.3.15. Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 8.3.14 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

8.3.16. Věta (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, existuje podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.2.26) $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Mějme tedy $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno a $\delta \in (0, \infty)$ nalezeno tak, že splňuje tuto podmínku. Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x\to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x\to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$ dle Poznámky 8.1.2(a) a faktu $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i = 1, \dots, n$ použijeme Lagrangeovu větu **??** k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n (H(x_i) - H(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.3.17. Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 8.2.19, Věty 8.3.14 a Věty 8.3.16. ■

8.4. Konvergence Newtonova integrálu

8.4.1. Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva (viz Věta **??**) a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní.

Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 8.3.14. Věta 8.3.8(e) nyní dává $f \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

8.4.2. Poznámka. Tvrzení Věty 8.4.1 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

8.4.3. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Máme totiž pomocí per partes

$$\int \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos\frac{1}{x} - \int x\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy
$$\int \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos\frac{1}{x} - \int \cos\frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$
Protože $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}$ konverguje (Věta 8.3.14), konverguje i
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu
$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t\left(\sin\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
(viz Věta 8.3.11). ♣

8.4.4. Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy dle Věty 8.3.14 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \le \frac{1}{x^4+1} \le \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$ (Příklad 8.3.5(b)), je podle Věty 8.4.1 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Použitím Věty 8.3.8(e) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$. ♣

8.4.5. Věta (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. Označme $c = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Z Věty **??** existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že
$$\forall x \in [x_0,b) : \frac{f(x)}{g(x)} \ge \frac{1}{2}c.$$
Platí tedy
$$\forall x \in [x_0,b) : 0 \le g(x) \le \frac{2}{c}f(x).$$
Jelikož $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0,b)$ dle Věty 8.3.8(c), a tedy Věta 8.4.1 dává $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a,x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Dle Věty 8.3.8(d) je $g \in \mathcal{N}(a,x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0,b). ■

8.4.6. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2. \end{aligned}$$

Podle Věty 8.4.5 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$ (Příklad 8.3.5(b)). ♣

8.4.7. Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Speciálně platí

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg (viz Věta 8.2.18) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow \\ &\qquad (|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \& \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme ze (8.6) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (8.6)

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\\
&\leq g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\\
&\leq g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}
$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\; dt\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}\\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})\right) + \tilde{\varepsilon}\\
&= g(a)\sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).
\end{aligned}
$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. ∎

8.4.8. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

(b) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. V obou případech má funkce fg na (a,b) funkci primitivní, označme ji H. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nerostoucí. V opačném případě bychom mohli pracovat s funkcí $-g$, neboť změna znaménka u g konvergenci integrálu $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ neovlivní.

(a) Můžeme předpokládat, že g je nezáporná, protože jinak bychom uvažovali funkci $g(x)+K$, kde K je číslo splňující

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < K.$$

Pak totiž konvergence integrálu

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)(g(x)+K) - f(x)K)\,\mathrm{d}x$$

plyne z dokázaného tvrzení pro nezápornou funkci a Věty 8.3.8(a).

Mějme tedy g nezápornou a nechť $C \in (0,\infty)$ splňuje

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < C.$$

Podle předpokladu existuje $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. K němu nalezneme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro funkce (Věta 8.3.12) kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b,\delta) : -\varepsilon < F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

Potom pro x, y z okolí $P_-(b,\delta)$, $x < y$, platí podle Lemmatu 8.4.7

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(x) \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \le g(x)\varepsilon \le C\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}x \ge g(x) \inf_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge g(x) \inf_{x\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \ge -g(x)\varepsilon \ge -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Tedy H splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v bodě b zleva, má v něm vlastní limitu zleva.

Snadnou úvahou pak obdržíme $fg \in \mathcal{N}(a,b)$ (viz závěr důkazu Věty 8.4.1). Podrobněji, zvolme $c \in (a,b)$. Ze spojitosti funkce fg na $[a,c]$ odvodíme $fg \in \mathcal{N}(a,c)$ (Věta 8.3.14). Dále H je spojitá v c, a tedy má zde vlastní limitu. Proto $fg \in \mathcal{N}(a,c)$. Věta 8.3.8(e) pak završí argumentaci.

(b) Z předpokladu plyne, že $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in [a,b)$. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je takové, že

$$\forall x \in (a,b) : |F(x)| < K.$$

Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_-(b,\delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Pak pro $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$ máme

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq \varepsilon \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq g(x) \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\geq \varepsilon \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\geq -2K\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| \leq 2K\varepsilon.$$

Tedy Věta 8.3.12 říká, že H má vlastní limitu v b zleva. Jako výše pak důkaz uzavřeme pozorováním, že $fg \in \mathcal{N}(a,b)$. ■

8.4.9. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 8.4.8(b) pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f, totiž $\sin x$, je omezená na $(1,\infty)$ a $g(x)$ je na $[1,\infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. A obě funkce jsou zjevně spojité na $[1,\infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje. ♣

8.4.10. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \operatorname{arctg} x \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 8.4.8(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 8.4.8(a). ♣

8.4.11. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Protože platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$

stačí dle Věty 8.4.1 ověřit divergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pišme

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Jest

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,dx = \frac{1}{4}\int_2^\infty \frac{\cos y}{y}\,dy$$

a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž

$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$

přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by podle Věty 8.3.8(a) platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$. ♣

8.4.12. Věta (první věta o střední hodnotě)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M (viz Věta **??**). Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{8.7}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (8.7) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$ dle Věty **??**, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.4.13. Věta (druhá věta o střední hodnotě)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je monotónní a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.8}$$

Důkaz. Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (8.8).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b))\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$ (Věta 8.2.24), a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y\in[a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 8.4.7 pak dává

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t\\ &\le \psi(a)\sup_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\\ &= (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\le (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \max_{t\in[a,b]}\left((g(a)-g(b))\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \varphi(y_1).\end{aligned}$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 8.4.7

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \ge \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a,b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ (Věta **??**), a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

8.4.14. Poznámka. Věta 8.4.13 nabízí alternativní důkaz Věty 8.4.8. Mějme totiž f, g, F, H jako v důkazu Věty 8.4.8. V případě tvrzení (a) najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b,\delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nechť g je omezená konstantou C. Vezměme $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Ať $c \in [x,y]$ splňuje

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.9}$$

Pak pro tato x, y máme

$$\begin{aligned} |H(x)-H(y)| &= \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| = \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le C\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + C\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= C\,|F(c)-F(x)| + C\,|F(y)-F(c)| \\ &\le 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy H má v b zleva vlastní limitu a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

V Případě tvrzení (b) Věty 8.4.8(b), nechť C omezuje F a $|g(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P_-(b,\delta)$. Nechť $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Najdeme bod $c \in [x,y]$ splňující (8.9). Pak máme odhad

$$\begin{aligned} |H(x)-H(y)| &= \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| = \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \varepsilon\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \varepsilon\,|F(c)-F(x)| + \varepsilon\,|F(y)-F(c)| \\ &\le 4C\varepsilon. \end{aligned}$$

Důkaz pak dokončíme jako výše.

8.5. Aplikace určitého integrálu

8.5.1. Věta (Integrální kritérium)**.** Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0,\infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \ge n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz. Uvažujme $N \in \mathbb{N}$, $N \ge n_0$ a dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, N-1, N\}$ intervalu $[n_0, N]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f,D) = a_{n_0} + \dots + a_{N-1} = \sum_{i=n_0}^{N-1} a_i,$$

$$\underline{S}(f,D) = a_{n_0+1} + \dots + a_N = \sum_{i=n_0+1}^{N} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0, N]$, platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0+1}^{N} a_i &= \underline{S}(f, D) \leq (R)\int_{n_0}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (N)\int_{n_0}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{n_0}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{N-1} a_i.\end{aligned} \tag{8.10}$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $N > n_0$ máme z (8.10)

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{N\to\infty} F(N) \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{N\to\infty}\sum_{i=n_0+1}^{N} a_i \\ &= \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i.\end{aligned}$$

Proto $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak pro (8.10) dává

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=n_0}^{N-1} a_i \geq \limsup_{N\to\infty}(N)\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d} \\ &= \limsup_{N\to\infty} F(N).\end{aligned} \tag{8.11}$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (8.11) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. ■

8.5.2. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a neklesající na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_{2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 8.5.1. ♣

8.5.3. Věta (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)**.** Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Pak

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = (N) \int_a^x \frac{1}{n!} f^{n+1}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t. \tag{8.12}$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = (N) \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t,$$

tedy (8.12) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes (Věta 8.3.10) počítat

$$\begin{aligned}
(N) &\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \right]_a^x \\
&\quad - (N) \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)^n \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + (N) \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ■

8.5.4. Definice. Křivkou budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** C^1, tj. φ_i' jsou spojité na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

8.5.5. Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často popsat různými zobrazeními φ, například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

8.5.6. Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ke křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\, D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\| .$$

8.5.7. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \quad (8.13)$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ konverguje. Položme

$$y = [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \in \mathbb{R}^n.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \right) \mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \|y\|\,\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, (8.13) zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, právě provedený výpočet dává (8.13). ∎

8.5.8. Věta. Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Označme

$$g(t) = (\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2, \quad t \in [a, b].$$

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 8.5.7

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\varphi'(t)\right\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\| \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Odtud plyne $L(\varphi) \le \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$ (viz Věta **??**), existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta : \left|\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \left\|\varphi'(x_j)\right\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\varphi'(t)\right\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\le \left\|\varphi'(x_j)\right\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)\big) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t))\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\| \, \mathrm{d}t \le \sum_{j=1}^k \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + 2\varepsilon(b - a) \le L(\varphi) + 2\varepsilon(b - a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \le L(\varphi)$. ■

8.5.9. Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t$.

8.6. Teoretické příklady na integrál

8.6.1. Příklad. Definujme funkci $f : [0, 1] \to [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální,} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a, b) \in [0, 1]$ a $(R) \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

Řešení. Je-li $(a, b) \subset [0, 1]$ libovolný interval, vezmeme racionální číslo tvaru $\frac{p}{q}$, p, q nesoudělné, ležící v intervalu (a, b). Pak funkce f nenabývá na (a, b) žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0, \frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a, b) Darbouxovu vlastnost. Proto dle Věty **??** nemá na (a, b) primitivní funkci.

Ukažme nyní, že $(R) \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. K tomuto účelu postačí ukázat, že pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[0, 1]$ splňující $\overline{S}(f, D) \leq \varepsilon$. Pak totiž

$$0 \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \varepsilon$$

a $(R) \int f(x)\, \mathrm{d}x = 0$ dle Věty 8.2.14.

Najděme nyní takové dělení. Množina

$$M = \{x \in [0, 1];\ f(x) \geq \varepsilon\}$$

je konečná. Lze proto najít navzájem se neprotínající intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$ a $M \subset \bigcup_{i \in I} I_i$. Nechť D sestává z koncových bodů intervalů I_i, $i = 1, \dots, n$, s eventuálně přidanými body 01 a 1. Pak pro interval I z D různý od $I_j, \dots I_n$ platí $\sup_I f \leq \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f\right) |I_i| + \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} \left(\sup_{I} f\right) |I| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |I_i| + \varepsilon \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} |I| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

♣

8.6.2. Příklad. Nechť f je spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu (a, b). Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b) právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech (a, b).

Řešení. Má-li f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a, b), můžeme definovat $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y \to a+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{y \to b-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

Pak F je na $[a, b]$ spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá (viz Věta 8.2.18). Tedy f je stejnoměrně spojitá na (a, b).

Obráceně, je-li f stejnoměrně spojitá na (a, b), splňuje v obou krajních bodech Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 8.3.12). To ověříme takto. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle definice stejnoměrné spojitosti, tj.

$$\forall x, y \in I : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tedy pro $x, y \in P_+(a, \delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, což jsme potřebovali dokázat. ♣

8.6.3. Příklad. Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak funkce

$$x \mapsto f(x)g(x),\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \text{ a } x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

leží v $\mathcal{R}([a, b])$.

Řešení. Jelikož maximum i minimum dvou omezených funkcí je funkce omezená a

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2},\end{aligned}$$

jsou funkce $x \mapsto \max f(x), g(x)$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ riemannovsky integrovatelné dle Věty **??**.

Obraťme nyní naši pozornost k součinu fg. Protože $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2\big)$, stačí dokázat integrovatelnost f^2 pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Mějme tedy funkci $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak f^2 je omezená funkce díky omezenosti f. Je-li c konstanta, platí $f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$, a tedy stačí uvažovat nezápornou funkci f. Nechť tedy f je nezáporná a omezená číslem M. Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, najdeme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$ (viz Věta 8.2.14). Nechť $\mathcal{D}$ značí množinu intervalů v dělení D.

Protože pro množinu A nezáporných čísel platí

$$\sup A^2 = \sup\{x^2;\ x \in A\} = \big(\sup A\big)^2 \quad \text{a} \quad \inf A^2 = (\inf A)^2\,,$$

máme pro množinu A sestávající z nezáporných čísel a omezenou číslem M odhad

$$\begin{aligned}\sup A^2 - \inf A^2 &= (\sup A)^2 - (\inf A)^2 \\ &= (\sup A - \inf A)(\sup A + \inf A) \\ &\le 2M(\sup A - \inf A)\end{aligned} \tag{8.14}$$

Použitím (8.14) dostáváme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f^2,D) - \underline{S}(f^2,D) &= \sum_{I\in\mathcal{D}} \left(\sup_I f^2 - \inf_I f^2\right)|I| \\ &\le \sum_{I\in\mathcal{D}} 2M\left(\sup_I f - \inf_I f\right)|I| \\ &\le 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy f^2 je riemannovsky integrovatelná dle Věty 8.2.14. ♣

8.6.4. Příklad. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná kladná funkce na $[a,b]$. Pak $(R)\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in [a,b]$ a přitom $(R)\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Předpokládejme navíc, že f je omezená číslem 1 na $[a,b]$. Induktivně zkonstruujeme intervaly $[a_n,b_n] \subset [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,
- $0 < b_n - a_n \le \frac{1}{n}$,
- $\sup_{[a_n,b_n]} f \le \frac{1}{n}$.

V prvním kroku konstrukce položíme $[a_1,b_1] = [a,b]$ a povšimneme si, že jsou požadované vlastnosti splněny.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nedegenerované intervaly $[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n]$ splňující $\sup_{[a_n,b_n]} f \leq \frac{1}{n}$. Protože platí z Věty **??**

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a členy na pravé straně jsou nezáporné (viz Věta **??**), máme

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vezměme dělení D intervalu $[a_n, b_n]$ takové, že $S(f, D) < \frac{1}{n+1}$. Protože $S(f, D) \geq S(f, D')$ pro každé jemnější dělení D', můžeme předpokládat, že norma D je menší než $\frac{1}{n+1}$. Z definice $S(f, D)$ plyne, že alespoň na jednom intervalu určeném dělením D je supremum funkce f menší než $\frac{1}{n+1}$. Tento interval označíme jako $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, čímž je indukční krok dokončen.

Příklad 2.5.19 nyní dává, že existuje bod $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Pro něj pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(x) \leq \sup_{[a_n,b_n]} f \leq \frac{1}{n},$$

a tedy $f(x) = 0$. To je však spor s předpokladem. ♣

8.6.5. Příklad. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Odvodíme rekurentní formuli pro $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Integrací per partes totiž dostáváme pro $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1} x \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x.$$

Proto
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x.$$
Protože
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1,$$
máme
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$
Závěrem použijeme substituci $t = \frac{\pi}{2} - x$ k odvození
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

♣

8.6.6. Příklad (Wallisova formule)**.** Ukažte, že
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Díky Příkladu 8.6.5 máme
$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k},$$
$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$
Tedy dostáváme
$$\frac{\pi}{2} = S_n \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{S_n}{C_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}. \tag{8.15}$$
Povšimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí
$$0 < \sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$
a tedy dle Příkladu 8.6.4
$$0 < S_{n+1} \le C_n \le S_n \le C_{n-1}.$$

Tím pádem máme

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \geq \frac{S_n}{C_n} \geq \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Limitním přechodem v (8.15) máme požadovanou rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$$

♣

8.6.7. Příklad (Stirlingův vzorec)**.** Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Řešení. Označme

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad \text{a} \quad b_n = \log a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1. \tag{8.16}$$

Protože dle Příkladu **??** platí

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1,1),$$

máme

$$\log\frac{n+1}{n} = \log\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Dosazením do (8.16) dostaneme

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$ klesající.

Dále dostáváme odhad

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k = \frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Tím pádem obdržíme

$$\begin{aligned} b_1 - b_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) \\ &\le \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\le \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$, jakožto klesající a zdola omezená, konvergentní k nějakému číslu b. Z toho máme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^b.$$

Označíme $C = e^b$ a spočtěme její hodnotu. Protože víme z Příkladu 8.6.6, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)},$$

máme použitím $\lim a_n = C$ rovnost

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} C^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} \\ &= C^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} 4n^2 n^{4n}}{4n(2n+1)(2n)^{4n}} = C^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(2n+1)} \\ &= \frac{C^2}{2}. \end{aligned}$$

Protože $C \ge 0$, dostáváme

$$C = \sqrt{\pi}$$

a Stirlingova formule je odvozena. ♣

8.6.8. Příklad (Laplaceův-Gaussův integrál)**.** Ukažte, že

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí po substituci $x = \sin t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \,\mathrm{d}t = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \tag{8.17}$$

podle Příkladu 8.6.5. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí díky substituci $x = \operatorname{tg} t$ a opět díky Příkladu 8.6.5

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cos^{-2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Dále platí

$$1 - y \le e^{-y} \le \frac{1}{1+y}, \quad y \in [0, \infty). \tag{8.19}$$

Označíme-li totiž

$$\varphi_1(y) = e^{-y} - 1 + y, \quad \varphi_2(y) = 1 - (1+y)e^{-y}, \quad y \in [0, \infty),$$

pak

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

a

$$\varphi_1'(y) = 1 - e^{-y} > 0, \quad \varphi_2'(y) = ye^{-y} > 0, \quad y \in (0, \infty).$$

Obě funkce jsou tedy rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta **??**), a proto nezáporné na $(0, \infty)$. Odtud již plyne (8.19).

Z (8.19) máme

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2}, \quad x \in (0,1),$$

a

$$e^{-nx^2} \le \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\infty} e^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

Substitucí $t = x\sqrt{n}$ dostaneme

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \le \sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

Z rovností (8.17) a (8.18) obdržíme

$$\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \le \int_0^{\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \le \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2}. \tag{8.20}$$

Spočtěme nyní limity krajních výrazů v (8.20). Použitím Stirlingovy formule 8.6.7 máme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi n\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi n\sqrt{n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{e}{(e^{\frac{1}{2}})^2}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Z tohoto vzorce pak dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}\frac{\pi}{2(2n+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}\\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Tedy z Věty **??** máme limitním přechodem v (8.20)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

8.6.9. Příklad. Ukažte, že číslo π je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\pi = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme polynomy

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^n b^k x^k,$$
$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Všimněme si, že $n! f(x)$ má celé koeficenty a členy u x mají stupeň alespoň n. Proto

$$f(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}. \tag{8.21}$$

Protože $f(x) = f(\frac{a}{b} - x) = f(\pi - x)$, platí též

$$f(\pi), f^{(1)}(\pi), \dots, f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}. \tag{8.22}$$

Protože $f^{(2n+2)}(x) = 0$, odvodíme

$$\big(F'(x) \sin x - F(x) \cos x\big)' = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x.$$

Tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = \big[F'(x) \sin x - F(x) \cos x\big] = F(\pi) + F(0).$$

Díky (8.21) a (8.22) platí

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ale máme

$$0 < f(x) \sin x < \frac{1}{n!} (\pi^n a^n),$$

a tedy dle Příkladu 8.6.4 platí

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x < \pi \frac{1}{n!} (\pi^n a^n).$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \in \mathbb{N} \cap (0, 1),$$

což je spor. ∎

8.6.10. Příklad. Nechť f je sudá funkce a $[-a, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}([-a, a])$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a, a)$), pak

$$(R) \int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2(R) \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{(resp. } (N) \int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2(N) \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x\text{)}.$$

Nechť f je lichá funkce a $[-a,a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}([-a,a])$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a,a)$), pak

$$(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (\text{resp. } (N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0).$$

Řešení. Pro newtonovsky integrovatelné funkce tvrzení snadno plyne z Věty o substituci 8.3.11, neboť substitucí $x = -t$ dostaneme pro sudou funkci rovnost

$$\begin{aligned}(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2(N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

pro lichou pak

$$\begin{aligned}(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= (N)\int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 0.\end{aligned}$$

Nechť f je nyní sudá funkce riemannovsky integrovatelná na $[-a,a]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení $D_n^+ = \{\frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$ a $D_n^- = \{-a + \frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$. Díky Důsledku **??** platí

$$\overline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) \quad \text{a} \quad \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+).$$

Vzhledem k sudosti funkce f platí $\overline{S}(f, D_n^-) = \overline{S}(f, D_n^+)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{\overline{0}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\overline{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= 2\int_{0}^{\overline{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Je-li funkce f lichá, platí pro výše uvažovaná dělení D_n^- a D_n^+ vztah $\overline{S}(f, D_n^+) = -\underline{S}(f, D_n^-)$. Tím pádem máme

$$\begin{aligned}
(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\underline{-a}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\overline{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

8.6.11. Příklad. Ukažte, že součin dvou riemannovsky integrovatelných funkcí na omezeném uzavřeném intervaly je opět riemannovsky integrovatelná funkce. Dále najděte příklad newtonovsky integrovatelné funkce na otevřeném intervalu, jejíž druhá mocnina není newtonovsky integrovatelná.

Řešení. Mějme $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Protože

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

stačí dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$ pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Jelikož je riemannovsky intergovatelná funkce omezená, lze přičtením vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ zařídit, že $f + c$ je nezáporná. Pak ale

$$f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$$

je v $\mathcal{R}([a,b])$, pokud $f+c \in \mathcal{R}([a,b])$. Lze tedy předpokládat, že f je nezáporná riemannovsky integrovatelná funcke na $[a,b]$. Naším cílem je dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$.

Nejprve si rozmysleme, že pro omezenou $A \subset [0,\infty)$ platí

$$(\sup A)^2 = \sup\{a^2;\ a \in A\} \quad \text{a} \quad (\inf A)^2 = \inf\{a^2;\ a \in A\}. \tag{8.23}$$

Z nerovnosti $(\sup A)^2 \geq a^2$, $a \in A$, je totiž patrné, že $(\sup A)^2 \geq \sup\{a^2;\ a \in A\}$. Máme-li $\varepsilon(0,\infty)$ dáno, najdeme $\tilde{a} \in A$ takové, že $\tilde{a} > \sup A - \varepsilon$. Pak

$$\sup\{a^2;\ a \in A\} \geq (\tilde{a})^2 > (\sup A)^2 - \varepsilon(2\sup A - \varepsilon).$$

Tedy dostáváme i opačnou nerovnost pro první tvrzení. Druhé se dokáže obdobně.

Mějme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolné. Podle Věty 8.2.14 najdeme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \leq \varepsilon.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ omezuje f na $[a,b]$. Pak máme z (8.23)

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f^2,D) - \underline{S}(f^2,D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f^2 - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f^2 \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2 - (\inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2 \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f + \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f) \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq 2M \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq 2M \leq 2M \left(\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \right) \leq 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Věta 8.2.14 říká, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$.

Pro důkaz druhé části tvrzení stačí uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1)$. Pak $f \in \mathcal{N}(0,1)$, ale $f^2 \notin \mathcal{N}(0,1)$. ♣

8.6.12. Příklad. Najděte příklad funkce f, která má primitivní funkci na intervalu $(-1,1)$, ale $|f|$ ani f^2 primitivní funkci na $(-1,1)$ nemá.

Řešení. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x^3}) + 3\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Protože je funkce

$$g(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

spojitá na $(-1,1)$, má zde primitivní funkci. Tedy i funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

má primitivní funkci na $(-1,1)$. Ukážeme, že

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\left|\sin(\frac{1}{x^3})\right|, & x \in (-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

primitivní funkci na $(-1,1)$ nemá. Předpokládejme, že G je primitivní funkce k $|f|$ na $(-1,1)$. Položme

$$H(x) = (R)\int_{-1}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad x \in (-1,0).$$

Pak H je dobře definovaná funkce na $(-1,0)$ (Věta **??**) a její derivace je zde rovna $|f|$ (Věta **??**). Věta 8.1.4 tedy dává existenci konstanty $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) + c$, $x \in (-1,0)$. Pak tedy

$$\lim_{x\to 0_-} H(x) = G(0) + c$$

je vlastní. Ukážeme, že tento fakt vede ke sporu. Počítejme pomocí Věty o substituci 8.1.10

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} H(x) &= \lim_{x\to 0_-} (R)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_+} (N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t^{\frac{2}{3}}} \,\mathrm{d}t \\
&\geq (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t} \,\mathrm{d}t = \infty
\end{aligned}$$

(poslední rovnost plyne z Příkladu **??**). Tím jsme dostali kýžený spor.

Pro funkci f^2 postupujeme obdobně pomocí výpočtu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} (R)\int_{-1}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^4}\left(\sin(\frac{1}{t^3})\right)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} t^2(\sin t^3)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_+} (N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} t^2(\sin t^3)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} t^2(\sin t^3)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}(N)\int_{1}^{\infty} \sin^2 t \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^{\infty} = \infty.
\end{aligned}$$

♣

KAPITOLA 9

Metrické prostory

9.1. Základní pojmy

9.1.1. Definice. Nechť P je množina a nechť $\varrho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující pro všechna $x, y, z \in P$

(i) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou na** P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P, pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

9.1.2. Poznámky. (a) Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ, pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Vlastnosti (i)–(iii) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (i) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (ii) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x. Vlastnost (iii), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

(b) Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P“, pokud je volba metriky ϱ zřejmá z kontextu.

9.1.3. Poznámka. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina.

9.1.4. Příklad. Definujeme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že potom $(\mathbb{R}, \varrho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Musíme ověřit platnost výroků (i), (ii) a (iii) z Definice 9.1.1. Výroky (i) a (ii) jsou ale zřejmé a výrok (iii) je trojúhelníková nerovnost reálných čísel (Věta B.1.38). ♣

9.1.5. V dalším textu budeme na metrickém prostoru $\mathbb{R}$ vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v Příkladu 9.1.4, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

9.1.6. Příklad. Nechť P je množina všech posloupností, jejichž prvky jsou nuly nebo jedničky, tedy

$$P = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty};\ \forall n \in \mathbb{N}: \text{buď } x_n = 0 \text{ nebo } x_n = 1\}.$$

Prvky množiny P budeme zkráceně označovat symboly $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ a podobně. Řekneme, že $x = y$, jestliže $x_n = y_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Na množině $P \times P$ definujeme funkci ϱ následujícím předpisem. Nejprve pro každé $x \in P$ definujeme

$$\varrho(x, x) = 0.$$

Dále pro každá $x, y \in P$, pro která existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $x_m \neq y_m$, definujeme

$$\varrho(x, y) = \tfrac{1}{k}, \text{ kde } k = \min\{m \in \mathbb{N};\ x_m \neq y_m\}.$$

Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Funkce ϱ je zřejmě nezáporná na $P \times P$ a navíc zřejmě platí $\varrho(x, y) > 0$ právě tehdy, když $x \neq y$. Očividně také platí $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro každé $x, y \in P$. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost. Nechť $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom zřejmě platí

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z). \tag{9.1}$$

Předpokládejme, že $x \neq z$ a že $\varrho(x, z) = \frac{1}{k}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Jestliže $\varrho(x, y) \geq \frac{1}{k}$, pak (9.1) opět zřejmě platí. Nechť $\varrho(x, y) < \frac{1}{k}$. Potom pro každé $j \in \{1, \ldots, k\}$ platí $x_j = y_j$. Speciálně také platí $x_k = y_k$, a tedy $y_k \neq z_k$. Tudíž $\varrho(y, z) \geq k$, a tedy nerovnost (9.1) opět platí. Ověřili jsme, že funkce ϱ je metrikou na množině $P \times P$, a tedy (P, ϱ) je metrický prostor. ♣

9.1.7. Příklad. Nechť $P = \mathbb{R}^n$. Definujeme funkci ϱ_e na $P \times P$ předpisem

$$\varrho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

kde $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$. Dokažte, že (P, ϱ_e) tvoří metrický prostor.

Funkci ϱ_e nazýváme **eukleidovskou metrikou** na $\mathbb{R}^n$. Eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}^n$ někdy též nazýváme **ℓ^2-metrikou** a označujeme ji symbolem

ϱ_2. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_e na $\mathbb{R}$ s metrikou ϱ zavedenou v Příkladu 9.1.4.

Řešení. Podmínky (i) a (ii) jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (iii). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Označme $a_i = x_i - z_i$ a $b_i = z_i - y_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy nerovnosti (Příklad **??**) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2}\\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2}\\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.\end{aligned}$$

Dokázali jsme nerovnost

$$\varrho_e(x, y) \leq \varrho_e(x, z) + \varrho_e(y, z),$$

takže vlastnost (iii) je splněna. Funkce ϱ_e je tedy metrikou na $\mathbb{R}^n$. ♣

9.1.8. Příklad. Nechť $P = \mathbb{R}^n$. Definujeme funkci ϱ_1 na $P \times P$ předpisem

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

kde $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Je snadné ověřit, že (P, ϱ_1) tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_1 nazýváme **součtovou metrikou** (též ℓ^1-**metrikou**) na $\mathbb{R}^n$.

9.1.9. Příklad. Nechť $P = \mathbb{R}^n$. Definujeme funkci ϱ_∞ na $P \times P$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \dots, n\},$$

kde $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Je snadné ověřit, že (P, ϱ_∞) tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_∞ nazýváme **maximovou metrikou** (též ℓ^∞-**metrikou**) na $\mathbb{R}^n$.

9.1.10. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$, tedy

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f \text{ je spojitá na } [a, b]\}.$$

Nechť $P = \mathcal{C}([a,b])$. Definujeme funkci ϱ_{sup} na $P \times P$ předpisem

$$\varrho_{\text{sup}}(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $(P, \varrho_{\text{sup}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{sup} nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a,b])$.

Řešení. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Podle věty o spojitosti a aritmetických operacích (Věty **??**) a poznámky o spojitosti složené funkce (Poznámka **??**) platí $|f-g| \in \mathcal{C}([a,b])$. Podle věty o existenci extrémů (Věta **??**) nabývá funkce $|f-g|$ na $[a,b]$ svého maxima, takže funkce ϱ_{sup} je na $P \times P$ dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{sup}}(f,g) \in [0,\infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Vlastnosti (i) a (ii) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Nechť $f, g, h \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| \\ &= \varrho_{\text{sup}}(f,h) + \varrho_{\text{sup}}(h,g). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\text{sup}}(f,h) + \varrho_{\text{sup}}(h,g)$ je horní závorou množiny $\{|f(x) - g(x)|;\ x \in [a,b]\}$, a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\text{sup}}(f,g) \le \varrho_{\text{sup}}(f,h) + \varrho_{\text{sup}}(h,g).$$

Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{sup}})$ je metrický prostor. ♣

9.1.11. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $P = \mathcal{C}([a,b])$. Definujeme funkci ϱ_{int} na $P \times P$ předpisem

$$\varrho_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx,$$

kde $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Dokažte, že $(P, \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a,b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující tvrzení.

9.1.12. Tvrzení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $h \in \mathcal{C}([a,b])$. Nechť existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)|\,dx > 0$.

Důkaz. Nechť nejprve x_0 je vnitřním bodem $[a,b]$. Ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takového, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)|\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\,dx \ge \frac{1}{2}h(x_0)\cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0.$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takového, že $\delta < b - a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)|\, dx \geq \int_a^{a+\delta} |h(x)|\, dx \geq \frac{1}{2}h(a) \cdot \delta > 0.$$

V případě, kdy $x_0 = b$, postupujeme obdobně. ■

Řešení Příkladu 9.1.11. Podle Věty **??** je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{int}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$. Jestliže naopak $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a platí $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$, pak podle Tvrzení 9.1.12 je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena vlastnost (i) z Definice 9.1.1. Ověření vlastností (ii) a (iii) je snadné. ♣

9.1.13. Příklad. Nechť P je libovolná množina. Definujeme funkci $\varrho_{\text{diskr}} : P \times P \to [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P.

Řešení. Vlastnosti (i) a (ii) jsou zřejmě splněny. Nechť $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\text{diskr}}(x, z) = 0$, a tedy vlastnost (iii) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$, a tedy

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) + \varrho_{\text{diskr}}(y, z) \geq 1 = \varrho_{\text{diskr}}(x, z).$$

♣

9.1.14. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M \times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (i)-(iii) z definice metrického prostoru jsou splněny pro všechna x, y, z z P, a tedy i pro všechna x, y, z z M. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

9.1.15. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $M \subset P$. Potom $(M, \varrho|_{M \times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ). Metriku $\varrho|_{M \times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ.

Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem vektorového prostoru. Tento a další základní pojmy a výsledky lineární algebry je možné nalézt například v [**2**].

9.1.16. Definice. Nechť X je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a nechť o je jeho nulový prvek. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X, jestliže pro každé $x, y \in X$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ platí

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$,
(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem**.

9.1.17. Tvrzení. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Definujme zobrazení $\varrho : X \times X \to [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Potom ϱ je metrika na X.

Důkaz. Ověříme vlastnosti (i)–(iii) z definice metriky.

(i) Nechť $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Navíc rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = o$, neboli $x = y$.

(ii) Použijeme-li vlastnost (ii) z Definice 9.1.16 pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)|\|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x),\end{aligned}$$

tedy vlastnost (ii) z Definice 9.1.1 platí.

(iii) Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky vlastnosti (iii) z Definice 9.1.16

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i vlastnost (iii) z Definice 9.1.1. Tím je důkaz dokončen. ∎

9.1.18. Podle Tvrzení 9.1.17 můžeme tedy každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický, jestliže definujeme metriku pomocí normy právě uvedeným způsobem.

9.1.19. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a nechť $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor. Označme restrikci normy $\|\cdot\|$ na podprostor Y jako $\|\cdot\|_Y$. Potom $(Y, \|\cdot\|_Y)$ je opět normovaný lineární prostor, neboť podmínky (i)–(iii) jsou splněny pro každé $x, y \in X$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$, a tedy i pro každé $x, y \in Y$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.

9.1.20. Definice. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a nechť $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor. Označme restrikci normy $\|\cdot\|$ na podprostor Y jako $\|\cdot\|_Y$. Potom $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nazýváme **normovaným lineárním podprostorem** prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Místo $(Y, \|\cdot\|_Y)$ píšeme zpravidla jen $(Y, \|\cdot\|)$.

9.1.21. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujeme funkci $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Potom $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Funkci $\|\cdot\|$ nazýváme **eukleidovskou normou na $\mathbb{R}^n$**.

9.1.22. Příklad. Označme symbolem ℓ^∞ množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^\infty} : \ell^\infty \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární prostor.

9.1.23. Příklad. Označme symbolem c množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel. Potom $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární podprostor prostoru ℓ^∞.

9.1.24. Příklad. Označme symbolem c_0 množinu všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou. Potom $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární podprostor prostoru c, a tedy také prostoru ℓ^∞.

9.1.25. Příklad. Nechť $p \in [1, \infty)$. Označme ℓ^p množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňujících

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^p} : \ell^p \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Potom $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ je normovaný lineární prostor.

9.2. Otevřené a uzavřené množiny

9.2.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, nechť $x \in P$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom množinu $B_\varrho(x,r)$ definovanou předpisem

$$B_\varrho(x,r) = \{y \in P;\ \varrho(x,y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r. Množinu $\overline{B}_\varrho(x,r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}_\varrho(x,r) = \{y \in P;\ \varrho(x,y) \le r\}$$

pak nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r. Je-li volba metriky zřejmá z kontextu, píšeme pouze $B(x,r)$ a $\overline{B}(x,r)$ místo $B_\varrho(x,r)$ a $\overline{B}_\varrho(x,r)$.

9.2.2. Příklady. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom $B(x,r) = (x-r, x+r)$.

(b) Nechť P je libovolná množina a ϱ_{diskr} je diskrétní metrika na P definovaná v Příkladu 9.1.13. Nechť $x \in P$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \le 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

9.2.3. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Potom

(a) jestliže $0 < r_1 < r_2$, potom $\overline{B}(x,r_1) \subset B(x,r_2)$,
(b) jestliže $0 < r_1 \le r_2$, potom $B(x,r_1) \subset B(x,r_2)$.

Důkaz. (a) Nechť $y \in \overline{B}(x,r_1)$. Potom $\varrho(x,y) \le r_1 < r_2$, a tedy $y \in B(x,r_2)$.

(b) Nechť $y \in B(x,r_1)$. Potom $\varrho(x,y) < r_1 \le r_2$, a tedy $y \in B(x,r_2)$. ■

9.2.4. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x,r) \subset M$. Řekneme, že množina M je **otevřená v** (P, ϱ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem množiny** M. Vnitřek množiny M označujeme symbolem $\operatorname{Int} M$.

9.2.5. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $M, N \subset P$. Potom platí

(a) $\operatorname{Int} M \subset M$,
(b) M je otevřená množina v (P, ϱ) právě tehdy, když platí $\operatorname{Int} M = M$,
(c) jestliže $M \subset N$, pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$,
(d) jestliže M je otevřená množina v (P, ϱ), potom pro každé $x \in M$ existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $\overline{B}(x,r) \subset M$.

Důkaz. (a) Jestliže $x \in \operatorname{Int} M$, pak pro nějaké $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, platí $B(x,r) \subset M$, a tedy speciálně $x \in M$.

(b) Tvrzení plyne přímo z Definice 9.2.4.

(c) Nechť $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x,r) \subset M$. Protože $M \subset N$, platí také $B(x,r) \subset N$. Odtud plyne, že $x \in \operatorname{Int} N$. Protože $x \in \operatorname{Int} M$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme vztah $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$.

(d) Nechť $x \in M$. Podle definice otevřené množiny pak existuje $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, takové, že $B(x,s) \subset M$. Nechť $r \in \mathbb{R}$, $r \in (0,s)$. Potom podle Věty 9.2.3(a) platí $\overline{B}(x,r) \subset B(x,s) \subset M$. ■

9.2.6. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval otevřenou množinou.

Řešení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť $x \in (a,b)$. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, položíme $r = \min\{x-a, b-x\}$. Jestliže $a = -\infty$ a $b < \infty$, položíme $r = b-x$. Jestliže $a > -\infty$ a $b = \infty$, položíme $r = x - a$. Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$, zvolíme libovolné $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Ve všech případech potom zřejmě platí

$$B(x,r) = (x-r, x+r) \subset (a,b),$$

a tedy x je vnitřním bodem (a,b). Protože bod x byl zvolen libovolně, plyne odtud, že (a,b) je otevřená množina. ♣

9.2.7. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ není interval $(0,1]$ otevřenou množinou a že platí $\operatorname{Int}(0,1] = (0,1)$.

Řešení. Nechť $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom $B(1,r) = (1-r, 1+r) \not\subset (0,1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0,1]$. Interval $(0,1]$ tedy není otevřenou množinou. Z Příkladu 9.2.6 vyplývá, že každý bod $x \in (0,1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0,1)$. Z Věty 9.2.5(c) vyplývá, že tím spíše je každý bod $x \in (0,1)$ vnitřním bodem intervalu $(0,1]$. Odtud plyne, že $\operatorname{Int}(0,1] = (0,1)$. ♣

9.2.8. Poznámka. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, nechť $x_0 \in P$ a $r_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$. Potom otevřená koule $B(x_0,r_0)$ je otevřenou množinou v P.

Důkaz. Zvolme $x \in B(x_0,r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0,x)$. Potom platí, že $r > 0$. Pro každé $y \in B(x,r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0,y) \le \varrho(x_0,x) + \varrho(x,y) < \varrho(x_0,x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0,r_0)$. Protože y bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $B(x,r) \subset B(x_0,r_0)$. Tudíž každý bod množiny $B(x_0,r_0)$ je jejím vnitřním bodem, a tedy $B(x_0,r_0)$ je otevřená množina. ■

9.2.9. Věta (vlastnosti otevřených množin)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a celý prostor P jsou otevřené množiny v prostoru (P, ϱ).

(b) Nechť I je neprázdná indexová množina. Nechť pro každé $\alpha \in I$ je množina G_α otevřená v prostoru (P, ϱ). Potom je množina $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ otevřená v prostoru (P, ϱ).

(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené v prostoru (P, ϱ). Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v prostoru (P, ϱ).

Důkaz. (a) Tvrzení zřejmě platí.

(b) Nechť $x \in \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Potom existuje $\beta \in I$ takové, že $x \in G_\beta$. Protože G_β je otevřená v P, existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové že $B(x, r) \subset G_\beta$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, takže $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ je otevřená množina v P.

(c) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená v P, tedy existuje $r_i \in \mathbb{R}$, $r_i > 0$, takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i;\ i \in \{1, \dots, m\}\}$. Potom dle Věty 9.2.3(b) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená v P. ■

9.2.10. V tvrzení Věty 9.2.9(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný soubor otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor $\mathbb{R}$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je G_n otevřená v prostoru $\mathbb{R}$, ale $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}$, jak víme z Příkladu 9.2.7.

9.2.11. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\operatorname{Int} M$ je otevřená množina v prostoru (P, ϱ) a navíc platí

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x, r);\ x \in P,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B(x, r) \subset M\},$$

což je otevřená množina v prostoru (P, ϱ) dle Věty 9.2.9(b).

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x, r);\ x \in P,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B(x, r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\operatorname{Int} M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak existují $x \in P$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, taková, že $B(x, r) \subset M$ a $y \in B(x, r)$. Podle Poznámky 9.2.8 je množina $B(x, r)$ otevřená v (P, ϱ), a tedy existuje $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, takové, že $B(y, s) \subset$

$B(x,r)$, tedy $B(y,s) \subset M$. Jinými slovy, $y \in \operatorname{Int} M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \operatorname{Int} M$, a tedy množinová rovnost $G = \operatorname{Int} M$.

Otevřenost množiny $\operatorname{Int} M$ pak plyne z právě dokázané rovnosti a z Věty 9.2.9(b). ∎

9.2.12. Věta (struktura otevřených množin na $\mathbb{R}$)**.** Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ právě tehdy, když je G je buď prázdná nebo je spočetným sjednocením po dvou disjunktních otevřených intervalů.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $G \neq \emptyset$ a nechť $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R};\ [x,y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R};\ [y,z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Jestliže $a_y = -\infty$, pak zřejmě $a_y \notin G$. Předpokládejme tedy, že $a_y \in \mathbb{R}$ a navíc $a_y \in G$. Potom existuje nějaké $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0,r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y. Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že

$$(a_y, b_y) \subset G.$$

Nechť $x \in (a_y, b_y)$. Potom buď $x \in (a_y, y]$ a $[x,y] \subset G$ nebo $x \in [y, b_y)$ a $[y,x] \subset G$, každopádně ovšem platí $x \in G$.

Nechť $\mathcal{I}$ je systém všech otevřených intervalů I takových, že $I = (a_y, b_y)$ pro nějaké $y \in G$. Potom $\bigcup \mathcal{I} \subset G$. Inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{I}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{I}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{I}$.

Nechť $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže $a_z \geq b_y$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém $\mathcal{I}$ je tedy disjunktní.

Z Příkladu **??** plyne, že systém $\mathcal{I}$ je spočetný.

$\Leftarrow$ Tato implikace ihned plyne z Příkladu 9.2.6 a Věty 9.2.9(b). ∎

9.2.13. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, jestliže pro každé $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny** M a značíme ji ∂M.

9.2.14. Poznámka. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny.

9.2.15. Věta (vlastnosti hranice)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $M \subset P$. Potom platí

(a) $\partial M = \partial(P \setminus M)$,
(b) $\partial P = \partial\emptyset = \emptyset$.

Důkaz. (a) Tvrzení zřejmě plyne přímo z definice hraničního bodu (Definice 9.2.13).

(b) Nechť $x \in P$. Potom pro každé $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, platí $B(x,r) \cap \emptyset = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial\emptyset$. Odtud vyplývá, že $\partial\emptyset = \emptyset$. Odtud a z tvrzení (a) potom plyne, že $\partial P = \emptyset$. ■

9.2.16. Příklady. (a) Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je hranicí intervalu $(0,1)$ množina $\{0,1\}$.

(b) Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ platí: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ a $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

(c) Nechť P je libovolná množina a ϱ_{diskr} je diskrétní metrika na P, definovaná v Příkladu 9.1.13. Nechť $M \subset P$ je libovolná množina. Dokažte, že $\partial M = \emptyset$.

Řešení. (a) Označme $M = (0,1)$. Nechť $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom $B(0,r) = (-r,r)$, a tedy $B(0,r) \cap M = (0,\max\{r,1\}) \neq \emptyset$ a $B(0,r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r,0] \neq \emptyset$. Odtud plyne, že $0 \in \partial M$. Podobně lze dokázat, že $1 \in \partial M$. Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, pak existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x,r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial M$. Je-li $x \in (0,1)$, pak existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin \partial M$. Odtud již plyne tvrzení.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom $B(x,r) = (x-r,x+r)$. Podle věty o hustotě racionálních a iracionálních čísel v $\mathbb{R}$ (Věta 1.6.33) plyne, že existují $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x,r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in \partial\mathbb{Q}$ a také (viz též Větu 9.2.15(a)) $x \in \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(c) Nechť $x \in P$. Potom pro $r \in \mathbb{R}$, $r \in (0,1]$, je dle Příkladu 9.2.2(b) $B(x,r) = \{x\}$. Jestliže $x \in M$, pak $B(x,r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x,r) \cap M = \emptyset$. V každém případě x není hraničním bodem M. Protože x bylo zvoleno libovolně, je $\partial M = \emptyset$. ♣

9.2.17. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, nechť $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem množiny** M **v prostoru** (P,ϱ).

9.2.18. Poznámka. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

9.2.19. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, a nechť $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená v prostoru** (P,ϱ), jestliže $\overline{M} = M$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme jen, že M je **uzavřená v** P.

9.2.20. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená v prostoru (P, ϱ) právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body, tedy když $\partial M \subset M$.

9.2.21. Příklady. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$.

(a) Nechť $M = (0, 1]$. Dokažte, že M není ani otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ a $\overline{M} = [0, 1]$.

(b) Nechť $M = \mathbb{Q}$. Dokažte, že M není ani otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int} M = \emptyset$ a $\overline{M} = \mathbb{R}$.

Řešení. (a) Z Příkladu 9.2.7 víme, že M není otevřená množina a že $\operatorname{Int} M = (0, 1)$. Dále podle Příkladu 9.2.16(a) platí $\partial M = \{0, 1\}$. Odtud plyne, že $\overline{M} = [0, 1]$, a tedy M není ani uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

(b) Z Příkladu 9.2.16(a) víme, $\partial M = \mathbb{R}$, takže $\overline{M} = \mathbb{R}$. Tudíž $M \neq \overline{M}$, a tedy M není uzavřená v $\mathbb{R}$. Z téže věty, přesněji řečeno z hustoty iracionálních čísel plyne, že $\operatorname{Int}(M) = \emptyset$, a tedy M není otevřená v $\mathbb{R}$. ♣

9.2.22. Příklad. Nechť P je libovolná množina, ϱ_{diskr} je diskrétní metrika na P a $M \subset P$. Dokažte, že potom M je současně otevřená i uzavřená množina v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$.

Řešení. Nechť $x \in M$. Potom je dle Příkladu 9.2.2(b) $B(x, 1) = \{x\}$, tedy $B(x, 1) \subset M$, takže M je otevřená v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. Z Příkladu 9.2.16(b) dále vyplývá, že $\partial M = \emptyset$, takže $\partial M \subset M$. Množina M je tedy také uzavřená v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. ♣

9.2.23. Věta (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $M \subset P$. Potom M je otevřená množina v prostoru (P, ϱ) právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená množina v prostoru (P, ϱ).

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť M je otevřená množina v prostoru (P, ϱ) a $x \in M$. Potom existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \subset M$, tedy $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Odtud plyne, že $x \notin \partial(P \setminus M)$. To ale znamená, že $\partial(P \setminus M) \subset P \setminus M$, neboli $P \setminus M$ je uzavřená množina v prostoru (P, ϱ).

$\Leftarrow$ Předpokládejme nyní, že $P \setminus M$ je uzavřená množina v prostoru (P, ϱ), tedy že $\partial(P \setminus M) \subset P \setminus M$. Nechť $x \in M$. Potom tedy $x \notin \partial(P \setminus M)$, takže existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že buď $B(x, r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První z těchto dvou možností ale nemůže nastat, protože zřejmě platí $x \in B(x, r) \cap M$. Nastává tedy druhá možnost, to jest $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. To ovšem znamená, že $B(x, r) \subset M$, takže M je otevřená množina v prostoru (P, ϱ). ■

9.2.24. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $x \in P$. Dokažte, že jednobodová množina $\{x\}$ je uzavřená v (P, ϱ).

Řešení. Nechť $y \in P \setminus \{x\}$. Dle vlastnosti (i) z Definice 9.1.1 vyplývá, že $\varrho(x, y) > 0$. Označme $r = \varrho(x, y)$. Potom $B(y, r) \subset P \setminus \{x\}$. Množina $P \setminus \{x\}$ je tedy otevřená v prostoru (P, ϱ). Z Věty 9.2.23 plyne, že množina $\{x\}$ je uzavřená v (P, ϱ). ♣

9.2.25. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $x \in P$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom uzavřená koule $\overline{B}(x, r)$ je uzavřenou množinou v (P, ϱ).

Důkaz. Nechť $y \in P \setminus \overline{B}(x, r)$, tedy $\varrho(x, y) > r$. Položme $s = \varrho(x, y) - r$, pak platí $s > 0$. Nechť $z \in B(y, s)$. Potom

$$\varrho(x, z) \geq \varrho(x, y) - \varrho(y, z) > \varrho(x, y) - s = r,$$

takže $B(y, s) \subset P \setminus \overline{B}(x, r)$. Dokázali jsme, že množina $P \setminus \overline{B}(x, r)$ je otevřená v (P, ϱ), a tedy je podle Věty 9.2.23 množina $\overline{B}(x, r)$ uzavřená v (P, ϱ). ■

9.2.26. Věta (vlastnosti uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny v prostoru (P, ϱ).
(b) Nechť I je neprázdná indexová množina. Nechť pro každé $\alpha \in I$ je množina F_α uzavřená v prostoru (P, ϱ). Potom je množina $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ uzavřená v prostoru (P, ϱ).
(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené v prostoru (P, ϱ). Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v prostoru (P, ϱ).

Důkaz. (a) Tvrzení plyne ihned z toho, že $\partial\emptyset = \partial P = \emptyset$.

(b) Pro $\alpha \in I$ označme $G_\alpha = P \setminus F_\alpha$. Podle Věty 9.2.23 je G_α otevřená množina pro každé $\alpha \in I$. Dle Věty 9.2.9(b) je $\bigcup_{\alpha \in M} G_\alpha$ otevřená množina v prostoru (P, ϱ). Podle De Morganových pravidel (Věta A.0.34) platí $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I}(P \setminus G_\alpha) = P \setminus \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, a tedy podle Věty 9.2.23 je množina $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ uzavřená v prostoru (P, ϱ).

(c) Označme $G_i = P \setminus F_i$, $i = 1, \dots, m$. Podle Věty 9.2.23 je G_i otevřená množina pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Podle Věty 9.2.9(c) je $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená množina v prostoru (P, ϱ). Podle De Morganových pravidel (Věta A.0.34) platí $\bigcup_{i=1}^m F_i = \bigcup_{i=1}^m (P \setminus G_i) = P \setminus \bigcap_{i=1}^m G_i$, a tedy podle Věty 9.2.23 je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v prostoru (P, ϱ). ■

9.2.27. Definice. Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor, nechť $A \subset P$ je neprázdná množina a nechť $x \in P$. Potom reálné číslo $\operatorname{dist}(x, A)$, definované předpisem

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\},$$

nazýváme **vzdáleností bodu** x **od množiny** A. Nemůže-li dojít ke zmatení, značíme vzdálenost bodu x od množiny A také symbolem $\varrho(x, A)$.

9.2.28. Věta. Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor, nechť $A, B \subset P$, $A \subset B$ a nechť $x \in P$. Potom platí

$$\varrho(x, B) \leq \varrho(x, A).$$

Důkaz. Jest

$$\operatorname{dist}(x, B) = \inf\{\varrho(x, y);\ y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\} = \operatorname{dist}(x, A).$$

Odtud plyne tvrzení. ∎

9.2.29. Věta. Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor, nechť A je neprázdná podmnožina množiny P a nechť $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom je množina A_δ, definovaná předpisem

$$A_\delta = \{x \in P;\ \varrho(x, A) < \delta\},$$

otevřená v prostoru (P, ϱ).

Důkaz. Nechť $x \in A_\delta$. Potom existuje $y \in A$ takové, že $\varrho(x, y) < \delta$. Označme $r = \delta - \varrho(x, y)$. Nechť $z \in P$ splňuje $\varrho(x, z) < r$. Potom platí

$$\varrho(z, A) \leq \varrho(z, y) \leq \varrho(z, x) + \varrho(x, y) < \delta - \varrho(x, y) + \varrho(x, y) = \delta,$$

takže $z \in A_\delta$. Odtud vyplývá, že $B(x, r) \subset A_\delta$, a tedy je množina A_δ otevřená v (P, ϱ). ∎

9.2.30. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Prvek $\operatorname{diam} P$ množiny $\mathbb{R}^*$, definovaný předpisem

$$\operatorname{diam} P = \begin{cases} \sup\{\varrho(x, y);\ x, y \in P\} & \text{pokud } P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{pokud } P = \emptyset, \end{cases}$$

nazýváme **průměrem (diametrem) prostoru** P. Řekneme, že prostor P je **omezený**, jestliže platí $\operatorname{diam} P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená v** (P, ϱ), jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený. **Průměrem (diametrem) množiny** A nazýváme diametr metrického prostoru (A, ϱ).

9.2.31. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\operatorname{diam} P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z vlastnosti (i) definice metriky (Definice 9.1.1 plyne, že $\operatorname{diam} P > 0$.

9.2.32. Příklad. Dokažte, že každý diskrétní metrický prostor je omezený.

Důkaz. Nechť P je množina a $\varrho_{\text{diskr}} : P \times P \to [0, \infty)$ je diskrétní metrika zavedená v Příkladu 9.1.13. Má-li množina P alespoň dva různé body, pak platí diam $P = 1$. V opačném případě platí diam $P = 0$. Každopádně však platí diam $P < \infty$, a tedy je prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je omezený. ■

9.2.33. Poznámky. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť $A, B \subset P$ a $A \subset B$. Potom diam $A \leq$ diam B.

(b) Množina $A \subset P$ je omezená v prostoru (P, ϱ) právě tehdy, když existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, a $x \in P$ takové, že $A \subset B(x, r)$.

9.2.34. Věta (vlastnosti uzávěru)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$;
(b) jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$;
(c) je-li $A \neq \emptyset$, pak $\overline{A} = \{x \in P;\ \varrho(x, A) = 0\}$;
(d) množina $\overline{A}$ je uzavřená v P, tj. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(f) je-li $A \neq \emptyset$, pak diam A = diam $\overline{A}$, a tedy A je omezená právě tehdy, když $\overline{A}$ je omezená;
(g) platí

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset P;\ F \text{ je uzavřená množina v } P,\ A \subset F\}.$$

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z definice uzávěru a z toho, že $\partial\emptyset = \partial P = \emptyset$.

(b) Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \overline{B}$. Jestliže $x \in \overline{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \overline{A} \setminus A$, a tedy $x \in \partial A$. Zvolme $r \in R$, $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \partial B$. Protože $\partial B \subset \overline{B}$, dostáváme $x \in \overline{B}$.

(c) Označme

$$M = \{x \in P;\ \varrho(x, A) = 0\}.$$

Nechť $y \in P \setminus M$. Potom $\varrho(y, A) > 0$. Tedy existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Nechť $a \in A$ a $z \in B(y, \frac{r}{2})$. Potom

$$\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Tedy $B(y, \frac{r}{2}) \subset P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je otevřená množina v P. Podle Věty 9.2.23 je množina M uzavřená v P. Zřejmě platí $A \subset M$, a tedy dle (b) také $\overline{A} \subset \overline{M}$. Protože M je uzavřená v P, máme $\overline{M} = M$, a tedy $\overline{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Nechť $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$, a tedy $x \notin M$, neboť $\varrho(x, A) \geq r > 0$.

(d) Z tvrzení (c) víme, že

$$\overline{A} = \{x \in P;\ \varrho(x, A) = 0\}$$

a

$$\overline{\overline{A}} = \{x \in P;\ \varrho(x, \overline{A}) = 0\},$$

takže stačí dokázat, že $\varrho(x, A) = 0$ platí právě tehdy, když $\varrho(x, \overline{A}) = 0$. Protože $A \subset \overline{A}$, dostáváme z Věty 9.2.28, že

$$\varrho(x, \overline{A}) \le \varrho(x, A).$$

Odtud ihned vyplývá implikace

$$\varrho(x, A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho(x, \overline{A}) = 0.$$

Stačí tedy dokázat opačnou implikaci.

Předpokládejme, že $\varrho(x, \overline{A}) = 0$, a zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $y \in \overline{A}$ takové, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Protože $y \in \overline{A}$, plyne z tvrzení (c), že $\varrho(y, A) = 0$, takže existuje $z \in A$ takové, že $\varrho(y, z) < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, z) < \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

tedy $\varrho(x, A) < 2\varepsilon$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\varrho(x, A) = 0$.

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy dle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Podle (d) a Věty 9.2.26(c) je $\overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená množina v P, tedy $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Celkem tedy platí $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(f) Nechť $x, y \in \overline{A}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (d) existují $x', y' \in A$ takové, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, y) \le \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \operatorname{diam} A.$$

Protože ε bylo libovolně zvoleno, plyne odtud, že $\operatorname{diam} \overline{A} \le \operatorname{diam} A$. Opačná nerovnost plyne z Poznámek 9.2.18 a 9.2.33.

(g) Předpokládejme, že F je uzavřená množina v P splňující $A \subset F$. Dle tvrzení (b) potom platí $\overline{A} \subset \overline{F}$. Protože F je uzavřená množina v P, platí $\overline{F} = F$, takže $\overline{A} \subset F$. Protože tato inkluze platí pro libovolnou uzavřenou množinu F splňující $A \subset F$, dostáváme celkem

$$\overline{A} \subset \bigcap \{F \subset P;\ F \text{ je uzavřená množina v } P,\ A \subset F\}.$$

Podle tvrzení (c) je množina $\overline{A}$ uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \overline{A}$. Odtud ihned plyne, že

$$\bigcap\{F \subset P;\ F \text{ je uzavřená množina v } P,\ A \subset F\} \subset \overline{A}.$$

Kombinací obou dokázaných inkluzí dostáváme tvrzení (g). ■

9.2.35. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Dokažte, že

$$\overline{(a,b)} = \begin{cases} [a,b], & \text{pokud } a, b \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, b], & \text{pokud } a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}, \\ [a, \infty), & \text{pokud } a \in \mathbb{R},\ b = \infty, \\ \mathbb{R}, & \text{pokud } a = -\infty,\ b = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak obdobným postupem jako v řešení Příkladu 9.2.16(a) dokážeme, že $\partial(a,b) = \{a,b\}$. Jestliže $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$, pak podobně dokážeme, že $\partial(-\infty, b) = \{b\}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, odvodíme obdobným postupem, že $\partial(a, \infty) = \{a\}$. Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$ je tvrzení zřejmé. ♣

9.2.36. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B},$$

přičemž tato inkluze může být vlastní, tedy obecně neplatí rovnost

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

Důkaz. Dle Věty 9.2.34(b) platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, takže $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dokážeme, že inkluze může být vlastní pomocí následujícího příkladu. Nechť $P = \mathbb{R}$ a $\varrho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Položme $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$. Potom $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} = [0, 1]$ a $\overline{B} = [1, 2]$, takže $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$. ■

9.2.37. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Potom pro každé $x \in P$ a pro každé $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, platí

$$\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r).$$

Důkaz. Nechť $x \in P$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, a nechť $y \in \partial B(x,r)$. Předpokládejme pro spor, že $\varrho(x, y) > r$. Položme $s = \varrho(x, y) - r$. Potom $s > 0$ a pro každé $z \in B(y, s)$ platí

$$\varrho(x, z) \geq \varrho(x, y) - \varrho(y, z) > \varrho(x, y) - s = r,$$

takže $z \notin B(x, r)$. To znamená, že $B(y, s) \cap B(x, r) = \emptyset$. To je ale spor s tím, že $y \in \partial B(x, r)$. Musí tedy platit $\varrho(x, y) \leq r$, a tedy $\partial B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Celkem tedy máme

$$\overline{B(x,r)} = B(x,r) \cup \partial B(x,r) \subset \overline{B}(x,r).$$

■

9.2.38. Poznámka. Z Poznámky 9.2.37 vyplývá, že v každém metrickém prostoru je uzávěr libovolné otevřené koule podmnožinou odpovídající uzavřené koule. Opačná inkluze obecně neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je metrický prostor obsahující alespoň dva různé body a nechť $x \in P$. Potom

$$B(x,1) = \overline{B(x,1)} = \{x\},$$

ale $\overline{B}(x,1) = P$, takže

$$\overline{B}(x,1) \neq \overline{B(x,1)}.$$

9.2.39. Věta (vlastnosti vnitřku)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí

(a) $\operatorname{Int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{Int} P = P$;
(b) jestliže $A \subset B$, potom $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;
(c) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$;
(d) $\operatorname{Int} A \cap B = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;
(e) platí

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{G \subset P;\ G \text{ je otevřená množina v } P,\ G \subset A\}.$$

(f) Platí

$$\operatorname{Int} A = \{x \in P;\ \varrho(x, P \setminus A) > 0\}.$$

Důkaz. (a) Tvrzení $\operatorname{Int} \emptyset = \emptyset$ plyne přímo z definice vnitřního bodu (Definice 9.2.4). Nechť $x \in P$. Potom dokonce pro každé $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, platí $B(x,r) \subset P$. Odtud plyne, že $\operatorname{Int} P = P$.

(b) Toto tvrzení bylo již dokázáno ve Větě 9.2.5(c).

(c) Podle Věty 9.2.11 je množina $\operatorname{Int} A$ otevřená v P. Tvrzení tedy plyne z Věty 9.2.5(b).

(d) Protože $A \cap B \subset A$, dostáváme z tvrzení (b), že $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A$. Obdobně lze dokázat, že $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$. Odtud vyplývá, že

$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B.$$

Dokážeme opačnou inkluzi. Z Věty 9.2.5(a) vyplývá, že $\operatorname{Int} A \subset A$ a $\operatorname{Int} B \subset B$, a tedy

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A \cap B.$$

Podle tvrzení (b) platí

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int}(A \cap B).$$

Dle Věty 9.2.11 jsou množiny $\operatorname{Int} A$ a $\operatorname{Int} B$ otevřené v (P, ϱ), a tedy dle Věty 9.2.9(c) je také množina $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ otevřená v (P, ϱ). Podle Věty 9.2.5(b) tudíž platí

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B,$$

a tedy

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B).$$

Z kombinace obou dokázaných inkluzí pak plyne požadovaná rovnost

$$\operatorname{Int} A \cap B = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B.$$

(e) Označme

$$H = \bigcup \{G \subset P;\ G \text{ je otevřená množina v } P,\ G \subset A\}.$$

Protože podle Poznámky 9.2.8 je každá otevřená koule otevřenou množinou v (P, ϱ), plyne z Věty 9.2.11 inkluze

$$\operatorname{Int} A \subset H.$$

Dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $x \in H$. Potom existuje otevřená množina G v prostoru (P, ϱ) splňující $x \in G$ a $G \subset A$. Tedy existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \subset G$. Tudíž platí $B(x, r) \subset A$, a tedy x je vnitřním bodem množiny A. Odtud plyne, že

$$H \subset \operatorname{Int} A.$$

Požadovaná rovnost plyne z kombinace obou dokázaných inkluzí.

(f) Jestliže $x \in \operatorname{Int} A$, potom existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \subset A$. Tedy $\varrho(x, P \setminus A) \geq r$.

Obráceně, nechť $\varrho(x, P \setminus A) = r$ pro nějaké $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom $B(x, r) \subset A$, a tedy $x \in \operatorname{Int} A$. Tvrzení je dokázáno. ■

9.2.40. Věta (vztah uzávěru a vnitřku). Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$. Potom platí

$$\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}.$$

Důkaz. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Potom existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $B(x, r) \subset A$. Tedy $B(x, r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$. Tudíž $x \notin \partial(P \setminus A)$. Navíc zřejmě platí $x \notin P \setminus A$, takže $x \notin \overline{P \setminus A}$. Dokázali jsme tedy inkluzi $\operatorname{Int} A \subset P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Nyní předpokládejme, že $x \in P \setminus \overline{P \setminus A}$. Potom $x \notin \overline{P \setminus A}$, takže existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že buď $B(x, r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Druhá možnost ale nemůže nastat, neboť

$$x \in P \setminus \overline{P \setminus A} \subset P \setminus (P \setminus A) = A.$$

Tedy $B(x,r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$, neboli $B(x,r) \subset A$. To znamená, že $x \in \operatorname{Int} A$. Tím je dokázána inkluze $P \setminus \overline{P \setminus A} \subset \operatorname{Int} A$, a tedy i požadovaná rovnost $\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}$. ■

9.2.41. Poznámka. Uvedeme alternativní důkaz Věty 9.2.40.

Je-li $A = P$, pak tvrzení vyplývá z Věty 9.2.34(a) a Věty 9.2.39(a).

Předpokládejme, že $A \neq P$. Potom dle Věty 9.2.34(c) platí

$$P \setminus \overline{P \setminus A} = \{x \in P;\ \varrho(x, P \setminus A) > 0\}.$$

Podle Věty 9.2.39(f) platí

$$\{x \in P;\ \varrho(x, P \setminus A) > 0\} = \operatorname{Int} A.$$

Odtud plyne tvrzení věty.

9.2.42. Věta. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $Q \subset P$. Nechť $A \subset Q$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v (Q,ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v (P,ϱ) splňující $A = B \cap Q$.

Důkaz. Nechť A je otevřená množina v prostoru (Q,ϱ). Dle Věty 9.2.11 je

$$A = \bigcup \{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\},$$

kde

$$B_Q(x,r) = \{y \in Q;\ \varrho(x,y) < r\}.$$

Označme

$$B = \bigcup \{B(x,r);\ x \in Q,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\}.$$

Podle Věty 9.2.9(b) je B otevřená množina v prostoru (P,ϱ). Navíc zřejmě platí $A = B \cap Q$.

Obráceně, předpokládejme, že B je otevřená množina v prostoru (P,ϱ) splňující $A = B \cap Q$. Dle Věty 9.2.11 je

$$B = \bigcup \{B(x,r);\ x \in P,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B(x,r) \subset B\}.$$

Potom platí

$$A = \bigcup \{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B(x,r) \subset B\},$$

tedy

$$A = \bigcup \{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\}.$$

Tedy opět podle Věty 9.2.9(b) je množina A otevřená v prostoru (Q,ϱ).

Potom podle Věty 9.2.34(c) a (d) je množina B uzavřená v prostoru (P, ϱ). Navíc zřejmě platí

$$B \cap Q = \{x \in Q;\ \varrho(x, A) = 0\}.$$

Tím je dokázáno tvrzení věty pro případ, kdy množina A je otevřená.

Nyní předpokládejme, že A je uzavřená v prostoru (Q, ϱ). Podle Věty 9.2.23 to nastává právě tehdy, když je množina $Q \setminus A$ otevřená v prostoru (Q, ϱ). Podle již dokázaného tvrzení to nastává právě tehdy, když existuje otevřená množina H v (P, ϱ) splňující $H \cap Q = Q \setminus A$. Položíme-li $B = P \setminus H$, pak je množina B uzavřená v (P, ϱ) a splňuje

$$B \cap Q = (P \setminus H) \cap Q = Q \setminus H = Q \setminus (Q \setminus A) = A.$$

■

9.2.43. Příklady. (a) Dokažte, že interval $[0, 1]$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ se zděděnou eukleidovskou metrikou, ačkoli to není otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}$.

(b) Dokažte, že jednobodová množina $\{2\}$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup \{2\}$ se zděděnou eukleidovskou metrikou, ačkoli to není otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}$.

Řešení. ♣

9.3. Konvergence v metrických prostorech

9.3.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a nechť $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k prvku x v (P, ϱ), jestliže platí

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$

Tento fakt značíme symbolem

$$x_n \stackrel{\varrho}{\to} x, \quad n \to \infty,$$

případně pouze $x_n \stackrel{\varrho}{\to} x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **v** (P, ϱ). **Konvergentní posloupností v** (P, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P, ϱ).

9.3.2. Nechť $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

9.3.3. Věta (vlastnosti konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků z P a existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(b) Každá posloupnost prvků P má v P nejvýše jednu limitu.

(c) Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků z P. Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Jestliže $x \in P$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, pak také $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže $x_n \overset{\varrho}{\to} x$.

(b) Předpokládejme, že existují $x, y \in P$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolně zvoleno, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}_{k=1}^\infty$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}_{n=1}^\infty$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel (Věta **??**), že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. ■

9.3.4. Věta (vztah uzavřenosti a konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$. Pak množina A je uzavřená v P právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$, kde $x \in P$, platí $x \in A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků z A a nechť $x \in P$ je takové, že $\lim x_n = x$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \varrho(x, A) \leq \varrho(x, x_n).$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0$, plyne z věty o dvou strážnících, že $\varrho(x, A) = 0$. Podle věty o vlastnostech uzávěru (Věta 9.2.34(c)) je tedy $x \in \overline{A}$. Protože A je uzavřená, platí $A = \overline{A}$, a tedy $x \in A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Chceme dokázat, že $x \in A$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Potom máme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, a tedy $x \in A$. ■

9.3.5. Věta (vztah uzávěru a konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$. Potom je uzávěr množiny A v (P, ϱ) roven množině všech prvků $x \in P$, pro které existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z A splňující $\lim x_n = x$.

Důkaz. Je-li množina A prázdná, pak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ a $x \in \overline{A}$. Potom podle Věty 9.2.34(c) platí $\varrho(x, A) = 0$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prvek $x_n \in A$ takový, že $\varrho(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Pak zřejmě platí $\lim x_n = x$.

Nyní předpokládejme, že $x \in P$ a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A splňující $\lim x_n = x$. Potom je $\lim_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0$, a tedy platí $\varrho(x, A) = 0$. Potom podle Věty 9.2.34(c) je $x \in \overline{A}$. ■

9.3.6. Příklad. Nechť P je libovolná množina a nechť $\varrho = \varrho_{\text{diskr}}$ na P. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P. Dokažte, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v P právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Řešení. $\Rightarrow$ Nechť $x_n \overset{\varrho}{\to} x$, kde $x \in P$. Potom $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

$\Leftarrow$ Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 9.3.3(a). ♣

9.3.7. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $P = \mathbb{R}^k$ a $\varrho = \varrho_e$. Nechť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a nechť $y \in P$. Dokažte, že potom platí $x^n \overset{\varrho}{\to} y$ právě tehdy, když pro každé $i = 1, \dots, k$ platí $\lim_{n\to\infty} x_i^n = y_i$.

Řešení. $\Rightarrow$ Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^n - y_i^n| \leq \varrho(x^n, y)$. Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ platí $\lim_{n\to\infty} x_i^n = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny (Příklad **??**), z věty o aritmetice limit (Věta **??**) a z Heineovy věty (Věta **??**) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^n, y) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i^n - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $x^n \overset{\varrho}{\to} y$. ♣

9.3.8. Poznámka. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť $x, y \in \mathbb{R}^k$, přičemž $x = [x_1, \dots, x_k]$ a $y = [y_1, \dots, y_k]$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} 1^2 \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \\
&\leq \sqrt{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \quad \text{(Cauchyova nerovnost (??))} \\
&\leq k \max_{i=1,\dots,k} |x_i - y_i| \leq k \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|,
\end{aligned}$$

tedy

$$\varrho_1(x, y) \leq \sqrt{k} \varrho_e(x, y) \leq k \varrho_\infty(x, y) \leq k \varrho_1(x, y). \tag{9.2}$$

Odtud vyplývá, že pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $\mathbb{R}^k$ a $y \in \mathbb{R}^k$ jsou následující tři tvrzení ekvivalentní:

(i) $x^n \overset{\varrho_1}{\to} y$;

(ii) $x^n \overset{\varrho_e}{\to} y$;

(iii) $x^n \overset{\varrho_\infty}{\to} y$.

Vskutku, předpokládejme, že platí (i). Potom $\lim_{n \to \infty} \varrho_1(x^n, y) = 0$. Z (9.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_e(x^n, y) \leq \sqrt{k} \varrho_1(x^n, y)$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_e(x^n, y) \geq 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících (Věta ??), že také $\lim_{n \to \infty} \varrho_e(x^n, y) = 0$, a tedy platí (ii). Předpokládejme nyní, že platí (ii). Pak kombinací první a poslední nerovnosti v (9.2) dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^n, y) \leq \sqrt{k} \varrho_e(x^n, y)$, a tedy $\lim_{n \to \infty} \varrho_e(x^n, y) = 0$. Konečně předpokládáme-li, že platí (iii), pak odvodíme platnost tvrzení (i) obdobným způsobem z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_1(x^n, y) \leq \sqrt{k} \varrho_\infty(x^n, y)$.

9.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

9.4.1. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť f je zobrazení definované na P s hodnotami v Q. Dále nechť $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že

- f **je spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in M : \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon, \tag{9.3}$$

- f **je spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,
- f **je spojité na množině** M, jestliže je spojité v každém bodě $a \in M$ vzhledem k M,
- f **je spojité**, jestliže je spojité na P.

9.4.2. Poznámka. (a) Spojitost zobrazení závisí i na zvolených metrikách.

(b) Výrok (9.3) můžeme ekvivalentně zapsat takto:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(a,\delta) \cap M :\ f(x) \in B_\sigma(f(a),\varepsilon),$$

neboli

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0 :\ f(B_\varrho(a,\delta) \cap M) \subset B_\sigma(f(a),\varepsilon).$$

(c) Je-li $P = Q = \mathbb{R}$ a $\varrho(x,y) = \sigma(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

9.4.3. Příklad. Nechť $i, n \in \mathbb{N}$, přičemž $i \leq n$. Nechť $\Psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je operátor projekce, definovaný předpisem

$$\Psi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Potom zobrazení Ψ_i je spojité na $\mathbb{R}^n$.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a,\delta)$ platí

$$\begin{aligned} \varrho_e(\Psi_i(x), \Psi_i(a)) = |\Psi_i(x) - \Psi_i(a)| = |x_i - a| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \\ = \varrho_e(x,a) < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy Ψ_i je spojité v a. ♣

9.4.4. Příklad. Nechť P je libovolná množina a ϱ_{diskr} je diskrétní metrika na P, definovaná v Příkladu 9.1.13. Nechť (Q,σ) je libovolný metrický prostor a $f : P \to Q$ je libovolné zobrazení definované na P s hodnotami v Q. Potom f je spojité na P.

Řešení. Zvolme $a \in P$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = 1$. Potom $B(a,\delta) = \{a\}$, a tedy platí

$$\forall x \in B_\varrho(a,\delta) :\ x = a,\ \text{a tedy } f(x) = f(a) \in B_\sigma(f(a),\varepsilon),$$

takže f je spojité v a. ♣

9.4.5. Věta (charakterizace spojitosti)**.** Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$ je libovolné zobrazení definované na P s hodnotami v Q. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:

(i) zobrazení f je spojité na P;
(ii) pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q,σ) je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v prostoru (P,ϱ);
(iii) pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q,σ) je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v prostoru (P,ϱ).

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v (Q,σ) a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(f(x),\varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$f(B_\varrho(x,\delta)) \subset B_\sigma(f(x),\varepsilon).$$

To znamená, že

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v (P,ϱ).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $a \in P$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, neboli

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Odtud plyne, že f je spojité v a.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nechť F je uzavřená množina v prostoru (Q,σ). Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v prostoru (Q,σ), a tedy, dle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v prostoru (P,ϱ). Protože rozdíl vzorů je roven vzoru rozdílů, plyne odtud, že množina

$$f^{-1}(F) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus F)$$

je uzavřená v prostoru (P,ϱ).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nechť G je otevřená množina v prostoru (Q,σ). Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v prostoru (Q,σ), a tedy, dle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v prostoru (P,ϱ). Množina

$$f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$$

je tudíž otevřená v prostoru (P,ϱ). ■

9.4.6. Věta (spojitý obraz kompaktu)**.** Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a nechť $K \subset P$ je kompaktní množina v prostoru (P,ϱ). Nechť $f : (K,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je zobrazení definované a spojité alespoň na K s hodnotami v Q. Potom $f(K)$ je kompaktní množina v prostoru (Q,σ).

Důkaz. Nechť $\{G_\alpha;\ \alpha \in I\}$, kde $I \neq \emptyset$, je otevřené pokrytí množiny K. Protože f je spojité zobrazení, plyne z Věty 9.4.5, že pro každé $\alpha \in I$ je množina $f^{-1}(G_\alpha)$ otevřená v prostoru (P, ϱ). Tedy

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha)$$

je otevřené pokrytí kompaktní množiny K. Z tohoto pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$ takové, že

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Odtud plyne, že

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i},$$

a tedy $f(K)$ je kompaktní množina v prostoru (Q, σ). ∎

9.4.7. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, platí

$$M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M'. Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M, jestliže $a \in M \setminus M'$.

9.4.8. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Jestliže a je hromadným bodem množiny M, potom pro každé $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, je množina $M \cap B(a, r)$ nekonečná.

9.4.9. Příklady. (a) Nechť $M = (0, 1)$. Potom $M' = [0, 1]$.

(b) Nechť $M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Potom $M' = \{0\}$.

(c) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a nechť $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Potom $M' = H(\{a_n\})$.

(d) Nechť P je libovolná množina a ϱ_{diskr} je diskrétní metrika na P, definovaná v Příkladu 9.1.13. Nechť $M \subset P$ je libovolná podmnožina prostoru P. Potom $M' = \emptyset$.

9.4.10. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$. Nechť $A \subset P$ a nechť a je hromadným bodem množiny A. Nechť $b \in Q$. Řekneme, že f **má v bodě** a **limitu** b **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in A,\ x \neq a :\ \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě** a **limitu** b.

9.4.11. Věta (o jednoznačnosti limity v metrickém prostoru)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$. Nechť $A \subset P$ a nechť a je hromadným bodem množiny A. Potom f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $b_1, b_2 \in Q$ jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A, přičemž $b_1 \neq b_2$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, splňující $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\sigma(b_1, b_2)$. Potom existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in A,\ x \neq a : \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow (\sigma(f(x), b_1) < \varepsilon \,\&\, \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Vzhledem k tomu, že $a \in A'$, můžeme nalézt $x \in A$, $x \neq a$, takové, že $\varrho(x, a) < \delta$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) < \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor. ■

9.4.12. Označení. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$. Nechť $A \subset P$ a nechť a je hromadným bodem množiny A. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A, označujeme tuto limitu symbolem

$$\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x).$$

Je-li $A = P$, píšeme $\lim_{x \to a} f(x)$.

9.4.13. Věta (Heineova věta pro metrické prostory)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$ a nechť $f : P \to Q$. Nechť $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i) $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) = b$;
(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$ platí $\lim f(x_n) = b$.

Důkaz. (i)⇒(ii) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in A,\ x \neq a : \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$.

(ii)⇒(i) Předpokládejme pro spor, že existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$\forall \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \exists x \in A,\ x \neq a : x \in B(a, \delta) \,\&\, f(x) \notin B(b, \varepsilon).$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položíme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme prvek x_n splňující

$$x_n \in (B(a, \tfrac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$$

a
$$f(x_n) \notin B(b, \varepsilon).$$
Potom posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $x_n \to a$ v prostoru (P, ϱ), ale není pravda, že $f(x_n) \to b$ v prostoru (Q, σ). ■

9.4.14. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, a nechť $f, g : P \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení definovaná na P s hodnotami v $\mathbb{R}$. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Předpokládejme, že platí
$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = \alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a, x \in A} g(x) = \beta.$$
Potom

(a) $\lim_{x \to a, x \in A}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$;
(b) $\lim_{x \to a, x \in A}(f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$;
(c) jestliže $\beta \neq 0$, pak $\lim_{x \to a, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

9.4.15. Zcela obdobné tvrzení jako ve Větě 9.4.13 platí i pro spojitost funkce v daném bodě.

9.4.16. Věta (vztah mezi limitou a spojitostí v bodě)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$ a nechť f je zobrazení z prostoru P do prostoru Q. Nechť $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom zobrazení f je spojité v a vzhledem k množině A právě tehdy, když $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.

9.4.17. Věta (o spojitostí složeného zobrazení v bodě)**.** Nechť (X, ϱ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:

- existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$;
- f je spojité v bodě a vzhledem k A;
- g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B.

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě a vzhledem k A.

9.4.18. Věta (o spojitosti složeného zobrazení)**.** Nechť (X, ϱ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, nechť $f : X \to Y$ je spojité a $g : Y \to Z$ je spojité. Potom zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je spojité.

Důkaz. Nechť $G \subset Z$ je otevřená množina v prostoru (Z, τ). Zobrazení g je spojité, a tedy podle věty o charakterizaci spojitého zobrazení (Věta 9.4.5, (i)$\Rightarrow$(ii)), je $g^{-1}(G)$ otevřená množina v prostoru (Y, σ). Zobrazení f je spojité, takže podle téže věty je množina $f^{-1}(g^{-1}(G))$ otevřená v prostoru (X, ϱ). Protože $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$, plyne odtud pomocí Věty 9.4.5, (ii)$\Rightarrow$(i), že zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je spojité. ■

9.4.19. Věta (o limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X, ϱ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, nechť f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí

- existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(A \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\})) \subset B$;
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$;
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$.

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$;

(S) zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B.

Potom platí
$$\lim_{x \to a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

9.4.20. Příklad. Nechť $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$ a $Z = \mathbb{R}$ a nechť ϱ a σ jsou eukleidovské metriky na $\mathbb{R}^2$ a τ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}$. Nechť zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definováno předpisem
$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{pokud buď } x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0; \\ 0, & \text{pokud } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Nechť $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dokažte, že
$$\lim_{x \to 0} F(x, kx) = 0.$$

(b) Dokažte, že
$$\lim_{x \to 0} F(x, x^2) = \tfrac{1}{2}.$$

9.4.21. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$ je zobrazení definované na P s hodnotami v Q. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, navíc je spojité a zobrazení $f^{-1} : Q \to P$ je také spojité. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorní**, jestliže existuje homeomorfismus $f : P \to Q$.

9.4.22. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení f je **stejnoměrně spojité** na P, jestliže platí výrok
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x, y \in P, \varrho(x, y) < \delta \colon \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

KAPITOLA 10

Funkce více proměnných

10.1. Parciální derivace a totální diferenciál

10.1.1. Poznámka. Nechť $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak $g = (g_1, \dots, g_m)$ je spojité v $\boldsymbol{a}$ právě tehdy, když každé g_i, $i = 1, \dots, m$, je spojité v $\boldsymbol{a}$. Toto snadno plyne ze vztahů

$$|g_i(x) - g_i(a)| \le \|g(x) - g(a)\|, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{a}$$

$$\|g(x) - g(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(g_i(x) - g(a)\bigr)^2}.$$

10.1.2. Označení. Je-li $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, pak x_i značí pro $i = 1, \dots, n$ i**-tou souřadnici** vektoru (bodu) $\boldsymbol{x}$. Vektor

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}} = [0, \dots, 0, \underset{i\text{-tá souřadnice}}{1}, 0, \dots, 0]$$

nazýváme i**-tým kanonickým vektorem**. Nulovým vektorem rozumíme vektor $[0, 0, \dots, 0]$ a značíme jej $\mathbf{0}$. V průběhu celé kapitoly budeme takřka výhradně pracovat s **eukleidovskou** normou

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|[x_1, \dots, x_n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

V některých případech použijeme **maximovou** normu definovanou předpisem

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|[x_1, \dots, x_n]\|_\infty = \max\bigl\{|x_i|\,;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Termínem **reálná funkce** n **proměnných** budeme rozumět funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

10.1.3. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e^i}) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{10.1}$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

10.1.4. Poznámky. (a) V některých případech se používá i značení $\partial_i f(\boldsymbol{a})$, $D_i f(\boldsymbol{a})$ a podobně.

(b)

$$\text{Limita v (10.1)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(c) Pokud parciální derivace podle i-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje, pak pro nějaké $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, platí $\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e^i};\ |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$.

10.1.5. Úmluva. V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje" znamenat, že parciální derivace existuje vlastní.

10.1.6. Poznámka. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak definujeme **parciální funkci** g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Pak zřejmě platí $g'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud má jedna strana smysl. Odtud plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, například

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$
$$\frac{\partial (f + g)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ existují.

10.1.7. Příklad. Pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle Poznámky 10.1.6 v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

♣

10.1.8. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$**, pokud platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{10.2}$$

10.1.9. Poznámky. (a) Podmínka (10.2) je ekvivalentní s podmínkou

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}$ plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

10.1.10. Věta (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací)**.** Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$ a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L pišme ve tvaru

$$L(h_1, \dots, h_n) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n, \quad \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi : t \mapsto t\boldsymbol{e^i}$ je spojité a $\varphi(t) \neq \boldsymbol{0}$ pro $t \neq 0$. Tedy dle Věty **??** platí

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + \varphi(t)) - f(\boldsymbol{a}) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e^i}) - f(\boldsymbol{a}) - A_i t}{|t|}.$$

Odtud

$$0 = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e^i}) - f(\boldsymbol{a})}{t} - A_i \right|,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e^i}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

10.1.11. Poznámka. Z Věty 10.1.10 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně.

10.1.12. Označení. Totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $f'(\boldsymbol{a})$.

10.1.13. Věta. Má-li f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, je f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ a $\boldsymbol{h} \mapsto f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$ máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \\
&= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left(\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| + f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \right) \\
&= 0 \cdot 0 + f(\boldsymbol{a}) + 0 = f(\boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v $\boldsymbol{a}$. ■

10.1.14. Poznámky. (a) Shrňme základní poznatky o totálním diferenciálu: Existuje-li, je funkce v daném bodě spojitá a má v něm všechny parciální derivace.

(b) Naproti tomu z pouhé existence parciálních derivací na spojitost funkce v bodě usoudit nemůžeme, jak ukazuje následující příklad.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{0}) = 0$, ale f není spojitá v počátku. Tedy ani $f'(\boldsymbol{0})$ neexistuje.

10.1.15. Lemma. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Má-li funkce f v každém bodě I všechny parciální derivace, pak v I existují body $\boldsymbol{c^1}, \dots, \boldsymbol{c^n}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c^i})(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p^0} &= (a_1, \dots, a_n) = \boldsymbol{a}, \\
\boldsymbol{p^1} &= (b_1, a_2, \dots, a_n), \\
\boldsymbol{p^2} &= (b_1, b_2, a_3 \dots, a_n), \\
&\vdots \\
\boldsymbol{p^{n-1}} &= (b_1, \dots, b_{n-1}, a_n), \\
\boldsymbol{p^n} &= (b_1, \dots, b_n) = \boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Potom platí

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\boldsymbol{p^k}) - f(\boldsymbol{p^{k-1}}) \big). \tag{10.3}$$

Položme pro $i \in \{1, \dots, n\}$

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, a_n). \tag{10.4}$$

Pokud $a_i \neq b_i$, existuje podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

$$f(\boldsymbol{p^i}) - f(\boldsymbol{p^{i-1}}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(z_i) \cdot (b_i - a_i) \tag{10.5}$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Položme

$$\boldsymbol{c^i} = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (10.4) a (10.5) platí $f(\boldsymbol{p^i}) - f(\boldsymbol{p^{i-1}}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c^i})(b_i - a_i)$. Odtud a z (10.3) dostáváme dokazovaný vztah. ■

10.1.16. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak má funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) h_i, \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \forall x \in B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta})\colon \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$. Potom platí

$$B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta) \subset B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta}).$$

Nechť $x \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ je libovolné. Pak podle Lemmatu 10.1.15 existují body $\boldsymbol{c^1}, \dots, \boldsymbol{c^n} \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c^i})(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$
\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{i}})(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{i}}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right)(x_i - a_i)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{i}}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right| |x_i - a_i| \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \\
&\le \varepsilon n \,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|\,.
\end{aligned}
$$

Tedy pro $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ máme

$$\frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} \le n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. ∎

10.1.17. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce** f **v bodě** a **podle vektoru** $\boldsymbol{v}$ rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

10.1.18. Poznámky. (a) Zřejmě platí $D_{\boldsymbol{e}^i} f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

(b) O derivaci podle vektoru lze vyslovit obdobné poznámky jako o parciálních derivacích.

10.1.19. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ jako

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right) \in \mathbb{R}^n.$$

10.1.20. Poznámka. Podle Věty 10.1.10 máme

$$f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle,$$

pokud $f'(\boldsymbol{a})$ existuje.

10.1.21. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Potom platí

(a) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,
(b) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.

Důkaz. (a) Pokud $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{v})}{\|t\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t} + f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} \right) \\ &= f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

jelikož $t \mapsto \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t}$ je omezená funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Z Cauchyovy nerovnosti (Věta 1.8.13) máme

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \\ &= \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \, \|\boldsymbol{v}\| \,. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Pokud $\nabla f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f'(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$. Položme

$$\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

Pak

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \,.$$

Odtud a z (10.6) již plyne (b). ■

10.1.22. Poznámka. Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a})$.

10.1.23. Definice. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení F v bodě $\boldsymbol{a}$**, pokud platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

10.1.24. Poznámky. (a) Připomeňme, že každé lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je reprezentováno maticí $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ ve smyslu, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ am1 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(b) Je-li L lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, pak v každém bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(\boldsymbol{a}) = L$, neboť pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0.$$

10.1.25. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci L. Pak je L reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$ a $j \in \{1,\dots,m\}$. Víme, že platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,$$

a proto také

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left\|F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - F(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}})\right\|}{\left\|t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}\right\|} = 0.$$

Platí

$$0 \le \left|F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - F_j(\boldsymbol{a}) - t(L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}))_j\right| \le \left\|F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - F(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}})\right\|,$$

takže také

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - F_j(\boldsymbol{a})}{t} - (L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}))_j \right| = 0.$$

Odtud máme

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - F_j(\boldsymbol{a})}{t} = (L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}))_j.$$

Jelikož je lineární zobrazení L reprezentováno maticí $(L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}})_j)_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}} \in M(m\times n)$, je tvrzení dokázáno. ∎

10.1.26. Poznámky. (a) Z předchozí věty plyne, že derivace zobrazení v bodě $\boldsymbol{a}$ je určena jednoznačně (pokud existuje). Značíme ji $F'(\boldsymbol{a})$.

(b) Matice reprezentující $F'(\boldsymbol{a})$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(\boldsymbol{a})$, případně

$$\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a}).$$

(c)Někdy ztotožňujeme $F'(\boldsymbol{a})$ a reprezentující Jacobiho matici.

(d) Derivace $F'(\boldsymbol{a})$ existuje právě tehdy, když existují derivace $F_1'(\boldsymbol{a}), \dots, F_m'(\boldsymbol{a})$. Limitu

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

je totiž možné počítat po složkách, tj. počítáme limity

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{F_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F_j(\boldsymbol{a}) - (L(\boldsymbol{h}))_j}{\|\boldsymbol{h}\|}, \quad j = 1, \dots, m.$$

10.1.27. Věta. Nechť $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci $F'(\boldsymbol{a})$. Pak F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

Důkaz. Podle Poznámky 10.1.26(d) existují totální diferenciály $F_1'(\boldsymbol{a}), \dots, F_m'(\boldsymbol{a})$, a tedy funkce $F_1, \dots, F_m$ jsou spojité v $\boldsymbol{a}$. Tedy i F je spojitá v $\boldsymbol{a}$ díky Poznámce 10.1.1 ■

10.1.28. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ jsou spojité v $\boldsymbol{a}$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.

Důkaz. Podle Věty 10.1.16 existují totální diferenciály $F_1'(\boldsymbol{a}), \dots, F_m'(\boldsymbol{a})$. Z Poznámky 10.1.26(d) dostáváme existenci $F'(\boldsymbol{a})$. ■

10.1.29. Lemma. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \ \|L\boldsymbol{x}\| \le C\,\|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Důkaz. Nechť $\mathbb{A} = \left(a_{ji}\right)_{\substack{j=1..m\\ i=1..n}} \in M(m \times n)$ reprezentuje L. Pak máme z Cauchyovy nerovnosti 1.8.13

$$\begin{aligned}
\|L\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(L(\boldsymbol{x})_j\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\Big)^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\Big)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2}\ \|x\|\,.
\end{aligned}$$

Položíme-li

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2},$$

dostáváme požadovaný výsledek. ■

10.1.30. Definice. Označme jako $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ množinu všech lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. To je vektorový prostor s operacemi definovanými jako

$$(L_1 + L_2)(\boldsymbol{x}) = L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x}), \quad L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$
$$(cL)(\boldsymbol{x}) = cL(\boldsymbol{x}), \quad L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), c \in \mathbb{R}.$$

Definujeme pro $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}.$$

10.1.31. Lemma. Vektorový prostor $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zjevně je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(\boldsymbol{x})\| = 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$.

Snadno též odvodím pro $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned}\|cL\| &= \sup\left\{\frac{\|cL(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= |c| \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= |c|\,\|L\|\,.\end{aligned}$$

Zbývá dokázat trojúhleníkovou nerovnost. Pro každé $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$\begin{aligned}\|L_1 + L_2\| &= \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &\le \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\| + \|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &\le \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\} + \sup\left\{\frac{\|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= \|L_1\| + \|L_2\|\,.\end{aligned}$$

■

10.1.32. Poznámka. Pro každé $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|L(\boldsymbol{x})\| \le \|L\|\,\|\boldsymbol{x}\|$. Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ totiž platí

$$\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \|L\|\,,$$

a tedy

$$\|L(\boldsymbol{x})\| \le \|L\|\,\|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ platí nerovnost triviálně.

10.1.33. Lemma. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ mající derivaci v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak existují $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall h \in B(\boldsymbol{0}, \delta) : \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C \|\boldsymbol{h}\| .$$

Důkaz. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ platí

$$\left\| F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right\| \leq \|\boldsymbol{h}\| .$$

Potom pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| &\leq \left\| F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right\| + \left\| F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right\| \\ &\leq \|\boldsymbol{h}\| + \left\| F'(\boldsymbol{a}) \right\| \|\boldsymbol{h}\| \\ &= (1 + \left\| F'(\boldsymbol{a}) \right\|) \|\boldsymbol{h}\| . \end{aligned}$$

Číslo $C = 1 + \|F'(\boldsymbol{a})\|$ tedy vyhovuje požadované nerovnosti. ∎

10.1.34. Věta. Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$, F má derivaci v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a G má derivaci v $\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje $(G \circ F)'(\boldsymbol{a})$ a platí

$$(G \circ F)'(\boldsymbol{a}) = G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Z Lemmatu 10.1.33 najdeme $C \in \mathbb{R}$ a $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta_0) : \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C \|\boldsymbol{h}\| . \tag{10.7}$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě $\boldsymbol{a}$.

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{u} \in B(\boldsymbol{0}, \eta) : \left\| G(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}) \right\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{u}\| . \tag{10.8}$$

Dále nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta): \left\| F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{h}\| \tag{10.9}$$

a

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta) : \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C \|\boldsymbol{h}\| < \eta. \tag{10.10}$$

Pak pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ máme díky (10.8) a (10.10) odhad

$$\begin{aligned} &\left\| G(\boldsymbol{b} + (F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})) \right\| \\ &\leq \varepsilon \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \\ &\leq C\varepsilon \|\boldsymbol{h}\| . \end{aligned} \tag{10.11}$$

Dále pro tato $\boldsymbol{h}$ platí z (10.9)

$$\begin{aligned}\|G'(\boldsymbol{b})\big(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a})\big)-&G'(\boldsymbol{b})\circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\| \\ &\leq \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\| \left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a})-F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\ &\leq \varepsilon \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\| \|\boldsymbol{h}\|\,.\end{aligned} \tag{10.12}$$

Kombinací (10.11) a (10.12) máme

$$\begin{aligned}&\|G\big(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})\big)-G\big(F(\boldsymbol{a})\big)-G'(\boldsymbol{b})\circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\| \\ &\quad\leq \left\|G(\boldsymbol{b}+(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a})))-G(\boldsymbol{b})-G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a}))\right\| \\ &\qquad+\left\|G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a}))-G'(\boldsymbol{b})\circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\ &\quad\leq (C+\left\|G'(\boldsymbol{b})\right\|)\varepsilon\,\|\boldsymbol{h}\|\,,\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ∎

10.1.35. Poznámka. Derivace $(G\circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentován součinem matic, které reprezentují $F'(\boldsymbol{a})$ a $G'(\boldsymbol{b})$. Tedy derivace $(G\circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentována maticí

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\right)_{\substack{l=1..s\\ j=1..k}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{j=1..k\\ i=1..n}}.$$

10.1.36. Věta (řetízkové pravidlo)**.** Nechť funkce $f_1,\dots,f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{b}=(f_1(\boldsymbol{a}),\dots,f_k(\boldsymbol{a}))$ totální diferenciál. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$h(\boldsymbol{x})=g\big(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\dots,f_k(\boldsymbol{x})\big).$$

Pak má h v $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál a pro $i\in\{1,\dots,n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b})\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}). \tag{10.13}$$

Důkaz. Existence totálního diferenciálu plyne z předchozí Věty 10.1.34. Dle Poznámky 10.1.35 platí (10.13), jelikož

$$\left(\tfrac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\tfrac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)=\left(\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{b}),\dots,\tfrac{\partial g}{\partial y_k}(\boldsymbol{b})\right)\begin{pmatrix}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots, & \tfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & & \vdots\\ \tfrac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \tfrac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}.$$

∎

10.1.37. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v každém bodě. Definujme $h \colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

Potom pro $(r,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\tfrac{\partial h}{\partial r}(r,t), \tfrac{\partial h}{\partial t}(r,t)\right) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t), \tfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right)\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin t,\\ \frac{\partial h}{\partial t}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)(-r\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)(r\cos t).\end{aligned}$$

10.1.38. Poznámka. Nechť f_1, f_2 jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které mají v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak platí

(a) $(f_1 + f_2)'(\boldsymbol{a}) = f_1'(\boldsymbol{a}) + f_2'(\boldsymbol{a})$,
(b) $(f_1 f_2)'(\boldsymbol{a}) = f_2(\boldsymbol{a}) f_1'(\boldsymbol{a}) + f_1(\boldsymbol{a}) f_2'(\boldsymbol{a})$,
(c) $(f_1/f_2)'(\boldsymbol{a}) = f_2^{-2}(\boldsymbol{a})\left(f_2(\boldsymbol{a}) f_1'(\boldsymbol{a}) - f_1(\boldsymbol{a}) f_2'(\boldsymbol{a})\right)$, pokud $f_2(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

K důkazu (a) uvažujme funkci $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisy $g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ a zobrazení $f = (f_1, f_2) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Pak $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$ a $g'(\boldsymbol{b}) = (1,1)$ pro každý bod $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$. V bodě $\boldsymbol{a}$ tedy platí

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)'(\boldsymbol{a}) &= (g \circ f)'(\boldsymbol{a})\\ &= (1,1)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}\\ &= \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \quad \dots \quad \tfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)\\ &= f_1'(\boldsymbol{a}) + f_2'(\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

Podobně postupujeme v případech (b) a (c) za pomoci funkcí $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, respektive $g(y_1, y_2) = y_1/y_2$.

10.1.39. Věta (o přírůstku funkce)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která má totální diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $\{t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\boldsymbol{c} \in L$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Definujme funkci $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f\left((1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\right), \quad t \in [0,1].$$

Zobrazení $t \mapsto (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ má spojitou derivaci, takže g je spojité na $[0,1]$ a v každém bodě $(0,1)$ má derivaci. Potom podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) existuje $t_0 \in (0,1)$ takové, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

neboli pro $\boldsymbol{c} = (1-t_0)\boldsymbol{a} + t_0\boldsymbol{b}$ máme

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) &= g(1) - g(0) = g'(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c})(b_i - a_i) = f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

■

10.1.40. Definice. Řekneme, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, pokud pro každé dva body z A platí, že úsečka je spojující je podmnožinou A.

10.1.41. Příklad. Pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ nemusí analogie Věty 10.1.39 platit. Uvažujme totiž zobrazení $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované jako $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Pak $F'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq \boldsymbol{0}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,

$$F(2\pi) - F(0) = (1,0) - (1,0) = (0,0),$$

ale

$$F'(c)(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin c, \cos c) \neq (0,0), \quad c \in (0,1).$$

10.1.42. Věta. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $F : G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\left\{\left\|F'(\boldsymbol{x})\right\| ;\ \boldsymbol{x} \in G\right\} \leq K.$$

Pak F je **lipschitzovské s konstantou** K, tj.

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G : \|F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq K \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$. Pokud $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(\boldsymbol{b}) \neq f(\boldsymbol{a})$ a položme

$$\boldsymbol{v} = \frac{f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})}{\|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\|}.$$

Definujme funkci $\varphi \colon G \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \langle f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{j=1}^{k} f_j(\boldsymbol{x}) v_j,$$

platí

$$|\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a})| = |\langle f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}\rangle| = \|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\|.$$

Dále máme
$$\varphi'(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x}), \quad x \in G,$$
a pro libovolné $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{h}\| \leq 1$, platí
$$\begin{aligned} \left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| = \left|\langle f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{v}\rangle\right| \\ &\leq \left\| f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right\| \|\boldsymbol{v}\| \leq \left\| f'(\boldsymbol{x})\right\| \|\boldsymbol{v}\| \\ &\leq \left\| f'(\boldsymbol{x})\right\| \leq K. \end{aligned}$$
Tedy
$$\left\|\varphi'(\boldsymbol{x})\right\| = \sup\left\{\left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right|;\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| \leq 1\right\} \leq K.$$
Podle Věty 10.1.39 existuje $\boldsymbol{c} \in G$ splňující
$$\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$
Tedy
$$\| f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| = \left|\varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\right| \leq \left\|\varphi'(\boldsymbol{c})\right\| \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \leq K \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

■