METRICKÉ PROSTORY I

1. Ukažte, že $(c_0, \|\cdot\|)$, kde $c_0 = \big\{\{x_n\};\ \lim x_n = 0\big\}$, $\|x\| = \sup\{|x_n|;\ n \in \mathbf{N}\}$ tvoří normovaný lineární prostor.

2. Ukažte, že $(\ell_1, \|\cdot\|)$, kde $\ell_1 = \big\{\{x_n\};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\big\}$, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ tvoří normovaný lineární prostor.

3. Ukažte, že $(\ell_2, \|\cdot\|)$, kde $\ell_2 = \big\{\{x_n\};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\big\}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$ tvoří normovaný lineární prostor.

4. Ukažte, že $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, kde $\ell_\infty = \big\{\{x_n\};\ \{x_n\} \text{ je omezená}\big\}$, $\|x\| = \sup\{|x_n|;\ n \in \mathbf{N}\}$ tvoří normovaný lineární prostor.

5. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $a \in P$. Definujme $\sigma\colon P \times P \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y; \\ \rho(x, a) + \rho(a, y), & \text{pokud } x \neq y. \end{cases}$$

Ukažte, že (P, σ) je metrický prostor.

6. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $a \in P$. Definujme $\sigma\colon P \times P \to [0, \infty)$ předpisem $\sigma(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$. Ukažte, že (P, σ) je metrický prostor.

7. Nechť (P, ρ) je *diskrétní* metrický prostor. Ukažte, že potom je každá podmnožina P otevřená.

8. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$. Ukažte, že potom je $\operatorname{int} A$ největší otevřená množina obsažená v A.

9. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$. Ukažte, že potom je $\overline{A}$ nejmenší uzavřená množina obsahující A.

10. Ukažte, že funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(xyz)$ je spojitá na $\mathbf{R}^3$.

11. Na prostoru $\mathcal{C}([0, 1]$ uvažujte zobrazení $T\colon\ f \mapsto \int_0^1 f$. Rozhodněte, zda je uvedené zobrazení spojité, pokud na $\mathcal{C}([0, 1]$ uvažujeme supremovou, resp. integrální, metriku.

12. Uvažujme množinu $\mathcal{C}^\infty([0, 1]) \subset \mathcal{C}([0, 1])$ se supremovou metrikou. Rozhodněte, zda následující zobrazení z $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$ jsou spojitá:

(1) $F(f) = 2f$,
(2) $F(f) = f^2$,
(3) $F(f) = f'$,
(4) $F(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [0, 1]$.

Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené eventuálně uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

13. $A_1 = \mathbb{Q}$

14. $A_2 = \mathbb{N}$

15. $A_3 = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$

16. $A_4 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\ y \leq 0\}$

17. $A_5 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$

18. $A_6 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$

19. $A_7 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\}$

20. $A_8 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$

21. $A_9 = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

22. $A_{10} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ |x + y| - x - y > 0\}$

U následujících dvou množin určete jejich uzávěr.

23. $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f$ je spojitá a po částech lineární$\}$ v $\mathcal{C}([0, 1])$ se supremovou metrikou.

24. $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]); \forall x,\ y \in [0, 1]\colon |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$ v $\mathcal{C}([0, 1])$ se supremovou metrikou.

Spočtěte následující limity.

25. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

26. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

27. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

28. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$

29. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Množina $F \subset M$ je uzavřená v (M, ϱ_M), právě když existuje uzavřená množina D v (P, ϱ) taková, že $F = M \cap D$.

30. Ukažte, že v metrickém prostoru (P, ρ) nemusí platit

$$\overline{\{x \in P; \rho(x, y) < 1\}} = \{x \in P; \rho(x, y) \leq 1\}.$$

31. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$. Dokažte, že platí $A \cup A' = \overline{A}$. Symbol A' značí množinu všech hromadných bodů množiny A.

32. Definujme na množině $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Ověřte, že ϱ je metrika a spočtěte $\operatorname{diam} F_n$, kde $F_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$, v $(\mathbf{R}, \varrho)$. Jsou množiny F_n omezené, uzavřené, kompaktní v $(\mathbf{R}, \varrho)$?

33. Dokažte, že je-li neprázdný metrický prostor (P, ϱ) kompaktní, pak existují $y, z \in P$ takové, že $\varrho(y, z) = \operatorname{diam} P$.

34. Ukažte, že existuje metrický prostor P a v něm neprázdná uzavřená množina F a neprázdná kompaktní množina K takové, že jejich vzdálenost $\rho(K, F)$ není realizována, tj. není pravda, že existují body $a \in K, b \in F$ takové, že $\rho(K, F) = \rho(a, b)$. Lze úlohu vyřešit v $\mathbf{R}^n$?

35. Dokažte, že

(a) uzavřená jednotková koule není kompaktní podmnožinou prostoru ℓ_2,

(b) množina
$$M = \big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2; |x_n| \le \tfrac{1}{n}\big\}.$$
je kompaktní podmnožinou ℓ_2.

36. Nechť (K,ρ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f\colon K \to K$ je zobrazení splňující podmínku
$$\forall x,y \in K, x \ne y\colon \rho\big(f(x), f(y)\big) < \rho(x,y).$$
Dokažte, že pak existuje bod $x^* \in K$ takový, že $f(x^*) = x^*$.

VÝSLEDKY A NÁVODY

13. A_1 není ani otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_1 = \emptyset$, $\overline{A_1} = \mathbf{R}$, $H(A_1) = \mathbf{R}$; **14.** A_2 je uzavřená a není otevřená, $\operatorname{int} A_2 = \emptyset$, $\overline{A_2} = \mathbb{N}$, $H(A_2) = \mathbb{N}$; **15.** A_3 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_3 = \emptyset$, $\overline{A_3} = A_3 \cup \{0\}$, $H(A_3) = A_3 \cup \{0\}$; **16.** A_4 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_4 = (0,+\infty) \times (-\infty, 0)$, $\overline{A_4} = \langle 0,+\infty) \times (-\infty,0\rangle$, $H(A_4) = \{0\} \times (-\infty, 0\rangle \cup \langle 0,+\infty) \times \{0\}$; **17.** A_5 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\overline{A_5} = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$, $H(A_5) = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 = 1\}$; **18.** A_6 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_6 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\}$, $\overline{A_6} = A_6$, $H(A_6) = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 = 1\}$; **19.** A_7 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_7 = A_7$, $\overline{A_7} = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y \ge 17\}$, $H(A_7) = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y = 17\}$; **20.** A_8 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_8 = \emptyset$, $\overline{A_8} = A_8$, $H(A_8) = A_8$; **21.** A_9 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_9 = \emptyset$, $\overline{A_9} = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x \ge 0, y \ge 0, x+y = 2, z \le 0\}$, $H(A_9) = \overline{A_9}$. **22.** $\operatorname{int} A_{10} = A_{10}$, $\overline{A}_{10} = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x+y \le 0\}$, $H(A_{10}) = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x+y = 0\}$ **25.** Neexistuje. **26.** 0 **27.** 1 **28.** $\frac{1}{2}$